УДК 530.1(075.8)
С34
ББК 22.2

Сивухин Д. В. **Общий курс физики.** Учеб. пособие: Для вузов. В 5 т. Т. III. **Электричество**. — 4-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2004. — 656 с. — ISBN 5-9221-0227-3; 5-89155-086-5.

Третий том курса физики, широко известного у нас в стране и за рубежом. Книга написана на основе лекций, которые в течение ряда лет читались автором студентам Московского физико-технического института. Основное внимание уделено выяснению физического смысла и содержания основных законов и понятий науки об электричестве, установлению границ применимости этих законов, развитию у студентов навыков физического мышления и умения ставить и решать конкретные задачи.

Третье издание третьего тома вышло в 1996 г. в двух частях.

Для студентов физических и математических факультетов университетов, физико-технических и инженерно-физических институтов, а также вузов, где физика является основной дисциплиной.

ISBN 5-9221-0227-3 (Т. III)
ISBN 5-9221-0229-X
ISBN 5-89155-086-5 (Т. III)
ISBN 5-89155-077-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к первому изданию

Учение об электричестве включает три группы вопросов. К первой группе относятся основные понятия и общие принципы, управляющие электрическими и магнитными явлениями; ко второй — электрические и магнитные свойства вещества; к третьей — технические и практические применения электричества.

В настоящем курсе основное внимание уделяется вопросам первой группы, которые излагаются с наибольшей полнотой. Принят индуктивный метод изложения. Основные понятия и принципы устанавливаются путем обобщения опытных фактов, имеющих ограниченную область применимости. Процесс обобщения идет непрерывно и целенаправленно на протяжении всего изложения, завершаясь в середине курса установлением системы уравнений Максвелла. Все последующее изложение строится с учетом этих уравнений.

Электрические и магнитные свойства вещества в общем курсе физики, естественно, не могут быть рассмотрены с той же степенью подробности. Их полное понимание возможно только на основе квантовой механики, а подробное изложение должно производиться в специальных курсах. Несмотря на это, я стремился уделить большое внимание и этой группе вопросов, насколько это возможно сделать в рамках общего курса физики, предназначенного для студентов младших курсов. При этом я широко пользовался методами термодинамики. Без применения термодинамики невозможно полное и ясное изложение не только частных, но и общих вопросов макроскопической электродинамики.

Что касается технических и прочих применений учения об электричестве, то этим вопросам уделено значительно меньше внимания, чем они того заслуживают. Из таких вопросов рассмотрены лишь некоторые, и притом только с принципиальной стороны.

В качестве основной в курсе принята гауссова система единиц. Мотивы, заставившие меня отказаться от Международной системы единиц (СИ), уже приводились в предисловии к первому тому. Более подробно они излагаются в § 85 этого тома. Однако нельзя не считаться с тем, что изложение физики в средней школе и в большинстве технических вузов в настоящее время ведется в системе СИ. Многие книги и журнальные статьи, в особенности прикладного характера, написаны в той же системе. Поэтому в § 85 предлагаемой книги дается подробное изложение принципов построения системы СИ в электродинамике и ее связи с гауссовой системой. Доказывается общее правило, сформулированное в виде табл. 1, позволяющее любую формулу гауссовой системы переписать в системе СИ и наоборот. Кроме того, в Приложении к книге основные формулы электродинамики написаны в системе СИ. Формулу, записанную в тексте книги в гауссовой системе, можно найти под тем же номером в Приложении. Если же соответствующей формулы в Приложении нет, то ее легко получить, пользуясь табл. 1. В табл. 2 приводятся соотношения между единицами СИ и гауссовой системы.

Как и первые два тома, предлагаемый третий том является расширенным курсом лекций, которые я читал на протяжении многих лет (начиная с 1957 г.) студентам второго курса Московского физико-технического института. Поэтому все сказанное в предисловиях к этим двум томам относительно целей и характера изложения относится и к третьему тому.

Многие задачи, включенные в этот том, предлагались студентам Московского физико-технического института на письменных экзаменах и семинарских занятиях. Идеи значительной части этих задач принадлежат преподавателям физики указанного института.

Демонстрации опытов по электричеству, которыми сопровождалось чтение курса, принесли много пользы не только слушателям, но и лектору, читавшему курс. Эти демонстрации готовили и осуществляли лекционные ассистенты: М.И. Маклаков, В.А. Кузнецова, Е.Н. Морозов, В.П. Молчанов. Выражаю им и всем преподавателям, участвовавшим в составлении задач, глубокую благодарность.

Мне приятно также принести глубокую благодарность профессору И.С. Горбаню и сотрудникам руководимой им кафедры экспериментальной физики Киевского государственного университета им. Т.Г. Шевченко, а также профессору С.С. Герштейну за внимательное рецензирование рукописи. Их советы, полные доброжелательности, немало способствовали улучшению предлагаемой книги.

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Действие на расстоянии и полевое взаимодействие

1. Опыт показывает, что между электрически заряженными и намагниченными телами, а также телами, по которым текут электрические токи, действуют силы, называемые *электродинамическими* или *электромагнитными*. Отвлекаясь от деталей, можно сказать, что относительно природы этих сил в науке выдвигались две противоположные точки зрения. Ранее известная из них исходила из представления о *непосредственном действии тел на расстоянии*, без участия каких бы то ни было промежуточных материальных посредников. Более новая точка зрения, принятая в настоящее время, исходит из представления, что взаимодействия передаются с помощью особого материального посредника, называемого *электромагнитным полем.*

2. Теория действия на расстоянии в учении об электрических и магнитных явлениях господствовала примерно до последней четверти XIX века. Основная идея этой теории была заимствована из учения о всемирном тяготении. Громадные успехи небесной механики, основанной на законе всемирного тяготения великого Исаака Ньютона (1643–1727), с одной стороны, и полная неудача как-то объяснить тяготение — с другой, привели многих ученых к представлению, что тяготение, а также электрические и магнитные силы не нуждаются в объяснении, а являются неотъемлемыми, врожденными свойствами материи. По мнению этих ученых, задача теории электричества состояла в том, чтобы установить *элементарные законы* электрических и магнитных сил и на их основе объяснить все электрические и магнитные явления. Под элементарными законами понимали законы, определяющие силы взаимодействия на расстоянии между точечными *электрическими зарядами*, точечными *магнитными полюсами* и *элементами тока*, т. е. между бесконечно короткими участками бесконечно тонких проводов, по которым текут электрические токи. По своему содержанию и форме эти законы напоминали, а часто прямо копировали ньютонов закон всемирного тяготения. Таковы были, например, *законы Кулона*, названные в честь французского физика Ш. Кулона (1736–1806), о взаимодействии электрических зарядов или магнитных полюсов.

В математическом отношении теория действия на расстоянии достигла высокой степени совершенства благодаря трудам Пьера С. Лапласа (1749–1827), Андре М. Ампера (1775–1836), Симеона Д. Пуассона

(1781–1840), Карла Ф. Гаусса (1777–1855), М.В. Остроградского (1801–1862), Грина (1793–1841), Франца Неймана (1798–1895), Карла Неймана (1832–1925), Вильгельма Вебера (1804–1891), Густава Р. Кирхгофа (1824–1887) и многих других математиков и физиков. Теория отличалась формальной простотой и ясностью исходных математических положений, математической строгостью, стройностью и конкретностью. Она совершенно не вводила сомнительных гипотетических представлений относительно физической природы электрических и магнитных сил, а основывалась только на эмпирически прочно установленных фактах и их обобщениях. Количественные выводы теории были прочно обоснованными и достоверными (разумеется, в пределах той области, в которой элементарные законы подтверждены опытом). Не удивительно, что теории действия на расстоянии придерживалось большинство физиков вплоть до последней четверти XIX века. Однако количественное согласие теории с опытом в исследованной ограниченной области явлений не может считаться достаточным доказательством правильности концепции непосредственного действия на расстоянии.

3. Среди физиков XIX века, для которых концепция непосредственного действия на расстоянии была неприемлема, возвышается почти одиноко фигура гениального Майкла Фарадея (1791–1867) — основоположника физической теории электромагнитного поля. Над ним не довлели формальные идеи математиков. Его самобытный ум был свободен от укоренившихся представлений и не мог примириться с мыслью, что тело может производить непосредственное действие в тех местах, в которых оно не находится и которые отделены от него абсолютно пустым пространством. Согласно Фарадею, действие одного тела на другое может либо осуществляться непосредственным соприкосновением, либо передаваться через промежуточную среду.

В случае электромагнитных взаимодействий роль такой среды играл гипотетический мировой эфир, заполняющий все пространство между телами и мельчайшими частицами, из которых они состоят. При электризации и намагничивании тел в окружающем эфире возникают, согласно Фарадею, какие-то изменения, напоминающие упругие деформации и связанные с ними натяжения и давления. Такими натяжениями и давлениями Фарадей и объяснял электромагнитные взаимодействия тел. Центр тяжести с изучения зарядов и токов, являвшихся в теории действия на расстоянии центрами сил, переносился на изучение окружающего пространства. Это пространство с действующими в нем силами называется *электромагнитным полем.*

Яркую характеристику воззрений Фарадея дал Генрих Герц (1857–1894). В докладе, прочитанном в Гейдельберге в 1889 г., он говорил:

«Фарадею говорили, что при электризации тела в него что-то вносят, но он видел, что возникающие изменения обнаруживаются лишь вне тела, а отнюдь не внутри. Фарадея учили, что силы просто перескакивают через пространство, но он видел, какое большое влияние оказывает на эти силы то вещество, которым заполнено это якобы перескакиваемое пространство. Фарадей считал, что электричество существует наверное, но что о его силах спорят. Он видел, однако, насколько осязательно выступают в своих

действиях эти силы, в то время как самого электричества он никак не мог обнаружить. И тогда все обернулось в его представлении. Электрические и магнитные силы стали для него существующими, действительными, осязаемыми, а электричество, магнетизм сделались вещами, о существовании которых можно спорить. Силовые линии, как он называл силы, мыслимые самостоятельно, стояли перед его умственным взором в пространстве как состояния последнего, как напряжения, как вихри, как течения, как многое другое, что и сам он не мог определить, но они стояли там, действуя друг на друга, сдвигая и толкая тела туда и сюда, распространяясь и сообщая друг через друга возбуждение от точки к точке».

4. Применяя изложенные воззрения к конкретным случаям, Фарадей довольствовался преимущественно качественной стороной явлений. Он никогда не пользовался точным языком математических формул. Рассуждения и доказательства Фарадея воспринимались с трудом и даже отвергались его современниками. Зато среди убежденных приверженцев Фарадея был гениальный Джеймс К. Максвелл (1831–1879), в совершенстве владевший математическими методами своего времени. Максвелл облек основные идеи Фарадея в математическую форму. Он обобщил имеющиеся опытные факты и пополнил их новыми. Таким путем в начале 60-х годов XIX века ему удалось сформулировать систему уравнений, в которой в сжатой и точной форме содержатся все количественные законы электромагнитного поля. Установление этих уравнений, пожалуй, является наиболее крупным открытием физики XIX века.

5. Сначала теория Максвелла не получила признания. Это связано главным образом с тем, что вплоть до последней четверти XIX века электродинамика занималась изучением только *постоянных* или *почти постоянных* электрических и магнитных полей. А в этих случаях уравнения Максвелла переходят в уравнения теории действия на расстоянии. Здесь фактические выводы обеих теорий совпадают. Поэтому никакие опыты с постоянными электромагнитными полями не могут ответить на вопрос, какое из двух представлений о силах взаимодействия верно или, точнее, заведомо неверно. Для этого надо было обратиться к изучению *переменных полей.* Максвелл показал, что из его уравнений следует существование *электромагнитных волн*, и вычислил скорость их распространения. Оказалось, что в вакууме эта скорость совпадает со скоростью света (300 000 км/с), т. е. очень велика. Громадный круг явлений воспринимается так, как если бы скорость распространения электромагнитных возмущений была *бесконечна*, т. е. так, как если бы была справедлива теория действия на расстоянии. Электромагнитные волны впервые были получены и экспериментально исследованы в знаменитых опытах Герца в 1887–1888 гг. Их свойства оказались в точности такими, какие предсказывала теория Максвелла. С точки зрения теории действия на расстоянии существование электромагнитных волн абсолютно непонятно. Поэтому после опытов Герца вопрос о характере электродинамических взаимодействий был однозначно решен в пользу теории поля. Громадную роль в деле распространения и развития теории Максвелла сыграло великое изобретение

радио А.С. Поповым (1859–1905), которое в конце концов преобразило науку, технику и саму жизнь человека.

6. Физики XIX века были убеждены, что явления электричества и магнетизма могут быть поняты до конца только тогда, когда они будут сведены к механическим причинам, например к упругим натяжениям, давлениям или каким-то другим механическим изменениям в окружающей среде. Такой средой в теории Фарадея–Максвелла считался *мировой эфир*. Было затрачено много усилий для построения механической теории электрических и магнитных явлений. Сам Максвелл положил этому начало. В первых работах по теории электричества он широко пользовался механическими моделями для представления электромагнитного поля. Однако для представления различных свойств поля потребовались разные модели, противоречащие друг другу. Механические же модели в теории Максвелла сыграли лишь роль лесов строящегося здания. После того как здание построено, леса убираются. Так и в завершенном варианте теории Максвелла, опубликованном им в «Трактате по электричеству и магнетизму» (1873), механические модели совсем не используются. Все усилия по построению непротиворечивой механической теории электрических и магнитных явлений потерпели неудачу. Они убедили физиков последующих поколений в *принципиальной невозможности механической картины мира*. Атомно-молекулярная теория показала, что упругие силы сами являются результатом электрического взаимодействия между электрически заряженными частицами, из которых построены тела. Упругость была сведена к электричеству. После этого программа сведения электрических сил к упругим потеряла всякий смысл. Электрические силы оказались более «простыми» и «понятными», чем силы упругие. Современная физика не связывает с понятием электромагнитного поля никаких «наглядных» картин типа упругих деформаций, натяжений, давлений и пр. Она утверждает лишь, что поле *реально существует* и в этом смысле, наряду с веществом, является *одним из видов материи*. Поле обладает энергией, импульсом и другими физическими свойствами. Посредством полей осуществляются электромагнитные взаимодействия тел. Заряженное тело A возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле. Оно проявляется в силе, действующей на другое заряженное тело B, вносимое в это поле. Но поле, возбуждаемое зарядами тела A, реально существует в каждой точке пространства, *даже если в нее не помещено никакое другое тело* B. В этом отличие точек зрения теории поля и теории непосредственного действия на расстоянии. Последняя также пользуется понятием поля. Однако в ней поле выступает не как физическая реальность, а как *вспомогательное математическое понятие*, вводимое лишь для удобства описания электромагнитных взаимодействий. По теории действия на расстоянии не имеет смысла говорить о поле в той или иной точке пространства, пока в него не внесено заряженное тело, на которое действует электромагнитная сила.

7. Первоначальная теория Максвелла не вводила принципиального различия между материальными средами и вакуумом (эфиром). Вакуум рассматривался в ней как *одна из сред*, отличающаяся от других сред только количественно: значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей и электрической проводимости. Более глубокую и ясную картину дала *электронная теория*, творцом которой был великий голландский физик Х.А. Лоренц (1853–1928). Она была создана и детально разработана еще до открытия электрона и установления структуры атома. [Электрон был открыт Дж. Дж. Томсоном (1856–1940) в 1897 г., модель атома Эрнеста Резерфорда (1871–1937) появилась в 1911 г., а теория Нильса Бора (1885–1962) — в 1913 г.] На современном языке основную идею электронной теории можно сформулировать следующим образом. Вещество состоит из положительно заряженных атомных ядер и отрицательно заряженных электронов. Для наших целей пока нет необходимости вдаваться в детали строения атомов и атомных ядер. Важно заметить лишь, что вакуум является *универсальной средой*, в которой возбуждается электромагнитное поле. С точки зрения теории электричества всякое вещество следует рассматривать как вакуум, испорченный вкрапленными в него атомными ядрами и электронами. Заряды этих частиц возбуждают электромагнитные поля, накладывающиеся на внешнее поле, в которое внесено вещество. Наложением таких полей и определяется электромагнитное поле в веществе. С этой точки зрения изучение электромагнитного поля в веществе сводится к изучению поля в вакууме. Так мы и поступим в дальнейшем. Сначала изучим электрическое и магнитное поля в вакууме, а затем исследуем, как поле искажается зарядами атомных ядер и электронов вещества. Таким путем электронная теория привела к более глубокому пониманию уравнений Максвелла в веществе. Она явилась рациональной основой для понимания электрических и магнитных свойств вещества с атомистической точки зрения. Сам Лоренц и его последователи, разумеется, пользовались классическими представлениями. Это приводило к трудностям принципиального характера, преодоление которых стало возможным только после того, как электронная теория была перестроена на квантовой основе.

8. *Уравнения Максвелла являются обобщениями опытных фактов. Их доказательство надо искать в сопоставлении с опытом выводимых из них следствий.* Эти уравнения составляют стержень всей электродинамики. Они могут рассматриваться как *основные аксиомы электродинамики*, играющие в ней такую же роль, какую законы Ньютона играют в классической механике. Поэтому изложение электродинамики можно было бы строить *чисто дедуктивно* на основе постулативно установленных уравнений Максвелла. Однако для первоначального изучения такой путь нецелесообразен. Мы глубже проникнем в сущность электродинамики Максвелла, если изберем *индуктивный метод изложения.* Начнем с простейших опытных фактов и явлений, которые правильно описываются не только на языке теории поля, но и на языке

теории непосредственного действия на расстоянии. Постепенным обобщением законов этих явлений мы придем к таким результатам, которые уже не укладываются в рамки теории действия на расстоянии, а могут быть истолкованы только с помощью теории поля. В конце концов мы придем к системе уравнений Максвелла, после чего все последующее изложение будет строиться на их основе.

§ 2. Электрический заряд и напряженность электрического поля

1. Важнейшими понятиями в учении об электричестве являются *электрический заряд* и *напряженность электрического поля.* Качественное представление об этих понятиях дают простейшие опыты по электричеству, известные из элементарного курса физики. Здесь мы остановимся только на *количественной* стороне вопроса. Точное количественное определение заряда и напряженности электрического поля, как и всяких других физических величин, сводится к указанию *принципиального способа их измерения.*

2. Будем предполагать сначала, что электрическое поле не изменяется во времени. Такое поле называется *электростатическим.* Оно может быть возбуждено неподвижными электрическими зарядами. Малое электрически заряженное тельце, настолько малое, что оно практически не вызывает (вследствие индукции) перераспределения электрических зарядов на окружающих телах, может служить *пробным телом* или *пробным зарядом.* Возьмем два пробных заряда и будем последовательно помещать их в одну и ту же точку пространства, и притом так, чтобы оба заряда покоились в соответствующей системе отсчета. Так как поле не меняется во времени, то эти заряды будут подвергаться действию одного и того же поля. Пусть $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ — силы, действующие на эти неподвижные заряды. Обобщением опытных фактов является следующий результат. Силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ имеют либо одинаковые, либо прямо противоположные направления, а их отношение не зависит от положения точки, в которой помещаются пробные заряды. Отношение F_1/F_2 является поэтому характеристикой *самих только пробных зарядов*, а не поля, в которое они помещены. Это позволяет характеризовать состояние электризации пробного тела определенным числом q, называемым *электрическим зарядом.* По определению отношение зарядов q_1 и q_2 двух пробных тел равно отношению действующих на них сил F_1 и F_2 при последовательном помещении их в одну и ту же точку поля:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{F_1}{F_2}. \tag{2.1}$$

При этом предполагается, что силы F_1 и F_2 (а с ними и сравниваемые заряды q_1 и q_2) имеют одинаковые знаки, если эти силы совпадают по направлению, и противоположные знаки, если их направления прямо противоположны.

То обстоятельство, что при введении этого определения заряды предполагались пробными, не лишает его общности. Действительно, каковы бы ни были размеры заряженных тел, всегда можно поместить их в электрическое поле столь удаленных зарядов, что по отношению к этому полю рассматриваемые тела могут считаться пробными.

Заряд какого-либо произвольно взятого тела можно условно принять за единицу. Тогда измерение отношения сил F_1/F_2 дает способ определения величины заряда в «абсолютной мере».

3. *Заряд тела не зависит от выбора (инерциальной) системы отсчета, в которой он измеряется.* Он *инвариантен* относительно перехода от одной инерциальной системы отсчета к другой. Это непосредственно следует из принципа относительности и принятого нами способа сравнения зарядов путем измерения сил, действующих на *неподвижные* заряды. Заряд одинаков во всех инерциальных системах отсчета по той же причине, по которой в них одинакова масса покоя одного и того же тела. Конечно, всякое измерение дает не абсолютное значение заряда, а только *отношение зарядов* рассматриваемых тел. Инвариантны не сами заряды, а *отношения зарядов.* Однако если условиться заряд какого-либо тела считать одинаковым во всех системах отсчета, то это будет справедливо и в отношении всех остальных зарядов. Именно такой смысл мы придаем утверждению об инвариантности заряда относительно выбора системы отсчета.

4. Соотношение (2.1) мы распространяем на случай любых переменных полей. Остается ли поле постоянным или меняется во времени — это не имеет значения. Важно только, чтобы в моменты измерения сил F_1 и F_2 поле, действующее на заряды q_1 и q_2, было одним и тем же и чтобы заряды q_1 и q_2 оставались неподвижными. Конечно, это утверждение также является обобщением опытных фактов.

Сила, действующая на единичный неподвижный пробный электрический заряд, называется напряженностью электрического поля и обозначается через $\mathbf{E}$. Если в соотношении (2.1) взять $q_1 = 1$, то будем иметь $F_1 = E$. Опуская далее индекс 2 и переходя к векторной форме записи, находим силу $\mathbf{F}$, действующую в электрическом поле $\mathbf{E}$ на неподвижный точечный заряд q:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \tag{2.2}$$

Напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ есть вектор, так как заряд q является скаляром, а сила $\mathbf{F}$ — вектором (см. т. I, § 7).

5. Указание на неподвижность заряда в определении напряженности электрического поля существенно. Дело в том, что силы, действующие на электрический заряд, зависят не только от электрического, но и от *магнитного поля.* Однако магнитное поле, как показывает опыт, действует только на *движущиеся* заряды и не действует на неподвижные. Используя при определении $\mathbf{E}$ неподвижные заряды, мы исключаем влияние магнитного поля.

Заряд, неподвижный в одной системе отсчета, уже не неподвижен в другой системе, движущейся относительно первой. Полная сила $\mathbf{F}$,

действующая на него (в нерелятивистском приближении), одна и та же в обеих системах отсчета. Но в первой системе, относительно которой заряд покоится, эта сила чисто электрическая, тогда как во второй системе, относительно которой заряд движется, она складывается из электрической и магнитной сил. Если измерить напряженность электрического поля во второй системе с помощью неподвижного в ней пробного заряда, то она окажется иной, чем в первой системе отсчета. Значит, *разделение поля на электрическое и магнитное зависит от выбора системы отсчета.* Электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом. Невозможно разделить весь комплекс явлений на явления чисто электрические и чисто магнитные. При переходе от одной системы отсчета к другой электрическое и магнитное поля определенным образом преобразуются. Законы этого преобразования даются в теории относительности. Поэтому *полная теория электромагнитных явлений должна быть релятивистской.*

6. Фундаментальным свойством электричества является существование его в двух видах — в виде *положительного* и *отрицательного* электричеств. В окружающем нас мире количества этих электричеств в высокой степени одинаковы. Это не удивительно, поскольку одноименные электричества отталкиваются, а разноименные — притягиваются. Другим фундаментальным свойством электричества является *закон сохранения электрического заряда*, являющийся обобщением опытных фактов. Он утверждает, что *полный заряд системы не может измениться, если через ее границу не проходят электрически заряженные частицы.* Это не значит, что сохраняются в отдельности положительный и отрицательный заряды системы. Например, если в системе имеются частицы высоких энергий, то в ней могут рождаться фотоны также высоких энергий. Фотоны могут также вступать в систему через ее границу. Фотоны высокой энергии при взаимодействии с атомами вещества могут породить *пару*, состоящую из отрицательно заряженного электрона и положительно заряженного позитрона. По отношению к такому процессу энергия фотона считается высокой, если она превосходит сумму энергий покоя электрона и позитрона. Возможен обратный процесс, в котором пара электрон–позитрон исчезает (аннигилирует) с испусканием фотонов. Подобного рода процессы меняют количества положительного и отрицательного электричеств в системе. Однако полный заряд ее сохраняется неизменным. Впрочем, в настоящем томе мы будем иметь дело только с частицами «низких» энергий, для которых такие процессы невозможны. Тогда сохраняются не только полный заряд, но также положительный и отрицательный заряды в отдельности.

Глава I

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

§ 3. Закон Кулона. Принцип суперпозиции электростатических полей

1. Электростатика занимается изучением электрических полей *неподвижных зарядов.* Сначала мы изучим электростатические поля в вакууме. Основной количественный закон электростатики был открыт Кулоном в 1785 г. Он формулируется следующим образом.

Сила взаимодействия F двух точечных зарядов в вакууме направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды, пропорциональна их величинам q_1 и q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними r_{12}. Она является силой притяжения, если знаки зарядов разные, и силой отталкивания, если эти знаки одинаковы. Математически:

$$F = C\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}, \tag{3.1}$$

где C — числовой коэффициент. Поскольку мы располагаем независимыми способами измерения всех величин F, q, r, опытным путем можно проверить не только обратную пропорциональность силы F квадрату расстояния r, но и пропорциональность ее произведению зарядов q_1 и q_2.

Кулон открыл свой закон, измеряя силы притяжения и отталкивания заряженных шариков с помощью *крутильных весов*, изобретенных им же. (Опыты Кулона общеизвестны и описываются во всех школьных учебниках физики.) Примерно за 11 лет до Кулона тот же закон был получен Г. Кавендишем (1731–1810) из значительно более точных, но косвенных измерений (см. § 6, п. 4). Однако работа Кавендиша не была им опубликована и оставалась неизвестной в течение более 100 лет. Максвелл — первый директор Кавендишской лаборатории — обнаружил в архиве этой лаборатории подготовленную к печати рукопись указанной фундаментальной работы Кавендиша и опубликовал ее в 1879 г.

Точечность зарядов, о взаимодействии которых идет речь в законе Кулона, означает, что *линейные размеры тел, на которых сосредоточены эти заряды, пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием между ними.* Закон предполагает, что заряды помещены в *абсолютном вакууме.* Опытная проверка его производится в воздухе. Принципиальный переход к абсолютному вакууму можно осуществить беспредельным уменьшением давления воздуха. Впрочем, в этом нет необходимости, так как влияние воздуха на силы взаимодействия очень мало и в большинстве случаев им можно пренебречь.

2. Числовое значение постоянной C в законе Кулона (3.1) можно выбрать произвольно и приписать этой постоянной любую размерность. Таким путем можно построить бесчисленное множество *систем единиц*. Однако не все они удобны. Наиболее удобной системой при изучении электромагнитного поля в физике является *абсолютная*, или *гауссова*, *система единиц*, которой мы и будем преимущественно пользоваться. Это есть система единиц СГС, дополненная единицами электрических и магнитных единиц. Она является комбинацией двух систем единиц: СГСЭ и СГСМ, т. е. *абсолютной электростатической* и *абсолютной электромагнитной* СГС-*систем единиц*.

Единицы «чисто» электрических величин (заряд, напряженность электрического поля, электрический потенциал, сила электрического тока, сопротивление проводника и пр.) в гауссовой системе совпадают с единицами СГСЭ, а единицы «чисто» магнитных величин (напряженность и индукция магнитного поля, магнитный момент, индуктивности проводов и пр.) — с единицами СГСМ. Система СГСМ будет рассмотрена в § 51. Здесь же мы изложим систему СГСЭ. В этой (и гауссовой) системе единиц коэффициент пропорциональности C в законе Кулона считается *безразмерным* и полагается равным *единице*. Закон Кулона записывается в виде

$$F = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}. \tag{3.2}$$

Размерность заряда определяется формулой

$$[q] = [F^{1/2}L] = M^{1/2}L^{3/2}T^{-1},$$

а размерность напряженности электрического поля — формулой

$$[E] = [Fq^{-1}] = M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}.$$

За единицу заряда принимается величина такого точечного заряда, который действует на такой же точечный заряд в вакууме с силой в одну дину, если расстояние между обоими зарядами равно одному сантиметру. За единицу напряженности электрического поля принимается напряженность такого поля в вакууме, которое действует на единичный точечный заряд с силой в одну дину. Эти единицы не получили специальных названий. Их просто называют *электростатическими* или СГСЭ-единицами заряда и напряженности электрического поля.

Практической единицей заряда является *кулон* (Кл). По точному определению кулон есть десятая доля СГСМ-ед. заряда или приблизительно $2{,}998 \cdot 10^9$ СГСЭ-ед. заряда. В грубых расчетах достаточна точность 1 Кл $= 3 \cdot 10^9$ СГСЭ-ед. заряда. Кулон — очень большая единица. Два точечных заряда в один кулон каждый, удаленные друг от друга на расстояние 1 км, взаимодействовали бы с силой

$$F = \frac{q^2}{r^2} = \frac{9 \cdot 10^{18}}{10^{10}} = 9 \cdot 10^8 \text{ дин} = 9 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

В системе СИ электрическому заряду (или току) приписывается самостоятельная размерность, не зависящая от размерностей длины, массы и времени. Эта система будет изложена в § 85.

3. В векторной форме закон Кулона записывается так:

$$\mathbf{F}_{ik} = \frac{q_i q_k}{r_{ik}^3}\,\mathbf{r}_{ik}, \tag{3.3}$$

где $\mathbf{F}_{ik}$ — сила, действующая на заряд q_k со стороны заряда q_i, а $\mathbf{r}_{ik}$ — радиус-вектор, проведенный от заряда q_i к заряду q_k. Напряженность поля точечного заряда q дается выражением

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^3}\,\mathbf{r}, \tag{3.4}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный от заряда q в рассматриваемую «точку наблюдения», к которой относится значение поля $\mathbf{E}$.

Напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ нескольких неподвижных точечных зарядов q_1, q_2, ... равна векторной сумме напряженностей полей, которые создавал бы каждый из этих зарядов в отсутствие остальных, т. е.

$$\mathbf{E} = \sum_i \frac{q_i}{r_i^3}\,\mathbf{r}_i, \tag{3.5}$$

где $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор, проведенный из заряда q_i в точку наблюдения. Это положение, являющееся обобщением опытных фактов, называется *принципом суперпозиции электростатических полей.* Не исключена возможность, что принцип суперпозиции нарушается на малых расстояниях порядка размеров атомных ядер (10^{-13} см) и меньше.

Формула (3.5) позволяет в принципе рассчитать напряженность электрического поля любой системы неподвижных зарядов. Если заряды не точечные, то их следует мысленно разделить на малые части, чтобы каждую из них можно было считать точечным зарядом. При непрерывном распределении электричества сумма (3.5) переходит в интеграл.

4. Для наглядного изображения электрических полей широко пользуются *силовыми линиями.* Силовая линия есть математическая линия, направление касательной к которой в каждой точке, через которую она проходит, совпадает с направлением вектора $\mathbf{E}$ в той же точке. За положительное направление силовой линии условились считать направление самого вектора $\mathbf{E}$. При таком соглашении можно сказать, что электрические силовые линии начинаются от положительных зарядов и оканчиваются на отрицательных. В § 5 будет показано, что в пространстве, свободном от электрических зарядов, силовые линии идут гуще там, где поле $\mathbf{E}$ сильнее, и реже там, где оно слабее. Поэтому по густоте силовых линий можно судить и о величине напряженности электрического поля. На рис. 1 изображены силовые линии равномерно заряженных шариков — положительного и отрицательного, а на

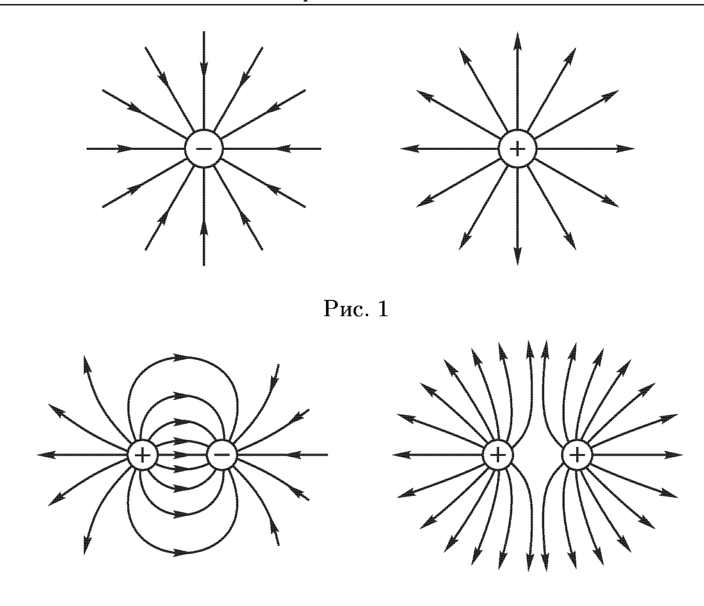


Рис. 1

Рис. 2

рис. 2 — двух разноименных и одноименных зарядов равных величин, сосредоточенных на таких шариках.

Для экспериментального воспроизведения силовых линий берут стеклянный сосуд с плоским дном и наливают в него какую-либо изолирующую жидкость, например касторовое масло, глицерин и т. п. В жидкости по возможности равномерно распределяются истертые в порошок кристаллики гипса, асбеста, частицы манной крупы или какие-либо другие продолговатые частицы. В жидкость погружаются металлические электроды. При соединении их с источниками электричества возбуждается электрическое поле. В этом поле частицы электризуются через влияние и, притягиваясь друг к другу разноименно наэлектризованными концами, располагаются в виде цепочек вдоль силовых линий. Картина силовых линий искажается течениями жидкости, вызываемыми силами, действующими на нее в неоднородном электрическом поле. Лучшие результаты получаются по методу, применявшемуся Робертом В. Полем (1884–1976). На стеклянную пластинку наклеиваются электроды из станиоля, между которыми создается электрическое напряжение. Затем на пластинку насыпают, слегка постукивая по ней, продолговатые частицы, на-

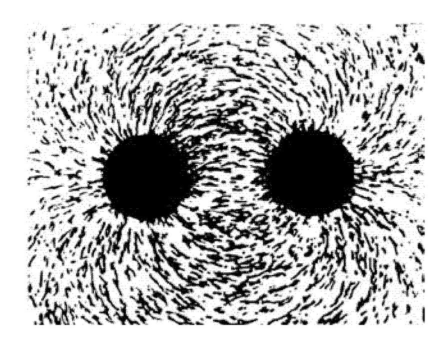


Рис. 3

пример кристаллики гипса. Они располагаются вдоль силовых линий. На рис. 3 изображена полученная таким образом картина силовых линий между двумя разноименно заряженными кружками из станиоля.

Метод силовых линий, конечно, применим для графического представления любых векторных полей. Линии, указывающие направления соответствующего вектора, называются *линиями этого вектора*, или *векторными линиями*. Им дают также специальные названия в зависимости от физического или геометрического смысла рассматриваемого векторного поля. Так, в гидродинамике вводятся *линии тока*, указывающие направление вектора скорости жидкости (см. т. I, § 93). Для представления магнитного поля пользуются *магнитными силовыми линиями* и т. д.

ЗАДАЧИ

1. Два маленьких шарика с массами $m = 0{,}1$ г каждый подвешены на шелковых нитях так, что их поверхности соприкасаются. После сообщения шарикам электрического заряда они оттолкнулись и их центры разошлись на расстояние $D = 6$ см (рис. 4). Определить заряд шарика q, если длина нити $l = 30$ см.

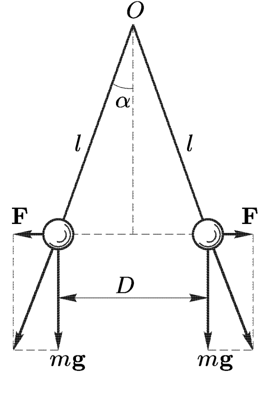


Рис. 4

Решение. В состоянии равновесия $F = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$. По закону Кулона $F = q^2/D^2$. Отсюда

$$q = D\sqrt{mg\,\mathrm{tg}\,\alpha},$$

или для малых углов

$$q = D\sqrt{mg\alpha} = D\sqrt{mgD/2l} = 18{,}8 \text{ СГСЭ-ед. заряда} = 6{,}3\cdot 10^{-9} \text{ Кл}. \quad (3.6)$$

Этот пример показывает, что уже ничтожные доли кулона (около одной миллиардной) легко могут быть обнаружены с помощью сравнительно грубого электроскопа.

2. Вычислить напряженность электрического поля равномерно заряженного тонкого диска на его геометрической оси.

Решение. Пусть σ — поверхностная плотность электричества, т. е. количество электричества, приходящееся на единицу площади диска. По условию величина σ одна и та же во всех точках плоскости диска. Из соображений симметрии ясно, что поле E в любой точке A геометрической оси (рис. 5) должно быть направлено вдоль этой оси. Заметив это, возьмем в плоскости диска произвольную бесконечно малую площадку dS с зарядом $dq = \sigma dS$. Напряженность поля, создаваемого этим зарядом в точке A, будет $dE = \sigma dS/r^2$, а его проекция на ось OA $dE_x = \sigma dS\cos\alpha/r^2$, или $dE_x = \sigma d\Omega$, где $d\Omega = dS\cos\alpha/r^2$ — телесный угол, под которым площадка dS видна из точки A. Полное поле E найдется

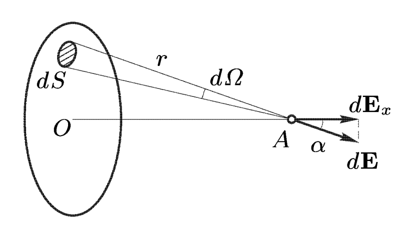


Рис. 5

интегрированием выражения dE_x по телесному углу. Таким путем получаем

$$E = \sigma\Omega, \tag{3.7}$$

где Ω — полный телесный угол, под которым диск виден из точки A. В частности, когда радиус диска бесконечно велик (бесконечная заряженная плоскость),

$$E = 2\pi\sigma. \tag{3.8}$$

3. Один из опытов Кулона, с помощью которого он убедился, что сила притяжения между двумя разноименными точечными зарядами обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, состоял в следующем. В окрестности маленького заряженного шарика подвешивалась на нити небольшая горизонтальная шеллаковая стрелка, на одном конце которой был прикреплен небольшой электрически заряженный кружок из золотой бумаги. Измерялся период малых колебаний стрелки T в зависимости от ее расстояния r до заряженного шарика. Предполагая справедливым закон Кулона, найти зависимость периода колебаний стрелки от указанного расстояния и от других параметров системы. Длина стрелки l очень мала по сравнению с расстоянием r.

Ответ. $T = 2\pi r\sqrt{2I/q_1 q_2 l}$, где q_1 и q_2 — заряды шарика и кружка, а I — момент инерции стрелки.

§ 4. Электрический диполь

1. Простейшей системой точечных зарядов является *электрический диполь* (двойной полюс). Так называется совокупность равных по величине, но противоположных по знаку двух точечных зарядов — q и $+q$, сдвинутых друг относительно друга на некоторое расстояние (рис. 6). Пусть $\mathbf{l}$ — радиус-вектор, проведенный от отрицательного заряда к положительному. Вектор $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ называется *электрическим моментом диполя* или *дипольным моментом*. Если длина l пренебре-

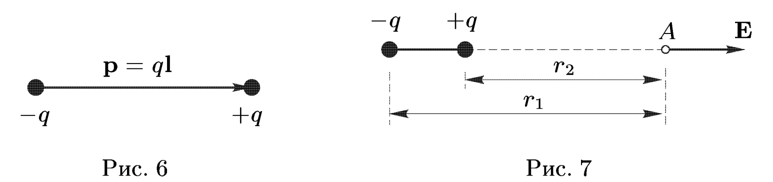


Рис. 6 Рис. 7

жимо мала по сравнению с расстоянием от диполя до точки наблюдения, то диполь называется *точечным*. Вычислим электрическое поле точечного диполя. В окончательных формулах, которые мы получим, безразлично (в пределах принятой точности расчета), от какой точки диполя отсчитывается расстояние r до точки наблюдения.

Рассмотрим сначала случай, когда точка наблюдения A лежит на продолжении оси диполя (рис. 7). Напряженность электрического поля в этой точке будет

$$E = q\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) \approx q\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\right)(r_2 - r_1), \quad \text{или} \quad E = \frac{2ql}{r^3} = \frac{2p}{r^3}.$$

В векторной форме:

$$\mathbf{E} = \frac{2\mathbf{p}}{r^3}. \tag{4.1}$$

Допустим теперь, что точка наблюдения A лежит на перпендикуляре, восстановленном к оси диполя из его центра O (рис. 8). Вектор $\mathbf{E}$ получается геометрическим сложением полей $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$, возбуждаемых точечными зарядами $-q$ и $+q$. Как видно из рисунка, вектор $\mathbf{E}$ антипараллелен $\mathbf{p}$, а его длина (для точечного диполя) равна

$$E = E_1\alpha = \frac{q}{r^2}\frac{l}{r} = \frac{p}{r^3}.$$

В векторной форме:

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{p}}{r^3}. \tag{4.2}$$

Не обязательно, чтобы перпендикуляр AO проходил через центр (точечного) диполя. В принятом приближении формула (4.2) остается верной и тогда, когда за O принята любая точка диполя. Ее можно выбрать даже вне диполя. Важно только, чтобы ее расстояние до центра диполя было пренебрежимо мало по сравнению с расстоянием до точки наблюдения.

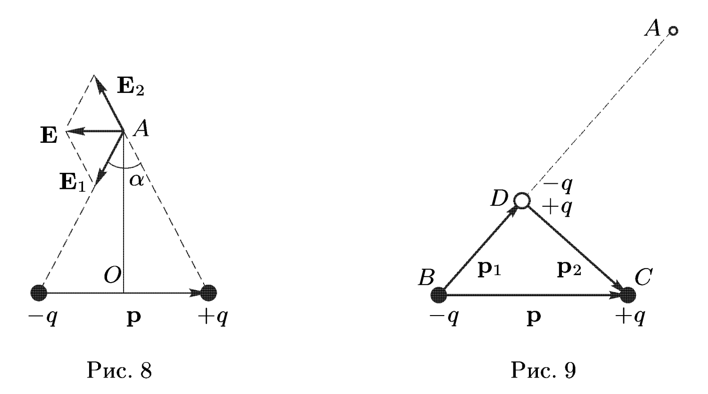


Рис. 8 Рис. 9

Общий случай сводится к разобранным частным случаям. Опустим из заряда $+q$ перпендикуляр CD на линию наблюдения BA (рис. 9). Поместим в точке D два точечных заряда: $+q$ и $-q$. Это не изменит поля. Но полученную систему четырех зарядов можно рассматривать как совокупность двух диполей с дипольными моментами $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$, изображенными на рис. 9. Вообще, при вычислении напряженности поля, а также сил, действующих на диполь, последний всегда можно заменить системой любого числа диполей, геометрическая сумма моментов которых равна моменту рассматриваемого диполя. Применяя теперь к диполям $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ формулы (4.1) и (4.2), получим

$$\mathbf{E} = \frac{1}{r^3}(2\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2),$$

или, исключая $\mathbf{p}_2$ с помощью соотношения $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{r^3}(3\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}),$$

или, наконец,

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{pr})}{r^5}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}. \tag{4.3}$$

2. Рассмотрим теперь силы, действующие на диполь в электрическом поле. Если поле однородно, то результирующая сила $\mathbf{F}$ равна нулю, так как силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, действующие на отрицательный и положительный заряды диполя, равны по модулю и противоположны по направлению (рис. 10). Момент этих сил $\mathbf{M} = [\mathbf{lF}_2] = q[\mathbf{lE}]$, или

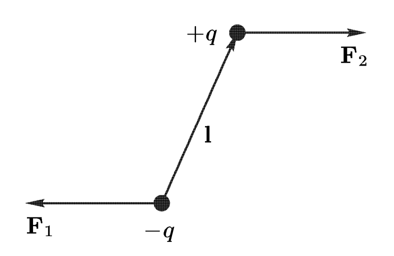


Рис. 10

$$\mathbf{M} = [\mathbf{pE}]. \tag{4.4}$$

Момент $\mathbf{M}$ стремится повернуть ось диполя в направлении поля $\mathbf{E}$. Существуют два положения равновесия диполя: когда диполь параллелен электрическому полю и когда он антипараллелен ему. Первое положение устойчиво, второе — неустойчиво. Формула (4.4) верна также для точечного диполя в неоднородном поле.

Если поле неоднородно, то сила $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, вообще говоря, не обращается в нуль. В этом случае $\mathbf{F} = q(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)$, где $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ — напряженности поля в точках нахождения зарядов $-q$ и $+q$. Для точечного диполя разность $\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1$ можно приближенно заменить дифференциалом

$$d\mathbf{E} = l_x\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + l_y\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + l_z\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}.$$

В этом приближении

$$\mathbf{F} = p_x\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + p_y\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + p_z\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}. \tag{4.5}$$

В целях сокращения письма введем оператор «набла», или оператор Гамильтона (1805–1865):

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{4.6}$$

Скалярным умножением $\mathbf{p}$ на ∇ получаем оператор

$$(\mathbf{p}\nabla) = p_x\frac{\partial}{\partial x} + p_y\frac{\partial}{\partial y} + p_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

С помощью этого оператора формула (4.5) записывается так:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}\nabla)\mathbf{E}. \tag{4.7}$$

Смысл этой формулы раскрывается при сравнении ее с выражением (4.5). В частности, если ось X направить вдоль вектора $\mathbf{p}$ ($p_x = p$, $p_y = p_z = 0$), то

$$\mathbf{F} = p\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}. \tag{4.8}$$

3. Нейтральная система точечных зарядов, занимающая небольшой объем, в первом приближении ведет себя как точечный диполь. Действительно, разделим мысленно заряды системы на более мелкие части, и притом так, чтобы каждому заряду соответствовал равный заряд противоположного знака. Сгруппировав такие заряды попарно, можно рассматривать нашу систему как систему диполей $\mathbf{p}_i$. При вычислении поля на расстояниях, больших по сравнению с размерами системы, такие диполи можно считать точечными. Их можно перенести в одну точку и векторно сложить в один точечный диполь с дипольным моментом $\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i$. Так же можно поступать при вычислении сил, действующих на систему зарядов во внешнем электрическом поле $\mathbf{E}$. Необходимо только, чтобы размеры системы были настолько малы, чтобы во всех точках занимаемого ею объема внешнее поле $\mathbf{E}$ и его пространственные производные $\partial\mathbf{E}/\partial x$, $\partial\mathbf{E}/\partial y$, $\partial\mathbf{E}/\partial z$ могли с достаточной точностью считаться одинаковыми.

Найдем общее выражение для дипольного момента нейтральной системы зарядов. Предполагая сначала, что система указанным выше способом разделена на пары равных зарядов противоположного знака, напишем

$$\mathbf{p} = \sum q_i^+ \mathbf{l}_i = \sum q_i^+ (\mathbf{r}_i^+ - \mathbf{r}_i^-) = \sum (q_i^+ \mathbf{r}_i^+ + q_i^- \mathbf{r}_i^-),$$

где q_i^+, $\mathbf{r}_i^+$ и q_i^-, $\mathbf{r}_i^-$ — величины положительных и отрицательных зарядов и их радиусы-векторы соответственно. Теперь можно снова соединить мысленно разделенные заряды и вернуться к первоначальной системе их. Тогда получится

$$\mathbf{p} = \sum q_i \mathbf{r}_i, \tag{4.9}$$

где суммирование производится уже по всем зарядам первоначальной системы, как положительным, так и отрицательным.

Для электрически нейтральной системы величина суммы (4.9) не зависит от выбора начала координат. Действительно, при переходе к новой (штрихованной) системе координат с другим началом $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор. Поэтому дипольный момент в новой системе координат будет

$$\mathbf{p}' = \sum q_i \mathbf{r}'_i = \sum q_i \mathbf{r}_i + \mathbf{a} \sum q_i.$$

Последнее слагаемое обращается в нуль из-за электрической нейтральности системы, а потому $\mathbf{p}' = \sum q_i \mathbf{r}_i = \mathbf{p}$.

ЗАДАЧИ

1. Найти силу взаимодействия F между точечным зарядом q и точечным диполем $\mathbf{p}$, если расстояние между ними равно r и дипольный момент $\mathbf{p}$ направлен вдоль соединяющей их прямой.

Ответ. $F = 2qp/r^3$. Диполь будет притягиваться к заряду, если он обращен к нему противоположно заряженным концом, и отталкиваться в противном случае.

2. Найти силу взаимодействия F двух точечных диполей $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$, дипольные моменты которых направлены вдоль соединяющей их прямой, а расстояние между диполями равно r.

Ответ. $F = 6p_1p_2/r^4$. Диполи притягиваются, если они обращены друг к другу противоположно заряженными концами, и отталкиваются в противном случае.

3. Найти уравнение силовых линий электрического поля точечного диполя в полярной системе координат.

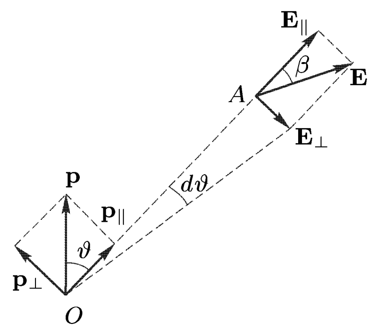


Рис. 11

Решение. Разложим вектор $\mathbf{p}$ (рис. 11) на составляющую $\mathbf{p}_{\|}$ вдоль радиуса $\mathbf{r}$ и составляющую $\mathbf{p}_{\perp}$, к нему перпендикулярную. Соответствующие им поля в точке наблюдения A будут

$$\mathbf{E}_{\|} = \frac{2\mathbf{p}_{\|}}{r^3}, \quad \mathbf{E}_{\perp} = -\frac{\mathbf{p}_{\perp}}{r^3}.$$

Угол β между радиусом $\mathbf{r}$ и электрической силовой линией определится формулой

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{E_{\perp}}{E_{\|}} = \frac{p_{\perp}}{2p_{\|}} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\vartheta.$$

Проекция бесконечно малого участка силовой линии на направление вектора $\mathbf{p}_{\perp}$ может быть, с одной стороны, представлена как $dr\operatorname{tg}\beta = (dr/2)\operatorname{tg}\vartheta$, с другой стороны, как $rd\vartheta$. Поэтому

$$\frac{dr}{2}\operatorname{tg}\vartheta = r\,d\vartheta.$$

Интегрируя это уравнение, получаем искомое уравнение электрической силовой линии:

$$r = r_0\sin^2\vartheta.$$

Постоянная r_0 имеет смысл длины радиуса-вектора $\mathbf{r}$ в экваториальной плоскости, т. е. при $\vartheta = \pi/2$.

4. Возможны ли круговые движения с постоянной скоростью точечного электрического заряда вокруг неподвижного точечного электрического диполя?

Ответ. Да, возможны, и притом на любом расстоянии заряда от диполя. Плоскость круговой орбиты заряда перпендикулярна к оси диполя. Угол α между направлением дипольного момента и радиусом-вектором, проведенным от диполя к движущемуся заряду, определяется выражением $\cos\alpha = \mp\sqrt{1/3}$, где минус относится к положительному заряду, а плюс — к отрицательному.

§ 5. Поток вектора и электростатическая теорема Гаусса

1. Понятие *потока вектора* является одним из важнейших понятий векторного анализа. Оно используется при формулировке важнейших свойств электрического, магнитного и других векторных полей. Первоначально это понятие было введено в гидродинамике. Возьмем в поле скоростей жидкости малую площадку S, перпендикулярную к вектору скорости жидкости $\mathbf{v}$ (рис. 12). Объем жидкости, протекающей через эту площадку за время dt, равен $vS\,dt$. Если площадка наклонена

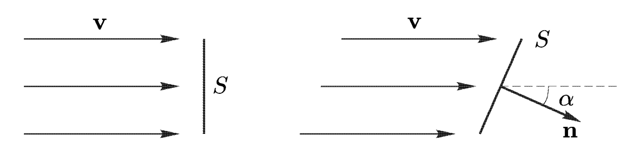


Рис. 12

к потоку, то соответствующий объем будет $vS\cos\alpha\,dt$, где α — угол между вектором скорости $\mathbf{v}$ и нормалью $\mathbf{n}$ к площадке S. Объем жидкости, протекающей через площадку S в единицу времени, получится делением этого выражения на dt. Он равен $vS\cos\alpha$, т. е. скалярному произведению $(\mathbf{vS})$ вектора скорости $\mathbf{v}$ на вектор площадки $\mathbf{S} = S\mathbf{n}$. Единичный вектор $\mathbf{n}$ нормали к площадке S можно провести в двух прямо противоположных направлениях. Одно из них условно принимается за положительное. В этом направлении и проводится нормаль $\mathbf{n}$. Та сторона площадки, из которой исходит нормаль $\mathbf{n}$, называется *внешней*, а та, в которую нормаль $\mathbf{n}$ входит, — *внутренней*. Если поверхность S не бесконечно мала, то при вычислении объема протекающей жидкости ее надо разбить на бесконечно малые площадки dS, а затем вычислить интеграл $\int(\mathbf{v}\,d\mathbf{S})$ по всей поверхности S.

Выражения типа $(\mathbf{v}\,d\mathbf{S})$ или $\int(\mathbf{v}\,d\mathbf{S})$ встречаются в самых разнообразных вопросах физики и математики. Эти выражения имеют смысл независимо от конкретной физической природы вектора $\mathbf{v}$. Они называются *потоком вектора* $\mathbf{v}$ через бесконечно малую площадку dS или конечную поверхность S соответственно. Так, интеграл $\Phi = \int \mathbf{E}\,d\mathbf{S}$ называют потоком вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E}$, хотя с этим понятием и не связано никакое реальное течение.

Допустим, что вектор $\mathbf{E}$ представляется геометрической суммой

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i.$$

Умножив это соотношение скалярно на dS и проинтегрировав, получим

$$\Phi = \sum \Phi_i, \tag{5.1}$$

где Φ_1, Φ_2, ... — потоки векторов $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ ... через ту же самую поверхность. Таким образом, из того факта, что векторы складываются

геометрически, следует, что их потоки через одну и ту же поверхность складываются *алгебраически.*

2. Перейдем теперь к доказательству важнейшей теоремы электростатики — *теоремы Гаусса.* Она определяет поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность S. За положительную нормаль к поверхности S примем *внешнюю нормаль*, т. е. нормаль, направленную наружу (рис. 13). Предположим

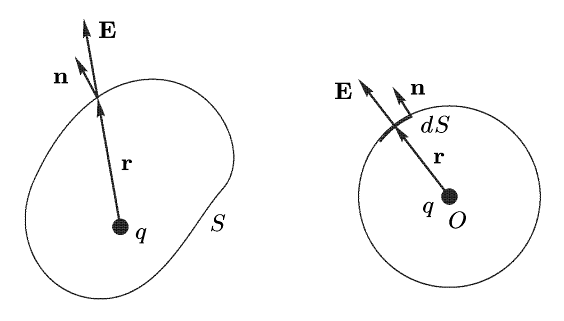


Рис. 13

сначала, что электрическое поле создается единственным точечным зарядом q. На поверхности S поле определяется выражением

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{r^3}. \tag{5.2}$$

Рассмотрим сначала простейший случай, когда поверхность S является сферой, а точечный заряд q помещен в ее центре. Поток вектора $\mathbf{E}$ через элементарную площадку сферы равен

$$d\varPhi = (\mathbf{En})\,dS = \frac{q\,dS}{r^2},$$

а поток через всю сферу $\varPhi = qS/r^2$. Так как поверхность сферы S равна $4\pi r^2$, то

$$\varPhi = 4\pi q. \tag{5.3}$$

Покажем теперь, что результат (5.3) не зависит от формы поверхности S, окружающей заряд q. Возьмем произвольную элементарную площадку dS с установленным на ней положительным направлением нормали $\mathbf{n}$ (рис. 14). Поток вектора $\mathbf{E}$ через эту площадку будет

$$d\varPhi = (\mathbf{En})\,dS = E\,dS\cos\alpha = E\,dS_r,$$

где dS_r — проекция площадки $d\mathbf{S}$ на плоскость, перпендикулярную к радиусу $\mathbf{r}$. Используя выражение (5.2), получим $d\varPhi = q\,dS_r/r^2$. Величина dS_r/r^2 есть телесный угол $d\varOmega$, под которым из точки нахождения заряда q видна площадка dS_r, а следовательно, и площадка dS. Условимся считать его положительным, если площадка dS обращена к q внутренней стороной, и отрицательным в противоположном случае.

Тогда $d\Phi = q\,d\Omega$. Поток Φ через произвольную (вообще говоря, незамкнутую) конечную поверхность S найдется интегрированием этого выражения по $d\Omega$. Так как заряд q не зависит от положения площадки dS, то $\Phi = q\int d\Omega$, или

$$\Phi = q\Omega, \tag{5.4}$$

где Ω — телесный угол, под которым из точки нахождения заряда q видна поверхность S.

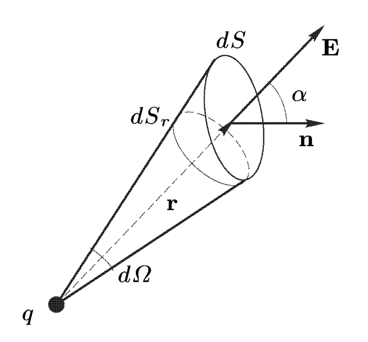


Рис. 14

Если поверхность S замкнутая, то следует различать два случая.

Случай 1. Заряд q лежит внутри пространства, окруженного поверхностью S (рис. 15 *а*). В этом случае телесный угол $d\Omega$ охватывает все направления в пространстве, т. е. равен 4π, а потому формула (5.4) переходит в (5.3). Не имеет значения, сколько раз прямая, исходящая из q, пересекает поверхность S. Допустим, например, что пересечение происходит три раза (рис. 15 *б*). Абсолютные значения телесных углов, под которыми видны элементарные площадки dS_1, dS_2, dS_3, одинаковы. Однако

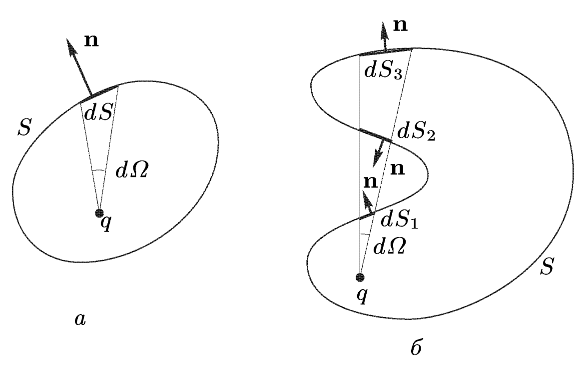


Рис. 15

площадка dS_3 обращена к q внутренней, а dS_2 — внешней сторонами. Сумма телесных углов, под которыми видны эти две площадки, равна нулю. Остается только телесный угол $d\Omega$, под которым видна площадка dS_1. И так будет всегда, когда число пересечений нечетное, т. е. в тех случаях, когда поверхность S окружает заряд q. Нечетное число пересечений при вычислении потока сводится к одному пересечению.

Случай 2. Заряд q лежит вне пространства, окруженного поверхностью S (рис. 16). В этом случае прямая, исходящая из заряда q, либо совсем не пересекает замкнутую поверхность S, либо пересекает ее четное число раз. Поэтому полный телесный угол Ω, а с ним и поток Φ равны нулю.

Случай, когда точечный заряд q лежит точно на поверхности S, физического смысла не имеет. Точечный заряд есть идеализация, пользоваться которой допустимо только в тех случаях, когда линейные размеры заряженного тела малы по сравнению с расстояниями, на которых рассматривается поле этого тела. Если же заряд лежит на поверхности, то точки последней вблизи самого заряда этому условию не удовлетворяют.

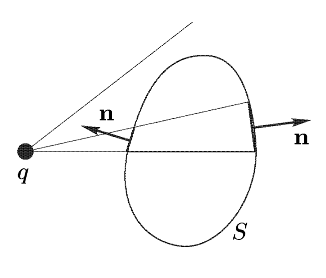


Рис. 16

Допустим, что поле $\mathbf{E}$ является суперпозицией полей $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots$ точечных зарядов $q_1, q_2, \ldots$ По теореме, доказанной выше, поток вектора $\mathbf{E}$ равен сумме потоков векторов $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots$ Если заряд q_i окружен замкнутой поверхностью S, то его поток через эту поверхность будет $4\pi q_i$. Если же заряд лежит во внешнем пространстве по отношению к поверхности S, то его поток равен нулю. В результате получается следующее фундаментальное соотношение:

$$\varPhi \equiv \oint (\mathbf{E}\, d\mathbf{S}) = 4\pi q, \tag{5.5}$$

называемое *электростатической теоремой Гаусса*. Здесь q — алгебраическая сумма всех зарядов, окруженных замкнутой поверхностью S. Заряды, расположенные во внешнем пространстве по отношению к этой поверхности, на величину потока не влияют.

При доказательстве предполагалось, что все заряды точечные. Но это ограничение легко снять, так как всякий заряд можно мысленно разделить на малые части, каждая из которых может рассматриваться как точечный заряд.

3. Возьмем какой-либо произвольный замкнутый контур L и через каждую точку его проведем электрическую силовую линию (рис. 17). Эти линии образуют трубчатую поверхность, называемую *силовой трубкой.* Рассмотрим произвольное поперечное сечение трубки поверхностью S. Положительную нормаль к S проведем в ту же сторону, в какую направлены силовые линии. Пусть $\varPhi$ — поток вектора $\mathbf{E}$ через сечение S. Мы утверждаем, что если внутри трубки нет электрических зарядов, то поток $\varPhi$ остается одним и тем же по всей длине трубки. Для доказательства возьмем другое поперечное сечение трубки S'. Рассмотрим замкнутую поверхность, ограниченную сечениями S и S' и боковой поверхностью трубки. Применим к ней теорему Гаусса. Поток через боковую поверхность равен нулю, так как на поверхности трубки вектор $\mathbf{E}$ касается этой поверхности. Поток через основание S численно равен $\varPhi$, но противоположен по знаку, так

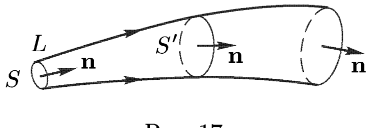


Рис. 17

как внешняя нормаль к замкнутой поверхности направлена противоположно $\mathbf{n}$. Напротив, поток через основание S' равен $+\varPhi'$. Полный поток через рассматриваемую замкнутую поверхность будет $\varPhi' - \varPhi$. По теореме Гаусса тот же поток равен нулю, так как внутри силовой трубки нет электрических зарядов. Таким образом, $\varPhi' = \varPhi$. В частности, если трубка бесконечно узкая, а сечения S и S' нормальны к ней, то

$$ES = E'S'.$$

Получается полная аналогия с течением несжимаемой жидкости. В тех местах, где трубка у́же, поле $\mathbf{E}$ сильнее. В тех местах, где она шире, поле $\mathbf{E}$ слабее. Следовательно, по густоте силовых линий можно судить о напряженности электрического поля (см. § 3, п. 4).

4. Теорема Гаусса есть следствие закона Кулона. Последний по своей форме не отличается от закона всемирного тяготения Ньютона. И тут и там сила взаимодействия меняется обратно пропорционально квадрату расстояния. Поэтому теорема Гаусса справедлива также для гравитационных полей. Роль заряда играет гравитационная масса (умноженная на гравитационную постоянную). Различие состоит только в том, что электрические заряды могут быть и положительными и отрицательными, тогда как гравитационные массы всегда положительны.

§ 6. Применения теоремы Гаусса

Для расчета электрических полей произвольной системы зарядов теоремы Гаусса недостаточно. Это видно уже из того, что теорема Гаусса есть *скалярное соотношение*. А одного скалярного уравнения мало для определения трех неизвестных — составляющих E_x, E_y, E_z вектора $\mathbf{E}$. Необходима известная симметрия задачи, чтобы последняя свелась к решению одного скалярного уравнения. В таких случаях (но и то далеко не всегда) теорема Гаусса может оказаться достаточной для вычисления вектора $\mathbf{E}$. Приведем примеры.

1. Электростатическое поле бесконечной равномерно заряженной плоскости. Поверхностная плотность электричества σ на заряженной плоскости, по предположению, постоянна. Ввиду симметрии вектор $\mathbf{E}$ должен быть перпендикулярен к этой плоскости. Он направлен от плоскости, если она заряжена положительно, и к плоскости, если ее заряд отрицателен. Ввиду той же симметрии длина вектора $\mathbf{E}$ может зависеть только от расстояния до заряженной плоскости, но не может зависеть от того, по какую сторону от нее находится точка наблюдения. Заметив это, построим цилиндр с основаниями, симметрично расположенными по разные стороны плоскости, и с образующими, перпендикулярными к ней (рис. 18). Если S — площадь каждого из оснований, то поток вектора $\mathbf{E}$ через одно основание будет ES, а через оба основания $2ES$. Поток через боковую поверхность цилиндра равен нулю, так как на ней векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{n}$ взаимно перпендикулярны. Поток через всю поверхность цилиндра будет равен поэтому $\Phi = 2ES$.

По теореме Гаусса тот же поток можно представить в виде $\Phi = 4\pi q = 4\pi\sigma S$. Сравнивая оба выражения, находим

$$E = 2\pi\sigma. \tag{6.1}$$

Такой же результат был получен ранее непосредственно из закона Кулона (см. задачу 2 к § 3).

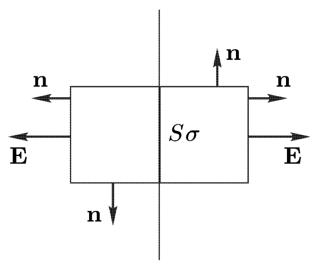


Рис. 18

Напряженность поля бесконечной заряженной плоскости, таким образом, не зависит от расстояния до нее. Плоскость может считаться бесконечной, если расстояние от нее пренебрежимо мало по сравнению с ее размерами. Только на таких расстояниях E не зависит от расстояния до плоскости. На больших расстояниях формула (6.1) неприменима — напряженность поля убывает с расстоянием. Если расстояния порядка размеров самой плоскости, то величина и направление поля в пространстве меняются очень сложно. На расстояниях, очень больших по сравнению с размерами плоскости, заряженная плоскость действует как точечный заряд — поле убывает обратно пропорционально квадрату расстояния.

Отметим еще, что по разные стороны плоскости векторы $\mathbf{E}$ одинаковы по модулю, но противоположны по направлению. Поэтому при переходе через заряженную плоскость напряженность электрического поля меняется скачком на величину $4\pi\sigma$.

2. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскопараллельной пластинки. Пусть $2a$ — толщина пластинки, а ρ — объемная плотность электричества внутри пластинки. По предположению величина ρ постоянна. Начало координат O поместим в средней плоскости пластинки, а ось x направим перпендикулярно к ней (рис. 19). Рассуждая, как в предыдущей задаче, найдем

$$E = \begin{cases} 4\pi\rho x & \text{внутри пластинки,} \\ 4\pi\rho a & \text{вне пластинки.} \end{cases} \tag{6.2}$$

Будем беспредельно уменьшать толщину пластинки, одновременно увеличивая плотность электричества ρ, чтобы величина ρa оставалась постоянной. В пределе получится бесконечная равномерно заряженная плоскость с поверхностной плотностью электричества $\sigma = 2\rho a$, а формула (6.2) перейдет в ранее полученную формулу (6.1).

3. Поле шара, равномерно заряженного по поверхности и объему. Ввиду шаровой симметрии вектор $\mathbf{E}$ параллелен или антипараллелен радиусу-вектору $\mathbf{r}$, проведенному из центра шара в точку наблюдения, а его длина E может зависеть только от расстояния r. Заметив это, проведем вне шара концентрическую с ним сферу S радиуса r (рис. 20 *а*). Поток вектора $\mathbf{E}$ через эту сферу $4\pi r^2 E$ по теореме Гаусса равен $4\pi q$, а потому для напряженности поля вне

шара получаем

$$E = \frac{q}{r^2}, \tag{6.3}$$

независимо от того, заряжен ли шар по объему или по поверхности. Таким образом, *равномерно заряженный шар создает во внешнем пространстве такое поле, как если бы весь заряд был сосредоточен в его центре.* Этот результат остается справедливым при *любом сферически симметричном* распределении заряда по объему шара. Разумеется, он верен и для поля тяготения.

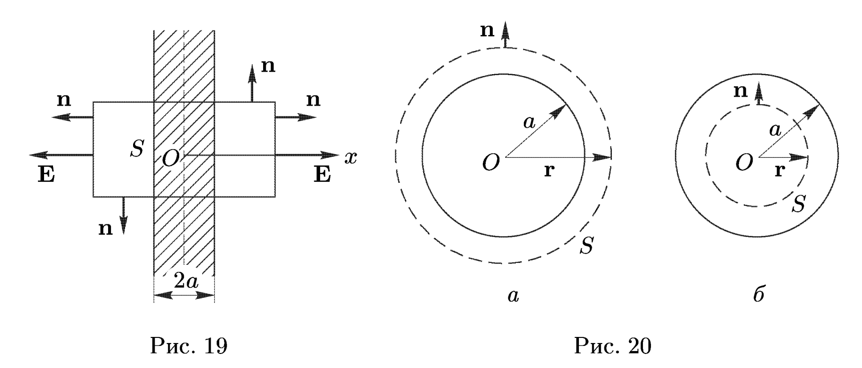


Рис. 19 Рис. 20

Когда радиус шара пренебрежимо мал по сравнению с расстоянием r, мы получаем кулоново поле точечного заряда. Нельзя, однако, сказать, что закон Кулона — следствие теоремы Гаусса. Он получается из нее при дополнительном предположении, что поле неподвижного точечного заряда радиально и обладает шаровой симметрией.

Совершенно так же вычисляется поле внутри шара (рис. 20 *б*). Оно определяется выражением

$$E = \frac{q'}{r^2}, \tag{6.4}$$

где q' — заряд, ограниченный сферой радиуса r. Если заряд равномерно распределен по объему шара, то $q' = q(r/a)^3$. В этом случае

$$E = \frac{qr}{a^3} = \frac{4\pi}{3}\,\rho r. \tag{6.5}$$

Если же заряд равномерно распределен по поверхности шара, то $q' = 0$, а потому также $E = 0$. Таким образом, *электрическое поле внутри сферической полости, равномерно заряженной по поверхности, равно нулю.* Результат остается справедливым и для случая, когда внутри сферической полости зарядов нет, а внешние заряды распределены сферически симметрично.

4. Уясним последний результат непосредственно с помощью закона Кулона. Пусть поверхность сферы равномерно заряжена электричеством. Через произвольную точку A окружаемой ею полости проведем пучок лучей, вырезающий из сферы бесконечно малые площадки s_1

и s_2 (рис. 21). Проекции этих площадок s'_1 и s'_2 на плоскость, перпендикулярную к оси пучка, пропорциональны квадратам расстояний r_1 и r_2. То же справедливо для самих площадок s_1 и s_2 и находящихся на них зарядов q_1 и q_2. Действительно, если через ось пучка и центр сферы O провести плоскость (плоскость рисунка), то углы α_1 и α_2 будут равны между собой и, кроме того, $s'_1 = s_1 \sin\alpha_1$, $s'_2 = s_2 \sin\alpha_2$. Отсюда и следует наше утверждение. Из него получаем $q_1/r_1^2 = q_2/r_2^2$. Значит, кулоновы электрические поля, возбуждаемые в точке A зарядами q_1 и q_2, равны по модулю и противоположны по направлению. Это справедливо для каждой пары зарядов типа q_1 и q_2, на которые можно мысленно разбить всю поверхность заряженной сферы. Поэтому полное электрическое поле должно обращаться в нуль в каждой точке сферической полости.

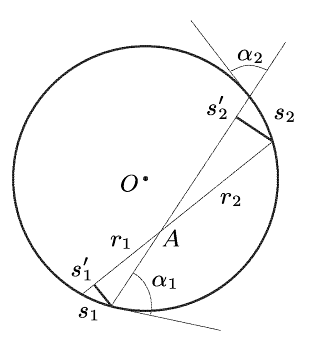


Рис. 21

Мы видим, что теорема об отсутствии электрического поля внутри сферической полости, равномерно заряженной по ее поверхности, является следствием закона Кулона — обратной пропорциональности напряженности поля квадрату расстояния. Если бы поле менялось с расстоянием иначе, то теорема была бы неверна. Поэтому, как заметил Дж. Пристли (1733–1804), экспериментальная проверка этой теоремы может служить подтверждением самого закона Кулона. Такая косвенная проверка может быть выполнена с гораздо большей точностью, чем прямое измерение сил взаимодействия точечных зарядов. Впервые она была произведена в 1774 г. Кавендишем, а затем с большей точностью повторена Максвеллом в 1879 г. Кавендиш и Максвелл представили результаты своих измерений в следующей форме. Если принять, что сила взаимодействия точечных зарядов $F \sim 1/r^n$, то n может отличаться от 2 по измерениям Кавендиша не более чем на $1/50$, а по измерениям Максвелла — не более чем на $1/20\,000$. Опыт с современными средствами измерений был повторен Плимптоном и Лаутоном в 1936 г. Они нашли, что n может отличаться от 2 не более чем на 10^{-9}. Конечно, зависимость типа $F \sim 1/r^n$ может и не соблюдаться. Реальная проблема состоит в нахождении расстояний, с которых начинает нарушаться закон Кулона, а также в установлении истинного закона сил, которым следует заменить закон Кулона на таких расстояниях. В настоящее время закон Кулона подтвержден до расстояний сантиметра или десятков сантиметров с относительной точностью порядка 10^{-9}.

Может показаться, что для достижения столь высокой точности с не меньшей точностью должна быть отшлифована и поверхность заряжаемой сферы, т. е. постоянство радиуса сферы должно быть выдержано с относительной точностью 10^{-9}. При радиусе сферы в 10 см это составляет 10^{-8} см — размер одного атома. С не меньшей точностью, казалось бы, должна оставаться постоянной и плотность электричества на поверхности сферы, а для этого необходимо, чтобы сфера абсолютно

не подвергалась электрическому влиянию со стороны окружающих тел. Ни то, ни другое сделать, конечно, невозможно. Однако заботиться об этом и не надо. Форма полости и наружной поверхности тела не играет роли. В § 11 и 22 будет показано, что поле в полости, окруженной проводящей оболочкой любой формы, строго равно нулю, если только внутри полости нет заряженных тел. Это было бы не так, если бы закон Кулона нарушался.

Есть две области, в которых априори можно ожидать нарушений закона Кулона. Это, во-первых, область расстояний, меньших 10^{-14} см, где нет уверенности в применимости электромагнитной теории вообще. Это, во-вторых, область очень больших расстояний, начиная с географических и больше. Здесь мы также не располагаем непосредственными экспериментальными подтверждениями закона Кулона. Однако если бы закон Кулона нарушался при больших расстояниях, то, согласно современной квантовой электродинамике, квант света (фотон) обладал бы отличной от нуля массой покоя. А это означало бы, что скорость электромагнитных волн в вакууме должна зависеть от длины волны. Отсутствие такой зависимости позволяет сделать вывод, что закон Кулона верен до расстояний, по крайней мере, в несколько километров с относительной точностью 10^{-6}.

5. Поле бесконечной прямой линии и бесконечно длинного цилиндра. Поле бесконечной прямой линии, равномерно заряженной электричеством, направлено радиально — к линии или от нее, в зависимости от знака заряда. На расстоянии r от линии это поле определяется формулой

$$E = 2\varkappa/r, \tag{6.6}$$

где $\varkappa$ — линейная плотность заряда, т. е. заряд, приходящийся на единицу длины линии. Той же формулой определяется поле бесконечно длинного кругового цилиндра, равномерно заряженного по объему или по поверхности, если точка наблюдения находится вне цилиндра. Если цилиндр полый и равномерно заряжен по поверхности, то поле внутри него равно нулю. Если же цилиндр равномерно заряжен по объему, то

$$E = 2\pi\rho r. \tag{6.7}$$

Эти результаты нетрудно получить из теоремы Гаусса.

6. Рассмотрим теперь какую-то поверхность S, заряженную электричеством (рис. 22). Полупространство по одну сторону этой поверхности обозначим индексом *1*, а по другую — индексом *2*. Поверхностная плотность электричества σ может меняться вдоль поверхности S произвольно. Возьмем бесконечно малый цилиндр, основания которого расположены по разные стороны от S. Высота цилиндра должна быть бесконечно мала по сравнению с линейными размерами его оснований. Если площадь основания ΔS, то внутри цилиндра находится электрический заряд $q = \sigma\Delta S$. Сумма потоков вектора $\mathbf{E}$ через основания цилиндра будет $(E_{n_1} + E_{n_2})\Delta S$, поток через боковую поверхность пренебрежимо мал. Приравнивая последнее выражение величине $4\pi\sigma\Delta S$,

получаем

$$E_{n_1} + E_{n_2} = 4\pi\sigma. \tag{6.8}$$

Здесь $\mathbf{n}_1$ означает внешнюю нормаль к поверхности S для полупространства *1*, а $\mathbf{n}_2$ — для полупространства *2*. Формуле (6.8) можно придать другой вид, проведя к поверхности S единую нормаль $\mathbf{n}$. Направим ее от полупространства *1* к полупространству *2*. Тогда

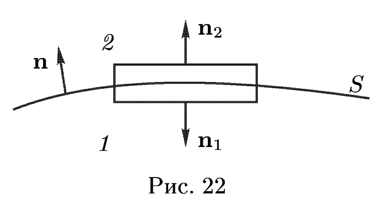


Рис. 22

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma. \tag{6.9}$$

Таким образом, при переходе через заряженную поверхность нормальная составляющая вектора $\mathbf{E}$ претерпевает разрыв, равный $4\pi\sigma$.

Происхождение скачка нормальной составляющей вектора $\mathbf{E}$ полезно уяснить с другой точки зрения. Полное электрическое поле в любой точке пространства складывается из внутреннего поля $\mathbf{E}_{\text{внутр}}$, т. е. поля, создаваемого зарядами самой площадки ΔS, и внешнего поля $\mathbf{E}_{\text{внеш}}$, т. е. поля, возбуждаемого всеми остальными зарядами. При пересечении площадки ΔS внешнее поле меняется непрерывно. Сама же площадка на бесконечно близких расстояниях от нее ведет себя как бесконечная заряженная плоскость. Создаваемое ею поле $\mathbf{E}_{\text{внутр}}$ нормально к площадке и равно $2\pi\sigma$. Однако направления этого поля по разные стороны площадки противоположны. По одну сторону оно увеличивает, а по другую уменьшает нормальную составляющую полного поля, т. е.

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{\text{внеш}} + 2\pi\sigma\mathbf{n}_1, \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{\text{внеш}} + 2\pi\sigma\mathbf{n}_2. \tag{6.10}$$

Таким образом, скачок претерпевает только *внутреннее поле*, тогда как внешнее меняется непрерывно. А так как внутреннее поле не имеет тангенциальной составляющей, то тангенциальная составляющая полного поля меняется также непрерывно:

$$E_{1t} = E_{2t}. \tag{6.11}$$

7. Из формул (6.10) получаем также

$$\mathbf{E}_{\text{внеш}} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2). \tag{6.12}$$

Пользуясь этим выражением, легко рассчитать электрические силы, действующие на заряженную поверхность. На площадку ΔS, очевидно, могут действовать только *внешние заряды*, а не заряды самой площадки. Электрическая сила, отнесенная к единице площади площадки ΔS, будет

$$\mathbf{f} = \sigma\mathbf{E}_{\text{внеш}} = \frac{\sigma}{2}(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2). \tag{6.13}$$

Исключив σ с помощью формулы (6.9), преобразуем этот результат к виду

$$\mathbf{f} = \frac{1}{8\pi}(E_{2n} - E_{1n})(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2). \tag{6.14}$$

В частности, если поле нормально к заряженной поверхности, то

$$\mathbf{f} = \frac{1}{8\pi}(E_2^2 - E_1^2)\mathbf{n}. \tag{6.15}$$

Отсюда видно, что на единицу площади заряженной поверхности действуют силы натяжения $E_1^2/(8\pi)$ и $E_2^2/(8\pi)$, которые тянут ее наружу в противоположных направлениях.

8. Поле двух параллельных разноименно и равномерно заряженных плоскостей. Если плотности зарядов на обеих плоскостях одинаковы по модулю, то будут одинаковы, но противоположно направлены и создаваемые ими поля. Между плоскостями направления полей совпадают, и при их сложении получается поле

$$E = 4\pi\sigma \tag{6.16}$$

(рис. 23). Во внешнем пространстве направления полей противоположны, и результирующее поле равно нулю. К тем же результатам можно прийти с помощью общего соотношения (6.9).

Рис. 23

ЗАДАЧИ

1. Две бесконечные плоскопараллельные металлические пластинки помещены в вакууме параллельно друг другу (рис. 24). Полный заряд на единицу площади (т. е. сумма зарядов на обеих поверхностях пластинки) равен q_1 для первой пластинки и q_2 для второй. Определить поверхностные плотности электрических зарядов на пластинках, а также напряженность электрического поля между ними и во внешнем пространстве.

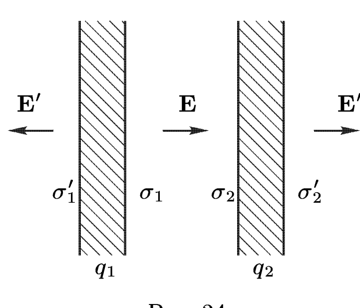


Рис. 24

Ответ. $\sigma_1 = -\sigma_2 = \frac{1}{2}(q_1 - q_2)$; $\sigma_1' = \sigma_2' = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$; $E = 2\pi(q_1 - q_2)$; $E' = 2\pi(q_1 + q_2)$.

2. Проводящая сфера радиуса R составлена из двух полусфер. Определить силу F, с которой отталкиваются эти полусферы, если полный заряд сферы равен Q.

Решение. Согласно формуле (6.15) на единицу поверхности сферы действует выталкивающая сила $\mathbf{f} = Q^2\mathbf{n}/(8\pi R^4)$. Отсюда интегрированием легко получить

$$F = Q^2/(8R^2).$$

3. Как изменится ответ в предыдущей задаче, если в центре сферы поместить дополнительно точечный заряд q? Сферу считать полой и бесконечно тонкой.

Ответ. $F = Q(Q + 2q)/(8R^2)$.

4. Длинный проводящий цилиндр радиуса R разрезан вдоль продольной оси. Определить силу отталкивания F, действующую на единицу длины каждого полуцилиндра, если на единицу длины цилиндра приходится заряд $\varkappa$.

Ответ. $F = \varkappa^2/(\pi R)$.

5. Как изменится ответ в предыдущей задаче, если вдоль оси цилиндра поместить дополнительно тонкую заряженную нить, на единицу длины которой приходится заряд $\varkappa_0$? Цилиндр считать полым, а его стенки — бесконечно тонкими.

Ответ. $F = \varkappa(\varkappa + 2\varkappa_0)/(\pi R)$.

§ 7. Дифференциальная форма электростатической теоремы Гаусса

1. Соотношение (5.5) выражает теорему Гаусса *в интегральной форме*. Придадим теперь этой теореме *дифференциальную форму*. Назовем *объемной плотностью электричества* ρ количество электричества, отнесенное к единице объема. Тогда заряд в элементе объема dV представится выражением $dq = \rho\, dV$. Будем предполагать, что величина ρ является непрерывной функцией пространственных координат. Представление о непрерывном распределении электричества в пространстве является такой же идеализацией, как и представление о непрерывном распределении вещества. Такими представлениями широко пользуются в макроскопической физике.

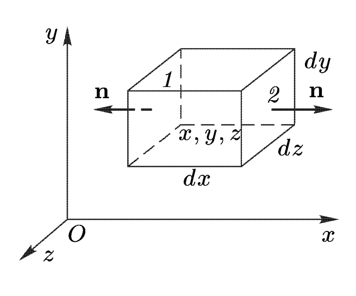


Рис. 25

Возьмем в пространстве бесконечно малый прямоугольный параллелепипед со сторонами dx, dy, dz, параллельными координатным осям прямоугольной системы координат (рис. 25). На грани *1* внешняя нормаль направлена в отрицательную сторону оси x. Поэтому поток вектора $\mathbf{E}$ через эту грань будет $-E_x(x)\,dy\,dz$. На противоположной грани *2*, наоборот, направление внешней нормали совпадает с положительным направлением оси x, и для потока через эту грань следует писать $+E_x(x + dx)\,dy\,dz$. Сумма обоих потоков будет

$$[E_x(x + dx) - E_x(x)]\,dy\,dz = \frac{\partial E_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \frac{\partial E_x}{\partial x}\,dV,$$

где $dV \equiv dx\,dy\,dz$ — объем параллелепипеда. Аналогично найдутся потоки через две пары остальных граней. Полный поток через всю поверхность параллелепипеда:

$$d\varPhi = \operatorname{div} \mathbf{E}\, dV, \tag{7.1}$$

где введено обозначение

$$\operatorname{div} \mathbf{E} \equiv \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \tag{7.2}$$

По теореме Гаусса тот же поток равен $4\pi q = 4\pi \rho \, dV$. Приравнивая оба выражения, получим

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho. \tag{7.3}$$

Эта формула и выражает электростатическую теорему Гаусса в дифференциальной форме.

Величина, определяемая выражением (7.2), сохраняет смысл независимо от конкретной физической или геометрической природы вектора **E**. Она называется *дивергенцией* вектора **E**. С дивергенцией приходится встречаться в самых разнообразных вопросах математики и физики, чем и оправдывается введение этого математического понятия.

2. Теорема Гаусса в дифференциальной форме (7.3) является следствием той же теоремы в интегральной форме (5.5). Обращая порядок рассуждений, легко убедиться, что из дифференциальной формы теоремы Гаусса можно получить интегральную. Обе формы математически эквивалентны. Правда, дифференциальная форма имеет смысл лишь в том случае, когда электричество распределено в пространстве с конечной плотностью ρ. Если ρ обращается в бесконечность в отдельных точках, на линиях или поверхностях, то дифференциальная форма становится неприменимой [1], тогда как интегральная форма (5.5) применима и в таких случаях. В этом смысле интегральная форма обладает большей математической общностью, чем дифференциальная. Однако разрывные распределения электричества с бесконечно большими значениями ρ являются математическими абстракциями и в физике должны рассматриваться как предельные случаи непрерывных распределений с всюду конечными значениями ρ. Если это иметь в виду, то можно утверждать, что *интегральная и дифференциальная формы теоремы Гаусса полностью эквивалентны.*

3. В электростатике теорема Гаусса является не более как одним из следствий закона Кулона. Но мы не можем ограничиться электростатикой. Наша задача значительно шире. Мы должны путем обобщения опытных фактов отыскать общие уравнения и законы, применимые не только в электростатике, но и во всей электродинамике. В качестве руководящего принципа при отыскании таких законов можно выставить требование, чтобы они были законами *теории поля*, исключающими мгновенное действие на расстоянии. Закон Кулона этому требованию не удовлетворяет. Он может быть справедлив только в электростатике. Однако следствия, выводимые из него, могут иметь и более широкую область применимости. К числу таких

---

[1] С использованием так называемых *обобщенных функций* дифференциальную форму теоремы Гаусса можно распространить и на эти случаи.

следствий и относится теорема Гаусса. Она не противоречит теории поля с ее представлением о конечной скорости распространения взаимодействий. Записанная в дифференциальной форме, теорема Гаусса не содержит никаких намеков на дальнодействующий характер сил. Она является *локальной теоремой*, т. е. связывает различные физические величины (ρ и $\operatorname{div} \mathbf{E}$) в одной и той же точке пространства. Законы теории поля не обязательно должны быть локальными. Однако все локальные законы совместимы с основным представлением этой теории о передаче взаимодействий посредством полей. С другой стороны, закон Кулона только достаточен, но не необходим для доказательства теоремы Гаусса. Поэтому естественно ввести гипотезу, что *теорема Гаусса верна не только в электростатике, но и в электродинамике*, имеющей дело с переменными во времени электромагнитными полями. Верна эта гипотеза или нет — на этот вопрос может дать ответ только опыт. Вся совокупность опытных фактов говорит в пользу этой гипотезы. Поэтому она и была принята в физике. Тем самым уравнение (7.3) и математически эквивалентное ему уравнение (5.5) перестают быть скромными следствиями закона Кулона, а возводятся в ранг *основных постулатов* теории электричества. Они входят в систему основных уравнений Максвелла.

Теорема Гаусса в интегральной форме (5.5) устанавливает связь между физическими величинами в сколь угодно удаленных точках пространства в один и тот же момент времени. Поэтому может показаться, что ее справедливость связана с предположением о мгновенном действии на расстоянии. Возможность представления теоремы Гаусса в дифференциальной форме показывает, что это не так. Формула (5.5) утверждает только, что с электрическим зарядом q всегда связано какое-то электрическое поле. Поле неограниченно долго покоящегося заряда кулоново на любых расстояниях. Но если заряд движется, то это уже не так. Например, ускоренно движущийся заряд излучает электромагнитные волны. Однако поток вектора $\mathbf{E}$ через любую замкнутую поверхность, окружающую одни и те же заряды, не зависит от формы и положения этой поверхности, а также от характера движения зарядов.

ЗАДАЧА

Получить формулы (6.1)–(6.3), (6.5)–(6.7), пользуясь теоремой Гаусса в дифференциальной форме.

Решение. В качестве примера получим формулу (6.5). Ввиду шаровой симметрии

$$\mathbf{E} = E(r)\frac{\mathbf{r}}{r},$$

или в координатной форме

$$E_x = E(r)\frac{x}{r}, \quad E_y = E(r)\frac{y}{r}, \quad E_z = E(r)\frac{z}{r}.$$

Дифференцируя E_x и учитывая, что $\partial r/\partial x = x/r$ (последнее получается дифференцированием равенства $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$), находим

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{dE}{dr}\,\frac{x^2}{r^2} - \frac{E}{r^3}\,x^2 + \frac{E}{r}.$$

Написав аналогичные соотношения для производных $\partial E_y/\partial y$ и $\partial E_z/\partial z$ и сложив их, получим

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{dE}{dr} + \frac{2E}{r} = \frac{1}{r^2}\,\frac{d}{dr}\,(r^2 E). \tag{7.4}$$

Внутри шара

$$\frac{1}{r^2}\,\frac{d}{dr}\,(r^2 E) = 4\pi\rho,$$

откуда

$$E = \frac{4\pi}{3}\,\rho r + \frac{C}{r^2}.$$

Постоянная C должна равняться нулю, так как напряженность поля E в центре шара конечна, как это ясно из физических соображений. Аналогично найдем выражение для напряженности поля вне шара.

Обратим внимание на формулу (7.4). Она дает выражение для дивергенции любого вектора, когда этот вектор направлен радиально и зависит только от расстояния до начала координат (сферическая симметрия).

§ 8. Математическое дополнение. Формула Гаусса–Остроградского

1. В различных вопросах теории электричества и других разделов теоретической физики часто применяется математическая формула, с помощью которой поток вектора через произвольную замкнутую поверхность выражается через объемный интеграл по области, ограниченной этой поверхностью. Приведем вывод этой формулы, хотя в большинстве случаев мы и будем избегать пользоваться ею. Пусть $f(x, y, z)$ — некоторая функция, а S — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V (рис. 26). На отрезке *12*, параллельном оси x, f является функцией одного аргумента x. Интегрируя вдоль этого отрезка, получим

$$\int\limits_{12} \frac{\partial f}{\partial x}\,dx = f_2 - f_1,$$

где f_1 и f_2 — значения функции f на концах рассматриваемого отрезка. Построим теперь бесконечно узкий цилиндр, одной из образующих которого является отрезок *12*. Пусть $d\sigma$ — площадь его поперечного сечения (величина существенно положительная). Умножим предыдущее соотношение на $d\sigma$. Так как $d\sigma\,dx$ есть элементарный объем dV, заштрихованный

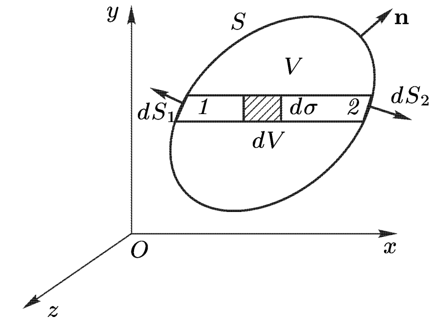


Рис. 26

на рисунке, то в результате получится

$$\int\limits_{\Delta V} \frac{\partial f}{\partial x}\,dV = d\sigma(f_2 - f_1),$$

где ΔV — часть объема V, вырезаемого из него поверхностью цилиндра. Пусть dS_1 и dS_2 — элементарные площадки, вырезаемые тем же цилиндром на поверхности S, а $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ — единичные нормали к ним, проведенные наружу от поверхности S. Тогда $d\sigma = dS_2 \cdot n_{2x} = -dS_1 \cdot n_{1x}$, а потому

$$\int\limits_{\Delta V} \frac{\partial f}{\partial x}\,dV = f_1 n_{1x}\,dS_1 + f_2 n_{2x}\,dS_2,$$

или, короче,

$$\int\limits_{\Delta V} \frac{\partial f}{\partial x}\,dV = \int\limits_{dS_1 + dS_2} f n_x\,dS,$$

где поверхностный интеграл распространен по сумме площадок dS_1 и dS_2. Весь объем V можно разделить на элементарные цилиндры рассматриваемого вида и написать для каждого из них такие же соотношения. Суммируя эти соотношения, получим

$$\int\limits_{V} \frac{\partial f}{\partial x}\,dV = \oint\limits_{S} f n_x\,dS. \tag{8.1}$$

Интеграл слева распространен по всему объему V, справа — по поверхности S, ограничивающей этот объем. Аналогичные соотношения можно написать для осей y и z.

Возьмем теперь произвольный вектор $\mathbf{A}$ и применим к его компонентам соотношение (8.1). Получим

$$\int\limits_{V} \frac{\partial A_x}{\partial x}\,dV = \oint\limits_{S} A_x n_x\,dS,$$

и аналогично для компонент A_y и A_z. Складывая эти соотношения, найдем

$$\int\limits_{V} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dV = \oint\limits_{S} (A_x n_x + A_y n_y + A_z n_z)\,dS,$$

или

$$\int\limits_{V} \operatorname{div} \mathbf{A}\,dV = \oint\limits_{S} (\mathbf{A}\mathbf{n})\,dS. \tag{8.2}$$

Это и есть *формула Гаусса–Остроградского.* Ее можно также записать в виде

$$\int\limits_{V} \operatorname{div} \mathbf{A}\,dV = \oint\limits_{S} (\mathbf{A}\,d\mathbf{S}). \tag{8.3}$$

2. Если объем V бесконечно мал, то величина $\operatorname{div} \mathbf{A}$ внутри него может считаться постоянной. Вынося ее за знак интеграла и переходя к пределу $V \to 0$, получим

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint\limits_{S} (\mathbf{A}\,d\mathbf{S}). \tag{8.4}$$

Предельный переход надо понимать в том смысле, что область V должна стягиваться в точку, т. е. размеры этой области должны беспредельно уменьшаться по всем направлениям. Наши рассуждения показывают, что величина, стоящая в правой части (8.4), не зависит от формы поверхности S, стягиваемой в точку. Поэтому выражение (8.4) можно было бы принять за исходное определение дивергенции, как это часто и делается. Такое определение обладает тем преимуществом, что оно *инвариантно*, т. е. никак не связано с выбором системы координат.

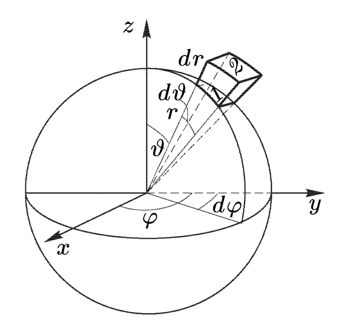


Рис. 27

На формуле (8.4) основан наиболее простой и общий способ вычисления дивергенции в различных системах координат. Вычислим, например, $\operatorname{div}\mathbf{A}$ в сферической системе координат r, ϑ, φ (рис. 27). Рассмотрим бесконечно малый «кубик», ограниченный плоскостями $r = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$. Сумма потоков вектора $\mathbf{A}$ через противоположные грани кубика *1* и *2* будет

$$d_1\Phi = -A_r(r)dS_1 + A_r(r+dr)dS_2 = \frac{\partial}{\partial r}(A_r dS)\,dr.$$

Подставляя сюда $dS = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$, получим

$$d_1\Phi = \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(r^2 A_r)\,dV,$$

где $dV = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$ — объем рассматриваемого «кубика». Аналогично находятся потоки через остальные две пары противоположных граней, а затем и выражение для дивергенции:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta A_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}. \tag{8.5}$$

Если вектор $\mathbf{A}$ направлен по $\mathbf{r}$ и зависит только от расстояния r, то это выражение переходит в (7.4).

Приведем другой пример на применение формулы Гаусса–Остроградского. Согласно (5.5) $\oint \mathbf{E}\,d\mathbf{S} = 4\pi q$, или для бесконечно малого объема $\oint \mathbf{E}\,d\mathbf{S} = 4\pi\rho V$. Подставив это значение в (8.4), получим $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$, т. е. теорему Гаусса в дифференциальной форме.

ЗАДАЧА

Электрическое поле в электростатике всегда перпендикулярно к поверхности проводника (см. § 11, п. 4). Пользуясь этим, доказать, что вблизи искривленной поверхности заряженного проводника электрическое поле удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial E}{\partial n} = -E\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \tag{8.6}$$

где производная берется по направлению внешней нормали к поверхности проводника, а R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны этой поверхности (они считаются положительными для выпуклых и отрицательными для вогнутых сечений поверхности).

§ 9. Теорема Ирншоу

1. Для равновесия системы точечных электрических зарядов необходимо и достаточно, чтобы сила, действующая на каждый заряд, обращалась в нуль. Примером, где это условие соблюдается, может служить система двух одинаковых точечных зарядов q и q, посередине между которыми помещен заряд противоположного знака $-q/4$ (рис. 28). Другие примеры приводятся в задаче к этому параграфу. На вопрос об устойчивости такого равновесия дает ответ *теорема Ирншоу*. Согласно этой теореме *всякая равновесная конфигурация покоящихся точечных электрических зарядов неустойчива, если на них, кроме кулоновских сил притяжения и отталкивания, никакие другие силы не действуют.*

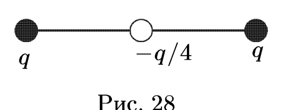


Рис. 28

Теорема Ирншоу является следствием теоремы Гаусса. Допустим, что какая-то система неподвижных точечных зарядов находится в устойчивом равновесии. Рассмотрим произвольный заряд q этой системы, находящейся в равновесии в положении A (рис. 29). Предположим для определенности, что заряд q положителен (в случае отрицательного заряда доказательство аналогично). Если заряд q сместится в бесконечно близкую точку A', то ввиду предположенной устойчивости равновесия должна возникнуть сила, направленная к точке A и стремящаяся вернуть заряд снова в ту же точку. Пусть $\mathbf{E}$ — электрическое поле, создаваемое всеми зарядами, за исключением заряда q. В точке A' оно должно быть направлено к A, каково бы ни было направление смещения AA'. Окружим заряд q произвольной замкнутой поверхностью S и притом такой, чтобы все прочие заряды были расположены во внешнем пространстве по отношению к этой поверхности. На поверхности S поле $\mathbf{E}$ направлено к точке A, а потому поток вектора $\mathbf{E}$ через поверхность S отрицателен. Но это противоречит теореме Гаусса. Последняя требует, чтобы указанный поток был равен нулю, поскольку он создается зарядами, расположенными вне S. Получившееся противоречие и доказывает теорему Ирншоу.

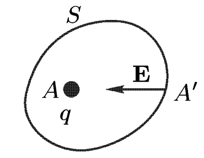


Рис. 29

Если помимо электрических сил в системе действуют какие-либо другие силы, то равновесие может оказаться устойчивым. Возьмем, например, три одинаковых и одинаково заряженных шарика. Два из них закрепим на концах цилиндрической трубки из изолятора, а третий поместим посередине между ними (рис. 30). Пусть средний шарик может скользить внутри трубки без трения. Тогда в среднем положении он будет находиться в устойчивом равновесии.

2. Теорема Гаусса справедлива и для гравитационных полей. Однако в этом случае все силы являются *силами притяжения.* Равновесных

конфигураций материальных точек, притягивающихся по закону всемирного тяготения Ньютона, не существует, и теорема Ирншоу лишена содержания. Это очевидно для системы из двух материальных точек. Если в некоторый момент времени обе точки находятся в покое, то силы притяжения между ними приведут их в движение, пока обе точки не сольются в одном месте. Рассмотрим теперь произвольное число материальных точек (рис. 31). В любой момент времени в системе можно найти такую крайнюю точку A, что все прочие материальные

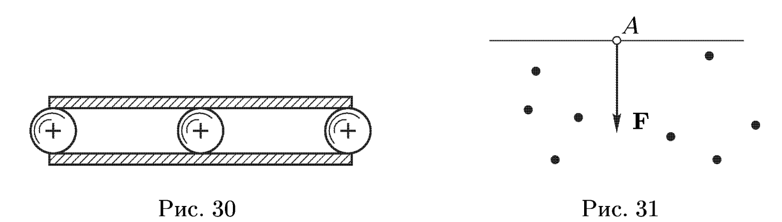


Рис. 30 Рис. 31

точки окажутся расположенными по одну сторону какой-то плоскости, проходящей через A. Сила $\mathbf{F}$, действующая на A, будет направлена в сторону пространства, в котором расположены эти материальные точки. Если точка A в рассматриваемый момент времени находится в покое, то под действием силы $\mathbf{F}$ она придет в движение, т. е. равновесие будет нарушено. Возможность равновесных конфигураций неподвижных электрических зарядов связана с тем, что имеются заряды обоих знаков, встречаются как силы притяжения, так и силы отталкивания.

3. Атомы химических элементов состоят из положительно заряженных атомных ядер и окружающих их отрицательно заряженных электронов. Размеры атомов порядка 10^{-8} см. Размеры атомных ядер и электронов примерно в 10^5 раз меньше, т. е. пренебрежимо малы по сравнению с размерами атомов. Таким образом, атом с большой точностью может рассматриваться как система, состоящая из точечных электрически заряженных частиц. К такой системе применима теорема Ирншоу. Атомы, несомненно, являются устойчивыми системами. Поэтому электроны и атомные ядра, из которых они состоят, не могут находиться в покое. Для объяснения *устойчивости* атомных систем в классической физике была введена *планетарная модель атома.* По этой модели электроны вращаются вокруг ядра подобно планетам, вращающимся вокруг Солнца. Однако планетарная модель атома оказалась также неустойчивой. Электрон, вращающийся вокруг ядра, движется ускоренно. А по законам классической электродинамики *ускоренно движущийся заряд излучает электромагнитные волны.* Непрерывно растрачивая энергию на излучение, вращающийся электрон в конце концов должен был бы упасть на ядро. Классическая физика оказалась неспособной объяснить устойчивость атома. Объяснение было дано только квантовой механикой.

ЗАДАЧА

Одинаковые (по величине и по знаку) точечные заряды помещены в вершинах правильного 1) треугольника; 2) четырехугольника; 3) шестиугольника. Какой заряд q противоположного знака надо поместить в центре системы, чтобы она находилась в равновесии?

Ответ. 1) $Q = -q/\sqrt{3}$; 2) $Q = -(1/2)(\sqrt{2} + 1/2)q$; 3) $Q = -(5/4 + 1/\sqrt{3})q$.

§ 10. Электрическое поле в веществе

1. Размеры атомных ядер и электронов примерно в сто тысяч раз меньше размеров самих атомов. На долю заряженных частиц приходится ничтожная (примерно 10^{-15}) часть занимаемого телом пространства. Весь остальной объем тела составляет вакуум. Атомные ядра и электроны возбуждают в нем электромагнитные поля. Поле в промежутках между атомами и электронами, а также внутри этих частиц необычайно сложно меняется в пространстве и во времени. Такое поле называется *микроскопическим*, или, короче, *микрополем*. Столь же сложно меняется плотность распределения электричества. Она очень велика внутри атомных ядер и электронов и обращается в нуль в промежутках между ними. Такая плотность также называется *микроскопической*, или *микроплотностью*. Микроскопические величины обозначаются посредством $K_{\text{микро}}$, $\rho_{\text{микро}}$ и т. п. Их нельзя измерить путем внесения в вещество пробного заряда. Наименьшим зарядом является элементарный заряд e (заряд электрона). А такой заряд существенно исказил бы микрополе и распределение электричества в атомной системе. Таким образом, введение $\mathbf{E}_{\text{микро}}$, $\rho_{\text{микро}}$ и прочих микроскопических величин встречает определенную трудность принципиального порядка. Можно поставить под сомнение принципиальную возможность самого описания поля с помощью микроскопических величин типа $\mathbf{E}_{\text{микро}}$, $\rho_{\text{микро}}$ и т. п. Тем не менее классическая физика допускает такую возможность. Х.А. Лоренц показал, как, исходя из представления о микрополе, можно прийти к уравнениям для описания *макроскопических процессов* в телах. Такой подход к макроскопическим уравнениям электродинамики принят и в настоящем руководстве. Разумеется, справедливость макроскопических уравнений электродинамики еще не означает, что полностью верна и та микрокартина, которая была положена в основу вывода этих уравнений.

2. Задание микроскопических величин в каждой точке пространства и в каждый момент времени дало бы наиболее детальное классическое описание поля. Однако практически (а может быть, и принципиально) оно неосуществимо. Для многих целей достаточно более простое и несравненно более грубое описание, которым пользуется макроскопическая электродинамика. Она отвлекается от атомистического строения электричества и связанных с ним мелкомасштабных изменений поля, происходящих на ядерных и атомных расстояниях. Она принимает во внимание только изменения поля на макроскопических

расстояниях. Она оперирует со сглаженными полями и распределениями электричества, плавно меняющимися в пространстве и во времени. Такие поля называются *средними*, или *макроскопическими полями* (короче, *макрополями*). Напряженность электрического макрополя будем обозначать посредством $\mathbf{E}_{\text{микро}}$, или, короче, $\mathbf{E}$.

Описание поля в веществе посредством величин типа $\mathbf{E}_{\text{микро}}$, $\rho_{\text{микро}}$ и т. д. аналогично детальному механическому описанию движения вещества, в котором указывается положение и скорость каждой молекулы и составляющих ее частиц в любой момент времени. Описание с помощью макроскопических величин, напротив, аналогично гидродинамическому рассмотрению движения жидкости как сплошной среды. При таком рассмотрении распределение вещества в пространстве характеризуется его объемной плотностью, а движение — скоростью гидродинамического потока $\mathbf{v}$ как непрерывными функциями времени и пространственных координат. Молекулярные силы учитываются также суммарно — посредством внутренних давлений и касательных напряжений, возникающих при движении жидкости.

Дадим теперь более точное количественное определение макроскопического поля $\mathbf{E}$. Под $\mathbf{E}$ мы будем понимать микрополе $\mathbf{E}_{\text{микро}}$, усредненное по физически бесконечно малым объемам пространства. Чтобы вычислить макроскопическое поле $\mathbf{E}$ в какой-либо точке пространства, надо взять физически бесконечно малый объем V, внутри которого находится эта точка, проинтегрировать вектор $\mathbf{E}_{\text{микро}}$ по этому объему и значение интеграла разделить на объем V:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{V}\int_V \mathbf{E}_{\text{микро}}\, dV. \tag{10.1}$$

Так же определяется макроскопическая плотность $\overline{\rho} = \langle \rho_{\text{микро}} \rangle$ и любая другая макроскопическая величина. Результат вычисления практически не должен зависеть от величины и формы объема V. Для этого необходимо, чтобы внутри объема V содержалось еще очень много атомов. В то же время объем V должен быть настолько малым, чтобы с ним, а также с любыми линейными размерами его можно было обращаться, как с математическими дифференциалами. Объемы V, удовлетворяющие обоим этим условиям, и называются *физически бесконечно малыми*. Усреднение по таким объемам в смысле операции (10.1) сглаживает все нерегулярные и быстро меняющиеся вариации микрополя на расстояниях порядка атомных, но сохраняет плавные изменения его на макроскопических расстояниях.

3. Уравнения макроскопического поля могут быть получены из уравнений для микроскопического поля. Если те и другие уравнения представить в дифференциальной форме, то возникает вопрос: как связаны между собой производные обоих полей? На этот вопрос отвечает математическая формула

$$\frac{\partial \langle A \rangle}{\partial x} = \left\langle \frac{\partial A}{\partial x} \right\rangle. \tag{10.2}$$

Она утверждает, что усреднение и дифференцирование по координате можно переставлять местами. То же справедливо и для дифференцирования по времени. Для доказательства запишем формулу типа (10.1) более подробно:

$$\langle A(\mathbf{r})\rangle = \frac{1}{V}\int A(\mathbf{r}')\,dV'. \qquad (10.3)$$

В соседней точке

$$\langle A(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})\rangle = \frac{1}{V}\int A(\mathbf{r}'+\Delta\mathbf{r}')\,dV'.$$

Поскольку результат усреднения не зависит от величины и формы области интегрирования, последнюю мы выбрали одинаковой в обоих случаях. Элементы объема также можно выбрать одинаковыми. Тогда

$$\langle A(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})\rangle - \langle A(\mathbf{r})\rangle = \frac{1}{V}\int\limits_V [A(\mathbf{r}'+\Delta\mathbf{r}) - A(\mathbf{r}')]\,dV'.$$

Выберем теперь вектор $\Delta\mathbf{r}$ так, чтобы он был параллелен оси X, т. е. положим $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{i}\Delta x$. Разделив последнее соотношение на Δx и перейдя к пределу $\Delta x \to 0$, получим

$$\frac{\partial\langle A\rangle}{\partial x} = \frac{1}{V}\int\limits_V \frac{\partial A(\mathbf{r}')}{\partial x'}\,dV',$$

а это и есть формула (10.2). Аналогично, дифференцируя выражение (10.3) по времени как параметру, найдем

$$\frac{\partial\langle A\rangle}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle. \qquad (10.4)$$

Примем теперь, что для микроскопического поля справедлива теорема Гаусса в виде

$$\operatorname{div}\mathbf{E}_{\text{микро}} = 4\pi\rho_{\text{микро}}. \qquad (10.5)$$

Усредняя это соотношение и принимая во внимание, что $\langle\operatorname{div}\mathbf{E}_{\text{микро}}\rangle =$ $= \operatorname{div}\langle\mathbf{E}_{\text{микро}}\rangle \equiv \operatorname{div}\mathbf{E}$, получим

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\overline{\rho}, \qquad (10.6)$$

где $\overline{\rho}$ — средняя (макроскопическая) плотность электричества в веществе, т. е. $\overline{\rho} = \langle\rho_{\text{микро}}\rangle$. Это — *дифференциальная форма теоремы Гаусса в веществе.* Она справедлива не только в электростатике, но и во всей макроскопической электродинамике.

4. При рассмотрении электрических явлений в веществе очень важно иметь правильное представление о порядке величин сил, действующих между протонами и электронами. Эти силы очень велики по сравнению с гравитационными силами притяжения между теми же частицами. Вычислим, например, отношение силы электрического

отталкивания двух протонов F_e к силе их гравитационного притяжения F_g. Заряд протона $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ СГСЭ-ед. заряда, масса $m_\text{p} = 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ г. Используя эти данные, найдем

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{e^2}{Gm_\text{p}^2} = 1{,}24 \cdot 10^{36},$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ дин $\cdot$ см^2/г^2 — гравитационная постоянная. Значение этого отношения не зависит от расстояния между взаимодействующими частицами, так как обе силы F_e и F_g меняются обратно пропорционально квадрату этого расстояния. Масса электрона $m_\text{e} = 9{,}11 \cdot 10^{-28}$ г, т. е. в 1836 раз меньше массы протона. Поэтому для электронов отношение рассматриваемых сил в 1836^2 раз больше и составляет $4{,}17 \cdot 10^{42}$.

Что было бы, если бы Земля потеряла все свои электроны? Число протонов в Земле практически равно числу нейтронов. Поэтому каждый протон отталкивался бы от Земли с силой, превышающей его собственный вес приблизительно в $(1{,}24/2) \cdot 10^{36} = 0{,}62 \cdot 10^{36}$ раз. Эта сила равна весу груза в миллион тонн! Столь чудовищно большие силы не проявляются только потому, что в обычных условиях тела *электрически нейтральны.* Положительные заряды атомных ядер почти полностью скомпенсированы отрицательными зарядами электронов. При электризации тел нарушения такой компенсации ничтожны. Допустим, например, что шарику с радиусом $a = 1$ см сообщен заряд $q = 100$ СГСЭ-ед. $= (1/3) \cdot 10^{-7}$ Кл. Это довольно большой заряд. (Напряженность поля у поверхности шарика составит $E = q/a^2 = 100$ СГСЭ-ед. $= 30\,000$ В/см. А при разности потенциалов 30 000 В между металлическими шариками такого размера в сухом воздухе проскакивает электрическая искра, если расстояние между ними 1 см и шарики находятся в воздухе при нормальных давлении и температуре.) Если заряд q положителен, то для такой электризации от шарика надо отнять $n_\text{e} = q/e \approx 2 \cdot 10^{11}$ электронов. Пусть масса шарика $M = 30$ г. Тогда сумма содержащихся в нем протонов и нейтронов будет

$$N_\text{p} + N_\text{n} = \frac{M}{m_\text{p}} = \frac{30}{1{,}67 \cdot 10^{-24}} \approx 2 \cdot 10^{25}.$$

Превышение протонов над электронами ничтожно и составляет всего $n_\text{e}/n_\text{p} \sim 10^{-14}$ от общего числа протонов. Уменьшение массы шарика из-за электризации составляет $n_\text{e} m_\text{e} \approx 2 \cdot 10^{-16}$ г, т. е. примерно 10^{-17} массы самого шарика. Такое уменьшение массы не может быть обнаружено даже на самых чувствительных весах. Допустим теперь, что при электризации электроны были удалены от поверхностного слоя шарика. Оценим его толщину δ. Общее число протонов и нейтронов в слое будет n_e, а масса слоя $\Delta M \sim n_\text{e} m_\text{p} \sim 10^{-13}$ г. Так как $\Delta M/M = 3\delta/a$, то получаем $\delta \sim 10^{-15}$ см.

5. При внесении тела в электрическое поле легкие электроны испытывают смещения против поля. Смещения атомных ядер по сравнению с ними пренебрежимо малы. Происходит частичное разделение положительных и отрицательных зарядов. В отдельных местах тела появляются макроскопические заряды различных знаков. Это явление называется электрическим смещением, а появившиеся в результате разделения заряды — *индукционными зарядами.* К возникновению индукционных зарядов и сводится влияние вещества на электрическое поле. Индукционные заряды создают дополнительное электрическое поле, накладывающееся на поле первичных зарядов. Если известны все первичные и индукционные заряды, то при вычислении полного электрического поля можно «забыть» о наличии вещества. Полное поле найдется суперпозицией кулоновых полей, возбуждаемых в вакууме всеми первичными и индукционными зарядами.

§ 11. Проводники в электрическом поле

1. Смещения электрических зарядов в металлах и изоляторах носят совершенно различный характер. В металлах имеются *свободные электроны*, которые в пределах тела могут перемещаться на какие угодно расстояния. Поэтому индукционные заряды, возникающие в электрическом поле на противоположных концах тела, могут быть механически отделены друг от друга. Возьмем два металлических цилиндра A и B, установленных на изолирующих подставках и соединенных с электроскопами (рис. 32). Сблизим их до соприкосновения. Если к ним поднести заряженный шар C, то стрелки обоих электроскопов отклонятся. При удалении шара C отклонение пропадает. Раздвинем теперь цилиндры A и B в присутствии влияющего тела C, а затем тело C удалим. Электрические заряды на A и B, а также на стержнях и стрелках электроскопов сохранятся. Если шар C был заряжен положительно, то на A окажется отрицательный, а на B — положительный заряды. В этом можно убедиться, взяв потертую о кожу стеклянную палочку. Если этой палочкой коснуться цилиндра A, то отклонение стрелки электроскопа A уменьшится. Если же коснуться цилиндра B, то стрелка электроскопа B отклонится еще больше.

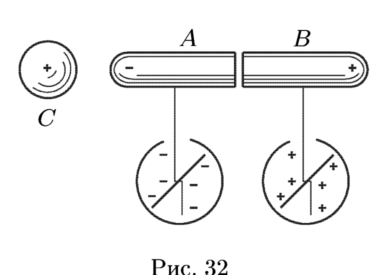


Рис. 32

2. Если бы внутри однородного проводника существовало макроскопическое электрическое поле, то оно привело бы в движение свободные электроны. В проводнике возник бы электрический ток, и равновесие электричества было бы невозможно. Для равновесия необходимо, чтобы макроскопическое поле $\mathbf{E}$ обращалось в нуль во всех точках

внутри проводника [1]. Будет равна нулю также дивергенция вектора $\mathbf{E}$, а с ней, в силу теоремы Гаусса (10.6), и величина $\overline{\rho}$. Таким образом, *при равновесии объемная плотность электричества внутри однородного проводника равна нулю. Электричество может располагаться только на поверхности, а не внутри проводника.* Как было выяснено в предыдущем параграфе (п. 4), толщина поверхностного слоя, в котором нарушается электрическая нейтральность вещества, настолько мала, что в макроскопической электростатике ее можно совсем не принимать во внимание. Можно пользоваться математической идеализацией, в которой электричество ведет себя как сплошная жидкость, располагающаяся на границе проводника как на геометрической поверхности.

Электрические заряды располагаются по поверхности проводника потому, что между ними действуют кулоновские силы притяжения и отталкивания. Допустим, что внутри проводника возникли электрические заряды. Согласно теореме Ирншоу никакая статическая конфигурация их внутри проводника не может быть устойчивой. Притяжение между разноименными зарядами приведет к их сближению и нейтрализации, а отталкивание одноименных зарядов — к тому, что они разойдутся как можно дальше и сосредоточатся на поверхности тела. Приведенное рассуждение показывает также, что поверхностная плотность электричества будет максимальна на наиболее удаленных выступающих частях проводника, обладающих максимальной кривизной, например на остриях. Это видно также из формулы (8.6), согласно которой поле $\mathbf{E}$ должно очень резко меняться вблизи острия.

3. Распределение электричества на поверхности проводника можно исследовать с помощью *пробного шарика*, т. е. маленького металлического шарика, насаженного на изолирующую ручку. Возьмем металлическое тело, форма которого изображена на рис. 33, установленное на изолирующей подставке. Зарядив его, коснемся пробным шариком острия A, а затем поднесем шарик к электроскопу. Стрелка электроскопа отклонится. Если то же самое повторить, касаясь пробным шариком боковой поверхности тела, то отклонение стрелки будет меньше. Если же коснуться впадины B, то стрелка совсем не отклонится. Это показывает, что плотность электричества максимальна у A и минимальна у B. Возьмем гибкую металлическую сетку, к которой по обе стороны приклеены легкие бумажные листочки (рис. 34). Установим ее на изолирующих подставках, а затем зарядим электричеством. Если сетка плоская, то листочки расходятся одинаково с обеих сторон. При изгибании сетки листочки с выпуклой стороны расходятся еще больше, а с вогнутой — спадают.

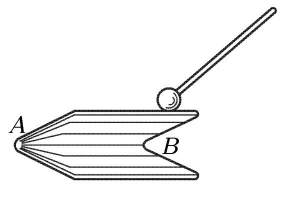


Рис. 33

[1] В неоднородном проводнике это не обязательно из-за действия сил неэлектростатического происхождения.

На остриях заряженного проводника поверхностная плотность электричества может быть настолько большой, что электричество начинает с них стекать. В сильном и сильно неоднородном поле вблизи острия молекулы воздуха заряжаются через влияние и притягиваются к нему. Коснувшись острия, молекулы заряжаются одноименно с ним и отталкиваются. Сила отталкивания превосходит ранее действовавшую силу притяжения, так как она действует на заряженные молекулы, а сила притяжения — на нейтральные. По этой причине заряженные молекулы будут удаляться от острия с бо́льшими скоростями, чем они приближались к нему. Возникает поток заряженных частиц воздуха, направленный от острия, называемый *электрическим ветром.* Им можно погасить зажженную свечу.

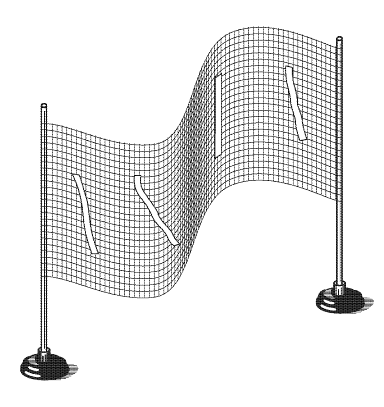


Рис. 34

В демонстрационном приборе — *колесе Франклина* (1706–1790) — электрический ветер, стекающий с остриев, приводит во вращение легкий крест из металлических проволок (рис. 35). Прибор действует по тому же принципу, что и сегнерово колесо. В другом демонстрационном опыте электрический ветер с остриев (рис. 36) приводит во вращение легкий цилиндр, насаженный на вертикальную ось (электрический ротор).

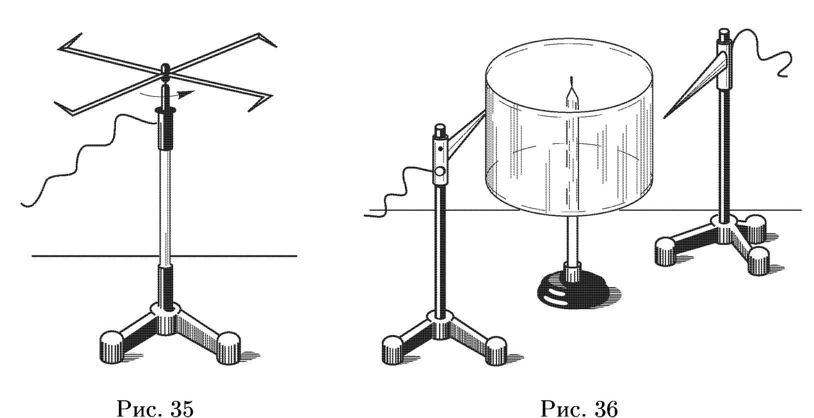


Рис. 35 Рис. 36

В сильных электрических полях механизм утечки зарядов с острия становится более сложным. Вблизи острия молекулы воздуха ионизуются сильным электрическим полем. Воздух становится проводником электричества. Возникает сильный электрический ток, направленный к острию или от него (*электрический пробой*). Этот ток снимает электрические заряды с острия. На этом основано действие громоотвода.

4. При переходе через любую границу раздела сред тангенциальная составляющая электрического поля меняется непрерывно (см. § 6, п. 6). В электростатике электрическое поле внутри проводника обращается в нуль. Отсюда следует, что во внешнем пространстве поле $\mathbf{E}$ должно быть перпендикулярно к поверхности проводника. Если бы это было не так, то под действием касательной составляющей поля $\mathbf{E}$ заряды пришли бы в движение по поверхности проводника, т. е. равновесие их было бы невозможно. Силовые линии, таким образом, нормальны к поверхности проводника и оканчиваются на ней, не проникая внутрь проводника (рис. 37).

Напряженность электрического поля вблизи поверхности проводника легко найти по формуле (6.9). Полагая в ней $E_{1n} = 0$ (внутри проводника), $E_{2n} = E$ (вне проводника), получим $E = 4\pi\sigma$, или в векторной форме

$$\mathbf{E} = 4\pi\sigma\mathbf{n} \tag{11.1}$$

(нормаль $\mathbf{n}$ проведена наружу от поверхности проводника). Электрическая сила $\mathbf{f}$, действующая на единицу площади заряженной поверхности проводника, согласно общим формулам (6.13) и (6.15), будет

$$\mathbf{f} = \frac{\sigma}{2}\,\mathbf{E} = 2\pi\sigma^2\mathbf{n} = \frac{E^2}{8\pi}\,\mathbf{n}. \tag{11.2}$$

Она всегда направлена наружу, т. е. стремится удалить электричество с поверхности проводника.

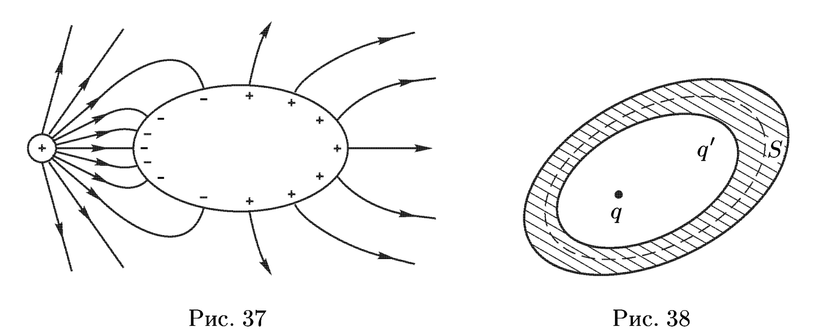


Рис. 37 Рис. 38

5. Докажем теперь несколько положений, совокупность которых называется *теоремой Фарадея.* Пусть в однородном проводнике имеется полость, внутрь которой внесены электрические заряды (рис. 38). Проведем замкнутую поверхность S, окружающую полость и целиком проходящую в проводнике. Так как напряженность электрического поля на поверхности S равна нулю, то будет равен нулю и полный заряд, окруженный этой поверхностью. Таким образом, *сумма индуцированных зарядов на внутренней поверхности проводящей оболочки равна и противоположна по знаку сумме зарядов, окруженных этой оболочкой.*

При равновесии индуцированные заряды q' располагаются по внутренней поверхности проводящей оболочки таким образом, чтобы

полностью скомпенсировать внутри этой оболочки кулоновское поле зарядов q, окружаемых ею. Такая компенсация должна иметь место не только в стенках проводящей оболочки, но и во всем внешнем пространстве. Чтобы убедиться в этом, достаточно представить, что все внешнее пространство заполнено электрически нейтральной проводящей средой. Поле в ней при равновесии равно нулю. Но такая среда не будет оказывать никакого влияния на электрическое поле, поскольку положительные и отрицательные заряды в ней скомпенсированы в каждой точке пространства. Поэтому если среду удалить, оставив только проводящую оболочку, то от этого поле нигде не изменится. В частности, оно останется равным нулю во всем пространстве, из которого была удалена среда. Значит, *кулоновское поле зарядов, окруженных проводящей оболочкой, и зарядов, индуцированных на ее внутренней поверхности, равно нулю во всем внешнем пространстве.*

Допустим теперь, что все заряды находятся во внешнем пространстве. Если проводящее тело сплошное, то в нем электрического поля нет. Удалим из тела часть (электрически нейтрального) вещества. От этого, как выяснено выше, поле нигде не изменится, а равновесие электричества не нарушится. Зато в теле образуется полость. Таким образом, *если в полости нет электрических зарядов, то электрическое поле в ней равно нулю. Внешние заряды не создают в полости никакого электрического поля.* Чтобы предохранить какие-либо тела, например измерительные приборы, от влияния внешних электрических полей, их окружают проводящей оболочкой (*электростатическая защита*).

Мы видим, что замкнутая проводящая оболочка разделяет все пространство на внутреннюю и внешнюю части, в электрическом отношении совершенно не зависящие друг от друга. Например, при любом перемещении зарядов внутри (вне) оболочки во внешнем (внутреннем) пространстве не будет происходить никаких изменений. В частности, если все внутренние заряды привести в контакт со стенками оболочки, то произойдет их нейтрализация индуцированными зарядами. При этом внутреннее поле исчезнет, но наружное поле и распределение электричества на наружной поверхности тела останутся неизменными.

6. Все эти результаты были получены Фарадеем экспериментально. Опишем некоторые демонстрационные опыты, иллюстрирующие их. Возьмем *«цилиндр Фарадея»*, т. е. длинный металлический сосуд цилиндрической формы, открытый сверху. Насадим его на стержень электроскопа (рис. 39). Затем внесем в цилиндр заряженный шарик на изолирующей ручке. Стрелка электроскопа отклонится. Если шарик погружен достаточно глубоко, то при любых перемещениях его в цилиндре угол отклонения стрелки электроскопа не изменяется. Он не изменяется и тогда, когда заряженным шариком касаются внутренней поверхности стенки цилиндра. При этом шарик оказывается незаряженным. В этом легко убедиться, извлекая шарик из цилиндра и касаясь им другого незаряженного электроскопа. Весь заряд с шарика переходит к цилиндру и располагается на его наружной поверхности. В идеально поставленном опыте отверстие цилиндра Фарадея после

внесения в него шарика должно закрываться металлической крышкой. Но если цилиндр длинный, то опыт хорошо удается и без крышки.

Основываясь на опытах такого типа, Фарадей указал способ, с помощью которого заряд проводящего тела можно полностью передать другому проводящему телу. Для этого во втором теле надо сделать полость и внести в нее первое (заряженное) тело. При соприкосновении вносимого тела с внутренней поверхностью полости заряд от него полностью переходит ко второму телу. Внесенное тело можно

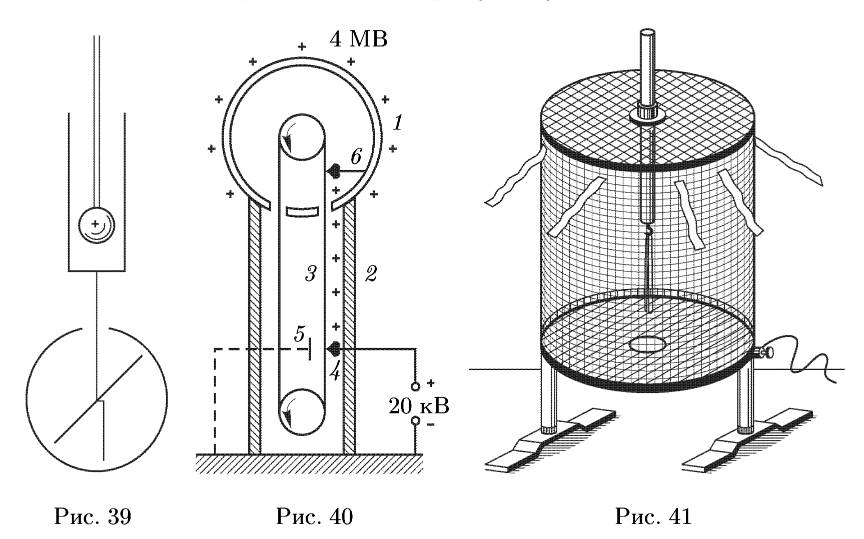


Рис. 39 Рис. 40 Рис. 41

извлечь из полости и зарядить снова. Внося его в полость второй раз, можно опять передать заряд второму телу. Такую операцию можно повторить многократно и сообщить полому телу теоретически сколь угодно большой заряд. Практически величина заряда лимитируется утечкой электричества из-за ионизации окружающего воздуха. По этому принципу работает электростатический генератор Ван-де-Граафа (1901–1967).

Генератор Ван-де-Граафа состоит из полого металлического шара *1* диаметром в несколько метров, укрепленного на изолирующей колонне *2* (рис. 40). Движущаяся бесконечная лента *3* из прорезиненной ткани заряжается от источника напряжения с помощью системы остриев *4*. С обратной стороны ленты против остриев помещена заземленная пластина *5*, усиливающая стекание зарядов с остриев *4* на ленту *3*. Другая система остриев *6* снимает заряды с ленты и передает их полому шару. Обычные генераторы позволяют получать напряжения до 2–5 миллионов вольт. Они применяются для ускорения электронов и ионов.

7. Опишем теперь демонстрационный опыт с «*клеткой Фарадея*». Она представляет собой цилиндр, дно и крышка которого сделаны из листового металла, а боковые стенки — из металлической сетки, чтобы сквозь них было видно, что делается внутри цилиндра (рис. 41).

К боковой поверхности цилиндра снаружи приклеены бумажные полоски. Вдоль оси клетки может перемещаться металлический стержень, все время находящийся в электрическом контакте с крышкой. Стержень оканчивается легкими бумажными листочками, играющими роль электроскопа. Они могут выдвигаться наружу через отверстие в дне клетки. Клетка устанавливается на изолирующих подставках. Если клетку зарядить электричеством, то наружные листочки расходятся, а листочки внутри остаются неподвижными. Если их выдвинуть наружу, то они также расходятся. Фарадей произвел аналогичный опыт (1836 г.) в большом масштабе, поместившись сам с электроскопом внутри металлической клетки, подвешенной к потолку на шелковых веревках. К клетке подносились металлические тела, заряженные от электростатической машины. Между ними и клеткой проскакивали сильные электрические искры, сообщавшие клетке большой электрический заряд. Никаких отклонений листочков электроскопа внутри клетки не наблюдалось, и никаких особых ощущений Фарадей не испытывал. Физики, работающие на высоковольтных ускорителях Ван-де-Граафа, автоматически повторяют опыт Фарадея. Они располагаются с измерительными приборами внутри шара работающего ускорителя на миллионы вольт и уверены, что находятся под надежной защитой теоремы Фарадея.

§ 12. Поляризация диэлектриков

1. Диэлектрики являются непроводниками электричества. Как и в металлах, в них также могут возбуждаться индукционные заряды. Поднесем, например, к шарику заряженного электроскопа C электрически нейтральное тело из диэлектрика AB (рис. 42). Угол отклонения стрелки электроскопа уменьшается. Дело в том, что заряд шарика C возбуждает на конце диэлектрика B индукционные заряды того же, а на конце A — противоположного знака. Эти заряды оттягивают часть зарядов со стрелки и стержня электроскопа на шарик, с чем и связано уменьшение угла отклонения стрелки.

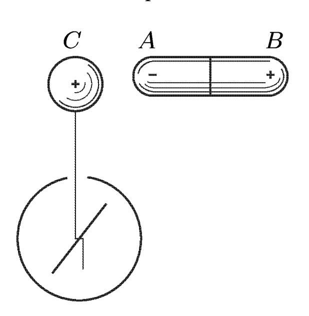


Рис. 42

Попытаемся разделить индукционные заряды, возникшие на диэлектрике. Для этого воспользуемся тем же приемом, который применялся в случае металлов (см. рис. 32). Пусть диэлектрик состоит из двух половин A и B, соприкасающихся между собой. Если в присутствии заряженного электроскопа эти части разъединить, а затем убрать или разрядить электроскоп, то обе они окажутся незаряженными. Это показывает, что заряды в диэлектрике лишены той свободы передвижения, какая свойственна электронам в металлах.

2. Заряды в диэлектрике могут смещаться из своих положений равновесия лишь на малые расстояния, порядка атомных. Допустим, например, что диэлектрик состоит из электрически нейтральных молекул. Под действием приложенного электрического поля центр тяжести электронов в молекуле немного смещается относительно центра тяжести атомных ядер. Молекулы становятся электрическими диполями, ориентированными положительно заряженными концами в направлении электрического поля **E**. В этом случае говорят, что диэлектрик *поляризован*, а само смещение положительных и отрицательных зарядов диэлектрика в разные стороны называют *электрической поляризацией*. На схематическом рис. 43 диэлектрик изображен в виде прямоугольного параллелепипеда, а молекулы — в виде шариков. Положительно заряженная половина молекулы закрашена в черный цвет, отрицательно заряженная оставлена светлой. Мы видим, что на конце AB параллелепипеда $ABDC$ выступают нескомпенсированные отрицательные, а на конце CD — положительные поверхностные заряды. Это и есть индукционные заряды, появляющиеся в результате поляризации диэлектрика. Их называют *поляризационными*, или *связанными*, *зарядами*. Последним термином хотят подчеркнуть, что свобода перемещения связанных зарядов ограничена. Они могут смещаться лишь внутри электрически нейтральных молекул. В объеме диэлектрика происходит компенсация положительных и отрицательных зарядов молекул, и никаких макроскопических поляризационных зарядов не появляется. Однако это справедливо только тогда, когда поляризация диэлектрика *однородна*, т. е. когда все молекулы диэлектрика поляризованы и ориентированы одинаково. Если же поляризация неоднородна, то компенсации нет, и в диэлектрике могут появиться объемные поляризационные (связанные) заряды.

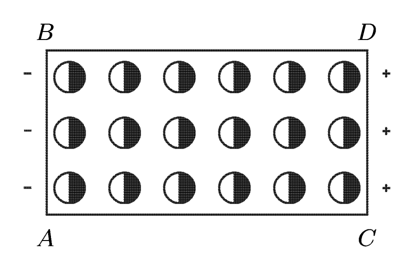


Рис. 43

Помимо электрически нейтральных молекул в диэлектрике могут существовать положительно или отрицательно заряженные *ионы*. Избыток ионов того или иного знака в какой-либо части диэлектрика означает наличие в этой части нескомпенсированных макроскопических зарядов. Такие заряды называются *свободными*. Они возникают в диэлектрике, например при электризации трением. К свободным зарядам относятся также все заряды, находящиеся на проводниках.

3. Механизм поляризации диэлектрика может быть и иным. Существуют диэлектрики, молекулы которых обладают дипольными моментами уже в отсутствие электрического поля. Такие молекулы называются *полярными*. Если поля нет, то полярные молекулы совершают хаотические тепловые движения и ориентированы совершенно беспорядочно. При наложении электрического поля дипольные моменты

молекул ориентируются преимущественно в направлении поля. А это означает, что диэлектрик становится поляризованным.

Наконец, существуют диэлектрические кристаллы (например, кристаллы NaCl), построенные из ионов противоположного знака. Такие кристаллы называются *ионными.* Ионный кристалл состоит из двух кристаллических решеток, вдвинутых одна в другую. Одна решетка построена из положительных, другая — из отрицательных ионов. В этом случае уже нельзя говорить о молекулах или атомах в кристалле. Кристалл в целом должен рассматриваться как одна гигантская молекула. При наложении электрического поля решетка положительных ионов сдвигается в одну, а отрицательных — в противоположную сторону. В этом и состоит электрическая поляризация ионных кристаллов. Существуют ионные кристаллы, поляризованные даже в отсутствие внешнего электрического поля.

4. Конкретное строение диэлектрика и механизм его поляризации для наших ближайших целей не имеют значения. Существенно лишь, что поляризация диэлектрика сопровождается появлением на нем нескомпенсированных макроскопических зарядов. Мы можем довольствоваться грубой моделью, в которой положительное и отрицательное электричества рассматриваются как непрерывные жидкости, равномерно перемешанные друг с другом. При поляризации диэлектрика происходит смещение одной жидкости относительно другой. Существенно, что такие смещения в обычных условиях ничтожны даже по сравнению с размерами атомов. Это связано с тем, что внешние поля, действующие на диэлектрик, очень слабы, если их сравнивать с внутренними электрическими полями атомов и молекул. Так, на электрон в атоме водорода действует электрическое поле ядра $E = e/r^2 \sim$ $\sim 10^7$ СГСЭ-ед. $\approx 10^{11}$ В/м, громадное по сравнению с обычными макроскопическими полями.

5. Для количественного описания поляризации диэлектрика пользуются *вектором поляризации.* Так называется дипольный момент единицы объема диэлектрика, возникающий при его поляризации. Возьмем кусок однородного изотропного диэлектрика, имеющий форму косого параллелепипеда (рис. 44). Поместим его в однородное электри-

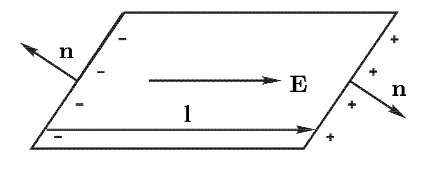


Рис. 44

ческое поле, направленное параллельно боковым ребрам. На основаниях параллелепипеда появятся поляризационные заряды с поверхностной плотностью $\sigma_{\text{пол}}$. На боковых гранях поляризационных зарядов не возникнет, так как смещение зарядов внутри диэлектрика происходит

параллельно этим граням. Если S — площадь основания параллелепипеда, то диэлектрик приобретет дипольный момент $\sigma_{\text{пол}}S\mathbf{l}$, где $\mathbf{l}$ — вектор, проведенный от отрицательного основания параллелепипеда к положительному параллельно боковым ребрам. Вектор поляризации диэлектрика будет

$$\mathbf{P} = \frac{\sigma_{\text{пол}}S}{V}\,\mathbf{l}, \tag{12.1}$$

где V — объем параллелепипеда. Эта формула справедлива и для однородного анизотропного диэлектрика (кристалла), когда направления векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$ могут и не совпадать.

Пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к основанию параллелепипеда, заряженному положительно. Тогда $V = S(\mathbf{ln})$. Подставив это значение в формулу (12.1) и умножив ее скалярно на $\mathbf{n}$, найдем

$$\sigma_{\text{пол}} = (\mathbf{Pn}) = P_n. \tag{12.2}$$

В частности, если параллелепипед прямоугольный, то $\sigma_{\text{пол}} = P$. Формула (12.2) была выведена применительно к положительно заряженному основанию. Но она верна и для отрицательно заряженного основания, так как на нем внешняя нормаль $\mathbf{n}$ направлена в противоположную сторону, а потому проекция P_n отрицательна. Формула справедлива и на боковой поверхности параллелепипеда, так как на ней, как мы видели, $\sigma_{\text{пол}} = 0$, что согласуется с формулой (12.2). Таким образом, формула (12.2) справедлива в общем случае.

Формула (12.2) показывает, что нормальная составляющая P_n представляет по величине количество электричества, смещаемое при поляризации через единичную площадку в направлении нормали $\mathbf{n}$ к ней. Эта интерпретация применима и в случае неоднородной поляризации, т. е. такой, при которой вектор $\mathbf{P}$ меняется от точки к точке. Чтобы убедиться в этом, достаточно мысленно разделить диэлектрик на малые объемы, в пределах каждого из которых поляризация может считаться однородной.

6. Как сказано выше, при неоднородной поляризации поляризационные заряды могут появляться не только на поверхности, но и в объеме диэлектрика. Вычислим теперь плотность объемных поляризационных зарядов. Выделим мысленно в диэлектрике произвольный объем V, ограниченный замкнутой поверхностью S (рис. 45). Заряд, смещенный при поляризации через площадку dS в отрицательном направлении нормали $\mathbf{n}$, согласно формуле (12.2) равен $-P_n\,dS$. Через всю поверхность S внутрь объема V при поляризации поступает поляризационный заряд

$$q_{\text{пол}} = -\oint P_n\,dS = -\oint (\mathbf{P}\,d\mathbf{S}). \tag{12.3}$$

Если поляризация однородна, то $q_{\text{пол}} = 0$.

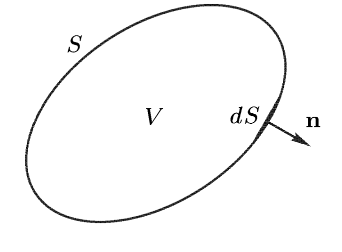


Рис. 45

§ 13. Теорема Гаусса для диэлектриков

1. Как выяснено в § 11, влияние диэлектрика на электрическое поле сводится к действию поляризационных зарядов. Поэтому к диэлектрикам можно применить соотношение (5.5), добавив при этом к свободным зарядам q поляризационные заряды $q_{\text{пол}}$:

$$\oint E_n\, dS = 4\pi(q + q_{\text{пол}}). \tag{13.1}$$

Подставив сюда значение $q_{\text{пол}}$ из формулы (12.3), получим

$$\oint (E_n + 4nP_n)\, dS = 4nq. \tag{13.2}$$

Введем новый вектор

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \tag{13.3}$$

называемый *вектором электрической индукции*, или *электрического смещения.* Тогда

$$\oint D_n\, dS = 4\pi q. \tag{13.4}$$

Это и есть *теорема Гаусса для электрического поля в диэлектрике.* Мы видим, что поток вектора $\mathbf{D}$ через замкнутую поверхность определяется *только свободными зарядами.* Этим и оправдывается введение вектора $\mathbf{D}$. В вакууме векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ совпадают.

2. В дифференциальной форме соотношение (13.4) имеет вид

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho, \tag{13.5}$$

где ρ — объемная плотность *свободных* зарядов. Нелишне напомнить, что теоремы (13.4) и (13.5) справедливы не только в электростатике. Они постулируются также для переменных во времени полей. Эти теоремы входят как составные части в систему фундаментальных электродинамических уравнений Максвелла.

Подставив в (13.5) выражение (13.3), получим

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi(\rho - \operatorname{div}\mathbf{P}).$$

Но для той же величины можно написать

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi(\rho + \rho_{\text{пол}}).$$

Следовательно,

$$\rho_{\text{пол}} = -\operatorname{div}\mathbf{P}. \tag{13.6}$$

3. Теорема Гаусса для вектора электрического смещения в диэлектрике имеет такой же вид, как и для напряженности электрического поля в вакууме. Поэтому все математические соотношения, полученные из нее для вакуума, сохраняют силу и для однородного диэлектрика. Надо только вектор $\mathbf{E}$ заменить вектором $\mathbf{D}$. Таким путем из формул

(6.1)–(6.3) и (6.5) получаем, например,

$$D = 2\pi\sigma, \tag{13.7}$$

$$D = \begin{cases} 4\pi\rho x & \text{внутри пластинки,} \\ 4\pi\rho a & \text{вне пластинки,} \end{cases} \tag{13.8}$$

$$D = \begin{cases} (4\pi/3)\rho r & \text{внутри шара,} \\ (4\pi/3)\rho a^3/r^2 & \text{вне шара.} \end{cases} \tag{13.9}$$

Электрическое смещение точечного заряда в однородном диэлектрике определяется выражением

$$\mathbf{D} = q\mathbf{r}/r^3. \tag{13.10}$$

§ 14. Граничные условия

1. Из соотношения (5.5) мы получили граничное условие (6.9), которому должны удовлетворять нормальные составляющие вектора **E** на заряженной поверхности. Поступая совершенно так же, из теоремы Гаусса для диэлектриков (13.4) получаем следующее условие на границе раздела двух диэлектриков:

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma, \tag{14.1}$$

где σ — поверхностная плотность свободных зарядов на этой границе.

Отличие формулы (14.1) от аналогичной формулы (6.9) обусловлено влиянием поляризационных зарядов, появляющихся на границе диэлектриков. Поверхностная плотность поляризационных зарядов равна $\sigma_{\text{пол}} = P_{1n} - P_{2n}$ (рис. 46). Учитывая ее, получаем $E_{2n} - E_{1n} = 4\pi(\sigma + \sigma_{\text{пол}})$, или

$$(E_{2n} + 4\pi P_{2n}) - (E_{1n} + 4\pi P_{1n}) = 4\pi\sigma, \tag{14.2}$$

а эта формула тождественна с (14.1).

В частности, вектор электрического смещения в диэлектрике на границе с проводником определяется выражением

$$\mathbf{D} = 4\pi\sigma\mathbf{n}. \tag{14.3}$$

Здесь единичная нормаль **n** проведена от металла к диэлектрику.

Если на границе раздела нет свободных зарядов, то

$$D_{1n} = D_{2n}. \tag{14.4}$$

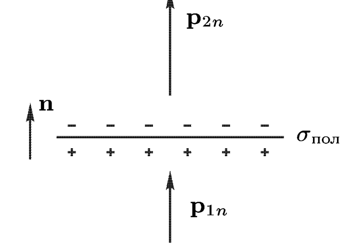


Рис. 46

Таким образом, при переходе через незаряженную границу двух диэлектриков нормальная составляющая вектора **D** остается непрерывной. Что касается вектора **E**, то на любой границе остаются непрерывными его тангенциальные составляющие:

$$E_{1t} = E_{2t}. \tag{14.5}$$

Это утверждение доказывается так же, как и для поля в вакууме (см. § 6, а также § 17).

2. Пользуясь граничными условиями (14.4) и (14.5), можно указать принципиальный способ измерения векторов **E** и **D** в диэлектрике. Обычный метод измерения **E** по силе, действующей на пробный заряд, годится для поля в вакууме, а к веществу применим не всегда. Дело в том, что выражение для действующей силы $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ справедливо в вакууме, а в веществе в лучшем случае является приближенным. Кроме того, внесение пробного заряда в вещество может оказаться просто невозможным, например при необходимости измерить напряженность или электрическое смещение поля в твердом диэлектрике. Единственный *принципиальный способ* измерения векторов **E** и **D** внутри среды, пригодный во всех случаях, состоит в том, чтобы в теле сделать *полость* и внести в нее пробный заряд. Однако измеренное таким путем поле, вообще говоря, не будет совпадать ни с вектором **E**, ни с вектором **D**. Результат зависит от *формы полости.* Только для полостей специальной формы измерение непосредственно дает **E** и **D**. Рассмотрим два случая.

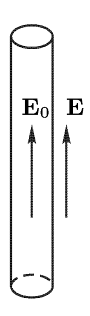


Рис. 47

Случай 1. Полость имеет форму очень длинного и тонкого цилиндрического канала, параллельного полю **E** (рис. 47). Количество вещества внутри канала бесконечно мало. Его удаление из этого канала меняет электрическое поле в окружающем диэлектрике бесконечно мало. На концах канала появляются лишь поляризационные заряды, влияние которых на электрическое поле вдали от этих концов пренебрежимо мало. Из соображений симметрии следует, что поле в канале $\mathbf{E}_0$ параллельно наружному полю **E**. Поэтому из граничного условия (14.5) получаем $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$. Таким образом, измерение **E** сводится к измерению $\mathbf{E}_0$.

Случай 2. Полость имеет форму бесконечно короткого цилиндра с основаниями, перпендикулярными к вектору **D** (рис. 48). Как и в предыдущем случае, удаление вещества из такой бесконечно малой полости сказывается на поле в окружающем диэлектрике также бесконечно мало. Действительно, на границах полости появляются поляризационные заряды противоположных знаков. Вне полости поля этих зарядов почти полностью компенсируют друг друга. Однако внутри полости поля поляризационных зарядов усиливают друг друга, что существенно меняет поле в полости. Внутри полости электрическое поле $\mathbf{E}_0$, ввиду симметрии, перпендикулярно к ее основаниям. В полости напряженность и индукция поля совпадают ($\mathbf{E}_0 = \mathbf{D}_0$). Поэтому из граничного условия (14.4) получаем $\mathbf{D} = \mathbf{E}_0$. Измерение **D** сводится к измерению $\mathbf{E}_0$.

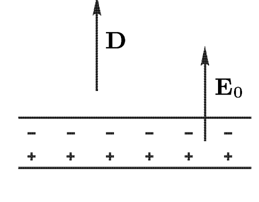


Рис. 48

§ 15. Поляризуемость и диэлектрическая проницаемость

1. Одним из фундаментальных уравнений электростатики является теорема Гаусса (13.4) или (13.5). Второе фундаментальное уравнение электростатики будет сформулировано в § 17 при введении понятия потенциала. В вакууме, где поле характеризуется одним только вектором **E**, этих уравнений достаточно. Они образуют *полную систему* уравнений электростатики. В веществе к вектору **E** надо добавить еще один вектор (**P** или **D**). Поэтому уравнения электростатики надо дополнить еще одним векторным уравнением. Принципиальный способ получения такого уравнения содержится в самом определении вектора поляризации **P**. Если известна атомная структура вещества, то в принципе можно рассчитать смещения электронов и атомных ядер, которые они получают при внесении вещества в электрическое поле. После этого можно вычислить вектор **P** и тем самым получить недостающее уравнение. Ясно, что в зависимости от конкретных условий таким путем должны получаться весьма разнообразные и сложные соотношения. Универсальной связи между векторами **P** и **E**, пригодной для всех веществ, не существует. Здесь мы не можем идти по указанному пути. Мы получим недостающее уравнение, опираясь на опыт.

2. Опыт показывает, что для обширного класса диэлектриков и широкого круга явлений связь между векторами **P** и **E** *линейна* и *однородна.* Такая закономерность объясняется тем, что напряженности макроскопических электрических полей обычно очень малы по сравнению с напряженностями микрополей внутри атомов и молекул (см. § 12, п. 4). Если среда изотропна, то векторы **P** и **E** коллинеарны и можно написать

$$\mathbf{P} = \alpha\mathbf{E}, \tag{15.1}$$

где α — безразмерный коэффициент, называемый *поляризуемостью диэлектрика.* Он зависит от плотности и температуры диэлектрика. Связь между **D** и **E** записывается в виде

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}. \tag{15.2}$$

Новая безразмерная величина

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha \tag{15.3}$$

называется *диэлектрической проницаемостью диэлектрика.* Этой величиной обычно и характеризуются индивидуальные свойства диэлектриков. Для вакуума $\alpha = 0$, $\varepsilon = 1$.

3. В кристаллах направления векторов **P** и **E** не совпадают. Соотношение (15.1) заменяется более общей линейной однородной зависимостью:

$$P_x = \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z,$$
$$P_y = \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z,$$
$$P_z = \alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z,$$

или сокращенно:

$$P_i = \sum_j \alpha_{ij} E_j \quad (i, j = x, y, z). \tag{15.4}$$

Здесь α_{ij} — безразмерные коэффициенты, зависящие от выбора координатных осей. Совокупность этих девяти коэффициентов называется *тензором поляризуемости диэлектрика.* Аналогично,

$$D_i = \sum_j \varepsilon_{ij} E_j \quad (i, j = x, y, z), \tag{15.5}$$

где ε_{ij} — новые безразмерные постоянные, образующие *тензор диэлектрической проницаемости вещества.* Они связаны с коэффициентами α_{ij} соотношениями

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + 4\pi\alpha_{ij}, \tag{15.6}$$

где δ_{ij} — единичный тензор, определяемый условиями: $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Пользуясь понятием энергии как функции состояния, находим, что α_{ij} и ε_{ij} симметричны, т. е.

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}. \tag{15.7}$$

4. Все приведенные приближенные соотношения, несмотря на их важность, не относятся к числу фундаментальных соотношений электростатики и электродинамики. Область применимости их ограничена. Существуют диэлектрики, к которым они неприменимы. Мы указывали уже, что ионные кристаллы могут быть поляризованы даже в отсутствие внешнего электрического поля. Другим примером тел, обладающих тем же свойством, могут служить *электреты.* Эти диэлектрики подобны постоянным магнитам. Они длительно сохраняют состояние поляризации и благодаря этому создают электрическое поле в окружающем пространстве. Электрет можно получить, поместив в сильное электрическое поле расплавленный диэлектрик, состоящий из полярных молекул. Подходящим веществом может служить смесь воска и смолы, помещаемая в электрическое поле порядка 10^6 В/м. После застывания диэлектрика поле выключается. Застывший диэлектрик сохраняет поляризацию в течение нескольких часов и даже суток. Поляризация в конце концов исчезает благодаря медленным релаксационным процессам, идущим внутри диэлектрика. Существуют электреты, время жизни которых составляет многие годы. Приближенно поведение электретов и аналогичных им диэлектриков в электрическом поле можно описать соотношением вида

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \alpha\mathbf{E}, \tag{15.8}$$

где величины $\mathbf{P}_0$ и α от напряженности поля $\mathbf{E}$ не зависят.

5. Опишем еще демонстрационный опыт с лейденской банкой. Удобно взять банку, наружной обкладкой которой служит длинная металлическая трубка. В нее вставляется диэлектрическая трубка из кварца, а в последнюю — внутренняя обкладка, представляющая собой металлический стержень на изолирующей ручке. Заземлив наружную обкладку, банку заряжают от электростатической машины, затем отсоединяют от нее и разбирают. Внутренний стержень вытягивается за изолирующую

ручку, вынимается кварцевая трубка, и обе металлические обкладки приводятся в контакт друг с другом. Теперь на обкладках зарядов нет. Если банку собрать снова, то она опять окажется заряженной. Такую операцию можно повторить многократно, и всякий раз после сборки банка оказывается заряженной. Это доказывает, что кварцевая трубка поляризована даже тогда, когда она не окружена заряженными обкладками. Поляризованный кварц создает в окружающем пространстве электрическое поле, которое и индуцирует электрические заряды на обкладках собранной банки.

Еще более сложные явления наблюдаются в так называемых сегнетоэлектриках (см. § 39). Здесь связь между векторами **P** и **E** нелинейна и зависит от предшествующей истории изменения поля.

Простейший случай, когда применимы формулы (15.1) и (15.2), является довольно распространенным и практически наиболее важным. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем иметь дело именно с таким случаем.

6. Рассмотрим теперь поведение силовых линий при прохождении через границу раздела двух диэлектриков (рис. 49). Если на границе раздела нет свободных зарядов, то должны выполняться граничные условия

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}.$$

Если ввести углы β_1 и β_2 между силовыми линиями и нормалью к границе раздела, то эти условия можно записать в виде

$$E_1 \sin\beta_1 = E_2 \sin\beta_2,$$

$$\varepsilon_1 E_1 \cos\beta_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\beta_2.$$

Из них получаем

$$\frac{\operatorname{tg}\beta_1}{\operatorname{tg}\beta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \tag{15.9}$$

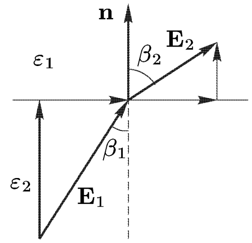


Рис. 49

Отсюда видно, что при переходе через границу раздела двух диэлектриков силовые линии испытывают *преломление*. При переходе из диэлектрика с меньшей ε в диэлектрик с большей ε угол β увеличивается, т. е. силовая линия удаляется от нормали к границе раздела. С этим связана концентрация (сгущение) силовых линий в диэлектрике с большей диэлектрической проницаемостью. Примером может служить диэлектрическая пластинка, внесенная в однородное электрическое поле (рис. 50).

Если полый диэлектрик с большой диэлектрической проницаемостью внести в электрическое поле, то из-за преломления силовые линии сконцентрируются преимущественно в стенках диэлектрика (рис. 51). Внутри полости они расположатся редко. Это значит, что поле в полости будет ослаблено по сравнению с наружным полем. Полость

внутри диэлектрика, таким образом, обладает *экранирующим действием.* В этом отношении она ведет себя аналогично полости в металле.

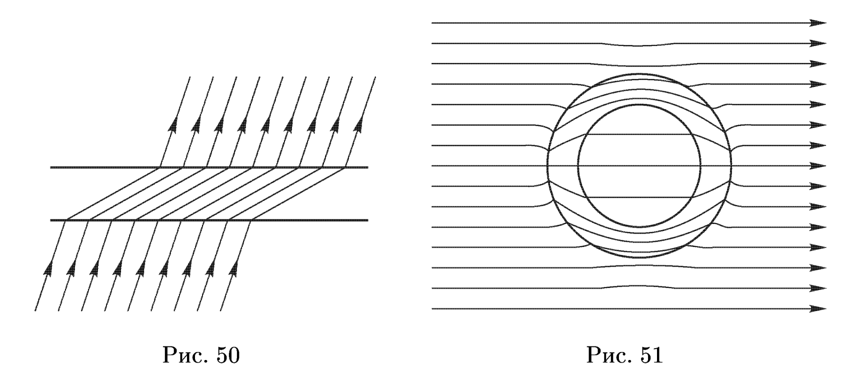


Рис. 50 Рис. 51

Однако, в отличие от металла, экранирование диэлектриком не полное. Чем больше диэлектрическая проницаемость, тем сильнее экранирующее действие.

§ 16. Поле равномерно поляризованного шара

1. До поляризации в шаре была однородная смесь положительного и отрицательного электричеств с объемными плотностями $+\rho$ и $-\rho$. Сдвинем все положительные заряды относительно отрицательных на одно и то же расстояние $\delta\mathbf{l}$. (На рис. 52 смещение $\delta\mathbf{l}$ сильно преувеличено. В практически важных случаях оно мало даже по сравнению с атомными размерами.) Шар равномерно поляризуется, причем вектор поляризации будет $\mathbf{P} = \rho\,\delta\mathbf{l}$. Мы видим, что поле $\mathbf{E}$ равномерно поляризованного шара есть векторная сумма полей двух равномерно и разноименно заряженных шаров, немного смещенных друг относительно друга. Рассмотрим два случая.

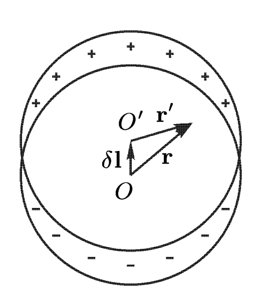


Рис. 52

Случай 1. Поле внутри равномерно поляризованного шара. Пусть O и O' — центры отрицательно и положительно заряженных шаров, а $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ — радиусы-векторы, проведенные из этих центров. Согласно формуле (6.5) поля этих шаров равны соответственно

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{4\pi}{3}\,\rho\mathbf{r}, \quad \mathbf{E}_2 = -\frac{4\pi}{3}\,\rho\mathbf{r}',$$

а их геометрическая сумма

$$\mathbf{E}^{(i)} = \frac{4\pi}{3}\,\rho(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{3}\,\rho\,\delta\mathbf{l},$$

или

$$\mathbf{E}^{(i)} = -\frac{4\pi}{3}\,\mathbf{P}. \tag{16.1}$$

Случай 2. Поле равномерно поляризованного шара во внешнем пространстве. Пусть q — заряд положительного шара. Каждый шар возбуждает во внешнем пространстве такое поле, как если бы весь заряд был сосредоточен в центре шара. Поэтому поле равномерно поляризованного шара во внешнем пространстве будет совпадать с полем точечного диполя с дипольным моментом $\mathbf{p} = q\delta\mathbf{l} = VP$, где V — объем шара. Следовательно, вне шара

$$\mathbf{E}^{(e)} = V\left[\frac{3(Pr)}{r^5}\,\mathbf{r} - \frac{\mathbf{P}}{r^3}\right].$$

Чтобы найти $\mathbf{E}^{(e)}$ на границе шара, следует положить $V = (4\pi/3)r^3$. Это дает

$$\mathbf{E}^{(e)} = 4\pi(\mathbf{Pn})\,\mathbf{n} - \frac{4\pi}{3}\,\mathbf{P}, \tag{16.2}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности шара.

2. Равномерную поляризацию шара можно получить, поместив его во внешнее однородное электрическое поле $\mathbf{E}_0$. Для доказательства достаточно убедиться, что при этом будут удовлетворены условия в бесконечности и граничные условия на поверхности шара. Последние требуют, чтобы по разные стороны поверхности шара были одинаковы касательные составляющие векторов $\mathbf{E}$ и нормальные составляющие векторов $\mathbf{D}$. Полное поле $\mathbf{E}$ слагается из внешнего поля $\mathbf{E}_0$ и поля поляризованного шара. На бесконечности полное поле должно переходить в $\mathbf{E}_0$. Это условие, очевидно, удовлетворяется, так как на бесконечности поле поляризованного шара исчезает, поскольку оно убывает обратно пропорционально кубу расстояния. Внутри шара $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}^{(i)}$, вне шара $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}^{(e)}$. Касательные составляющие обоих полей на поверхности шара одинаковы, как это видно из выражений (16.1) и (16.2). Вне шара электрическое смещение совпадает с напряженностью поля, т. е. равно $\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}^{(e)}$, внутри шара оно будет $\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}^{(i)} + 4\pi\mathbf{P}$. С учетом (16.1) и (16.2) отсюда получаем на поверхности шара

$$\mathbf{D}^{(e)} = \mathbf{E}_0 + 4\pi(\mathbf{Pn})\,\mathbf{n} - \frac{4\pi}{3}\,\mathbf{P}, \quad \mathbf{D}^{(i)} = \mathbf{E}_0 - \frac{4\pi}{3}\,\mathbf{P} + 4\pi\mathbf{P}.$$

Отсюда видно, что нормальные составляющие этих векторов одинаковы. Значит, граничные условия удовлетворены, чем и завершается доказательство.

Полное поле внутри шара, как следует из формулы (16.1), определяется выражением

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{4\pi}{3}\,\mathbf{P}. \tag{16.3}$$

Вектор $\mathbf{P}$ отсюда можно исключить, используя выражение $\mathbf{P} = \alpha\mathbf{E}$. Таким образом, получаем соотношение между внутренним и внешним полями:

$$\left(1 + \frac{4\pi}{3}\,\alpha\right)\mathbf{E} = \mathbf{E}_0, \tag{16.4}$$

или

$$\mathbf{E} = \frac{3}{\varepsilon + 2}\,\mathbf{E}_0. \tag{16.5}$$

Вектор поляризации внутри шара будет

$$\mathbf{P} = \alpha\mathbf{E} = \frac{3\alpha}{\varepsilon + 2}\,\mathbf{E}_0 = \frac{3}{4\pi}\,\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\,\mathbf{E}_0.$$

В результате во внешнем однородном поле $\mathbf{E}_0$ шар радиуса a приобретет дипольный момент $\mathbf{p} = V\mathbf{P}$, или

$$\mathbf{p} = a^3\,\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\,\mathbf{E}_0. \tag{16.6}$$

3. Рассчитаем теперь напряженность поля $\mathbf{E}'$ в сферической полости, вырезанной внутри равномерно поляризованного диэлектрика в предположении, что поляризация вне полости всюду однородна. Тогда и внешнее поле в диэлектрике $\mathbf{E}$ будет также однородно. Если полость заполнить тем же равномерно поляризованным диэлектриком, то к полю в полости E' добавится поле равномерно поляризованного шара $-(4\pi/3)\mathbf{P}$. В результате должно получиться поле $\mathbf{E}$, т. е. $\mathbf{E}' - (4\pi/3)\mathbf{P} = \mathbf{E}$. Отсюда

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\,\mathbf{P}. \tag{16.7}$$

Исключив вектор $\mathbf{P}$, найдем

$$\mathbf{E}' = \frac{\varepsilon + 2}{3}\,\mathbf{E}. \tag{16.8}$$

ЗАДАЧИ

1. Найти приближенное выражение для силы, действующей в неоднородном электрическом поле на маленькие диэлектрический и металлический шарики радиуса a.

Решение. Если бы внешнее поле $\mathbf{E}_0$ было однородно, то шарик приобрел бы дипольный момент, определяемый выражением (16.6). Тот же результат приближенно справедлив и в неоднородном поле. Используя его и формулу (4.8), находим искомую силу:

$$F = a^3\,\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_0^2}{2}\right),$$

причем ось X мы направили вдоль вектора $\mathbf{E}_0$. Полагая $\varepsilon = \infty$, получаем формулу для проводящего шарика:

$$F = \frac{a^3}{2}\,\frac{\partial E_0^2}{\partial x}.$$

Сила $\mathbf{F}$ направлена в сторону возрастания поля $\mathbf{E}_0$. Силами такого рода объясняется первое явление, с которого началось изучение электричества: притяжение наэлектризованными телами легких тел.

2. Как меняется с расстоянием r сила взаимодействия $\mathbf{F}$ между двумя маленькими шариками, из которых один заряжен, а другой не заряжен?

Ответ. $F \sim 1/r^5$.

3. В шаре, равномерно заряженном электричеством с объемной плотностью ρ, сделана сферическая полость, центр которой O' смещен относительно центра шара O на расстояние R. Определить электрическое поле внутри полости.

О т в е т. $\mathbf{E} = (4/3)\pi\rho\mathbf{R}$, где $\mathbf{R} = \overrightarrow{OO'}$. Поле однородно.

Указание. Заполнить мысленно полость электричествами противоположных знаков с плотностями $+\rho$ и $-\rho$. Тогда поле в полости можно рассматривать как суперпозицию полей двух равномерно и противоположно заряженных шаров. См. аналогичную задачу в т. I (§ 55, задача 7).

4. В неограниченной диэлектрической однородной жидкости с диэлектрической проницаемостью ε помещен однородный шар с той же диэлектрической проницаемостью, равномерно заряженный электричеством с объемной плотностью ρ. В шаре сделана сферическая полость, куда помещен меньший шар радиуса a из того же материала, также равномерно заряженный с объемной плотностью ρ электричеством того же знака. Зазор между поверхностью малого шара и стенками полости пренебрежимо мал. Определить силу $\mathbf{F}$, действующую на меньший шар, зная расстояние между центрами обоих шаров.

Р е ш е н и е. Поле большого шара в его полости однородно и равно $4\pi\rho\mathbf{R}/(3\varepsilon)$, где $\mathbf{R} = \overrightarrow{OC}$ — вектор, проведенный от центра большого шара O к центру малого шара C. Умножив это поле на заряд малого шара, найдем

$$\mathbf{F} = (4\pi\rho)^2 a^3 \mathbf{R}/(9\varepsilon).$$

§ 17. Потенциальность электростатического поля

1. Неподвижный точечный заряд q возбуждает в вакууме электрическое поле $\mathbf{E} = \dfrac{Q}{r^3}\,\mathbf{r}$. Пусть в этом поле перемещается другой точечный заряд q, переходя из начального положения *1* в конечное положение *2* вдоль произвольной кривой *12* (рис. 53). Работа, совершаемая силами поля при таком перемещении, выражается криволинейным интегралом

$$A_{12} = \int\limits_{12} q(\mathbf{E}\,d\mathbf{r}) = qQ \int\limits_{12} \frac{\mathbf{r}\,d\mathbf{r}}{r^3}.$$

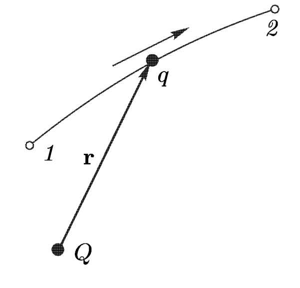
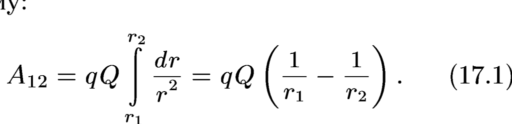


Рис. 53

Но $\mathbf{r}\,d\mathbf{r} = r\,dr$, в чем легко убедиться, дифференцируя тождество $\mathbf{r}^2 = r^2$. Поэтому криволинейный интеграл сводится к определенному:



$$A_{12} = qQ \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = qQ\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \qquad (17.1)$$

Таким образом, при любом выборе начальной и конечной точек *1* и *2* работа A_{12} не зависит от формы пути, а определяется только положениями этих точек. Силовые поля, удовлетворяющие такому условию, называются *потенциальными* или *консервативными* (см. т. I, § 24). Следовательно, *электростатическое поле точечного заряда есть поле потенциальное.*

Доказанное справедливо для электрического поля любой системы неподвижных точечных зарядов. Это непосредственно следует из принципа суперпозиции электрических полей и из известной теоремы

механики, согласно которой работа результирующей силы равна сумме работ составляющих сил.

В общем случае любую систему зарядов можно мысленно разделить на достаточно малые части, каждая из которых может рассматриваться как точечный заряд. В число таких зарядов должны быть включены и индукционные заряды на проводниках и диэлектриках. Поэтому *всякое электростатическое поле, независимо от того, создается оно в вакууме или в веществе, является полем потенциальным.* Это было бы очевидно для микрополя $\mathbf{E}_{\text{микро}}$, если бы возбуждающие его заряды были неподвижны. Макроскопическое поле $\mathbf{E}_{\text{макро}}$ было бы также потенциально, так как оно получается из потенциального поля $\mathbf{E}_{\text{микро}}$ путем его усреднения. Однако электроны и атомные ядра движутся, а электрические микрополя не потенциальны. Поэтому уравнения макроскопической электростатики в общем случае нельзя получить из уравнений электростатики для микрополей. Нужны уравнения микрополей для движущихся зарядов. Таковыми являются уравнения электронной теории Лоренца. Но мы не будем обосновывать электростатику с помощью уравнений электронной теории Лоренца. В конце концов, макроскопические уравнения Максвелла устанавливаются постулативно. А из этих уравнений, как будет видно из дальнейшего, непосредственно следует, что электростатическое макрополе потенциально.

2. Допустим, что в электростатическом поле заряд переносится из точки *1* в точку *2* сначала по пути *132*, а затем по пути *142* (рис. 54).

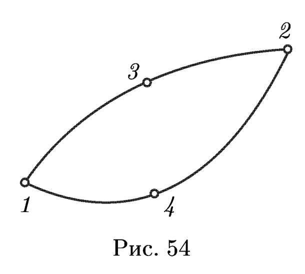


Рис. 54

В обоих случаях работы сил поля одинаковы: $A_{132} = A_{142}$. Если заряд переносится по замкнутому пути *13241*, то на участке *241* работа изменит знак: $A_{241} = -A_{142}$, а потому $A_{132} + A_{241} = A_{13241} = 0$. Значит, при перемещении заряда по любому замкнутому пути работа в электростатическом поле равна нулю. Если перемещаемый заряд единичный, то работа сводится к криволинейному интегралу $\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{s}$. Такой интеграл называется *циркуляцией вектора* $\mathbf{E}$ по соответствующему замкнутому контуру. Таким образом, для любого замкнутого контура

$$\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{s} = 0. \tag{17.2}$$

Это приводит к другому определению потенциальности поля, эквивалентному данному выше. *Векторное поле* $\mathbf{E}$ *называется потенциальным, если циркуляция вектора* $\mathbf{E}$ *по любому замкнутому контуру равна нулю.*

Уравнение (17.2) есть второе из фундаментальных уравнений электростатики, о которых говорилось в § 15.

3. Из уравнения (17.2) следует, что *линии электростатического поля не могут быть замкнутыми.* Для доказательства допустим противное. Пусть силовая линия замкнута. Возьмем ее в качестве контура интегрирования C. При обходе этого контура в положительном направлении силовой линии подынтегральное выражение в интеграле $\oint \mathbf{E}\,d\mathbf{s}$, а с ним и самый интеграл существенно положительны. Это противоречит уравнению (17.2), что и доказывает наше утверждение.

Невозможны также квазизамкнутые линии потенциального поля. Так мы называем силовые линии, обладающие следующим свойством. Силовая линия, выйдя из любой точки A, извивается и возвращается в сколь угодно малую окрестность той же точки, никогда, однако, не проходя точно через A. Для доказательства опять предположим противное. Пусть A и B — бесконечно близкие точки, через которые проходит силовая линия. Замкнем ее бесконечно малым отрезком, соединяющим эти точки. Так как интеграл $\int \mathbf{E}\,d\mathbf{s}$ вдоль этого отрезка также бесконечно мал, то для циркуляции $\oint \mathbf{E}\,d\mathbf{s}$ вдоль образовавшегося замкнутого контура получилась бы величина, отличная от нуля. А это невозможно.

4. С помощью формулы (17.2) можно строго доказать граничное условие (14.5) для вектора $\mathbf{E}$. Пусть $ABCD$ — бесконечно малый прямоугольный контур, стороны которого AD и BC проходят по разные стороны границы раздела двух сред (рис. 55). Применим к нему формулу (17.2). Боковые стороны AB и CD возьмем бесконечно короткими по сравнению с AD и BC. Тогда можно пренебречь вкладом в циркуляцию, вносимым этими сторонами, и написать

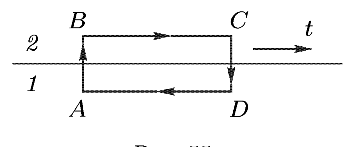


Рис. 55

$$\oint\limits_{ABCD} \mathbf{E}\,d\mathbf{s} = (E_{2t} - E_{1t})\,l,$$

где l — длина стороны BC или равной ей стороны AD. Из обращения в нуль этой циркуляции получаем

$$E_{1t} = E_{2t}. \tag{17.3}$$

§ 18. Электрический потенциал

1. Для потенциальных полей можно ввести понятие *потенциала* или, точнее, *разности потенциалов. Разностью потенциалов* $\varphi_1 - \varphi_2$ *между точками 1 и 2 называется работа, совершаемая силами поля при перемещении единичного положительного заряда по произвольному пути из точки 1 в точку 2.* Такое определение имеет смысл потому, что для потенциальных полей эта работа *не зависит от формы пути*, а определяется только положениями начальной и конечной точек его. Потенциалу какой-либо произвольной точки поля O можно условно приписать любое значение φ_0. Тогда потенциалы всех прочих

точек поля определятся однозначно. Если изменить значение φ_0, то потенциалы в точке O и во всех других точках изменятся на одну и ту же постоянную. Таким образом, *потенциал определен с точностью до аддитивной постоянной.* Значение этой постоянной не играет роли, так как физические явления зависят только от напряженностей электрических полей. Электрические же поля связаны не с абсолютными значениями потенциалов, а с их *разностями* между различными точками пространства. От значения аддитивной постоянной эти поля не зависят. В теоретической физике за нулевой потенциал удобно принимать потенциал бесконечно удаленной точки пространства. На практике за нулевой потенциал обычно принимают потенциал Земли.

Работа сил электростатического поля при перемещении заряда q по произвольному пути из начальной точки *1* в конечную точку *2* определяется выражением

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{18.1}$$

В гауссовой и СГСЭ-системах единиц за единицу потенциала принимается разность потенциалов между такими двумя точками, что при перемещении электростатической единицы электричества из одной точки в другую электрическое поле совершает работу в один эрг. Эта единица не получила специального названия. Практической единицей потенциала является *вольт.* Вольт есть разность потенциалов между такими точками, когда при перемещении одного кулона электричества из одной точки в другую электрическое поле совершает работу в один джоуль. Приближенно

$$1\ \text{В} = \frac{1\ \text{Дж}}{1\ \text{Кл}} = \frac{10^7\ \text{эрг}}{3 \cdot 10^9\ \text{СГСЭ-ед. заряда}} = \frac{1}{300}\ \text{СГСЭ-ед. потенциала.}$$

2. Найдем связь потенциала с напряженностью электрического поля. Пусть *1* и *2* — бесконечно близкие точки, расположенные на оси x, так что $x_2 - x_1 = dx$. Работа при перемещении единицы заряда из точки *1* в точку *2* будет $E_x\,dx$. Та же работа равна $\varphi_1 - \varphi_2 = -d\varphi$. Приравнивая оба выражения, получим $d\varphi = -E_x\,dx$. Аналогичное рассуждение применимо для осей y и z. В результате получаются три соотношения:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{18.2}$$

Их можно объединить в одну векторную формулу:

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\mathbf{k}\right). \tag{18.3}$$

Так как $\mathbf{E}$ есть вектор, то и выражение, стоящее в скобках, есть также вектор. Он называется *градиентом скаляра* φ и обозначается $\operatorname{grad}\varphi$, или $\nabla\varphi$. Его можно рассматривать как произведение символического

вектора или оператора (4.6) на скаляр φ. Таким образом, по определению

$$\operatorname{grad}\varphi \equiv \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\mathbf{k}. \tag{18.4}$$

Теперь формулу (18.3) можно записать короче, а именно:

$$E = -\operatorname{grad}\varphi = -\nabla\varphi. \tag{18.5}$$

Произвольное векторное поле $\mathbf{E}(x, y, z)$ характеризуется тремя скалярными функциями — $E_x(x, y, z)$, $E_y(x, y, z)$, $E_z(x, y, z)$. Потенциальность накладывает на поле столь сильное ограничение, что для его характеристики достаточно *одной* скалярной функции, а именно потенциала $\varphi(x, y, z)$. Зная эту функцию, можно вычислить напряженность поля по формуле (18.3) или (18.5). Формулы (18.3) и (18.5) с особой отчетливостью показывают несущественность аддитивной постоянной в выражении для потенциала: при дифференцировании аддитивная постоянная выпадает и не влияет на результат. Те же формулы показывают, что напряженность поля имеет размерность потенциала, деленного на длину. На практике напряженность электрического поля часто выражают в вольтах на сантиметр или в вольтах на метр. Приближенно

$$1\ \text{В/см} \approx \frac{1}{300}\ \text{СГСЭ-единиц}, \quad 1\ \text{В/м} \approx \frac{1}{30\,000}\ \text{СГСЭ-единиц}.$$

3. Для выяснения геометрического смысла градиента введем понятие *эквипотенциальных поверхностей*, или *поверхностей равного потенциала*. Как показывает само название, эквипотенциальная поверхность есть такая поверхность, на которой потенциал остается постоянным. Он может меняться только при переходе от одной эквипотенциальной поверхности к другой. Возьмем на эквипотенциальной поверхности произвольную точку O и введем локальную систему координат с началом в этой точке (рис. 56). Ось z направим по нормали $\mathbf{n}$ к эквипотенциальной поверхности в сторону возрастания потенциала φ. То же направление примем за положительное направление нормали $\mathbf{n}$. Координатная плоскость xy, очевидно, совместится с касательной плоскостью к эквипотенциальной поверхности. Тогда в точке O $\partial\varphi/\partial x = \partial\varphi/\partial y = 0$. Кроме того, $\mathbf{k} = \mathbf{n}$, $\partial\varphi/\partial z \equiv \partial\varphi/\partial n$. Формула (18.4) переходит в

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathbf{n}. \tag{18.6}$$

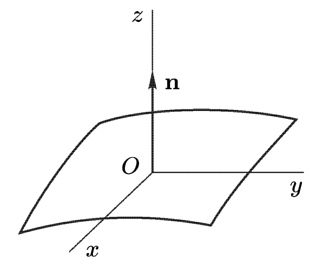


Рис. 56

Функция φ возрастает наиболее быстро в направлении $\mathbf{n}$. Поэтому можно дать следующее определение. *Градиент функции $\varphi(x, y, z)$ есть вектор, направленный в сторону максимального возрастания этой функции, а его длина равна производной функции φ в том же направлении.* Преимущество этого определения состоит в том, что оно

носит *инвариантный характер*, т. е. никак не связано с выбором какой бы то ни было системы координат.

Проведем теперь в каком-либо направлении единичный вектор $\mathbf{s}$. Проекция вектора $\mathbf{A} \equiv \operatorname{grad} \varphi$ на это направление будет $A_s = (\mathbf{As}) = (\mathbf{s} \operatorname{grad} \varphi)$. Но ту же величину можно представить в виде производной $A_s = \partial\varphi/\partial s$, в чем легко убедиться, проведя в направлении $\mathbf{s}$ координатную ось и воспользовавшись одной из формул (18.2). Таким образом, получается соотношение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = (\mathbf{s} \operatorname{grad} \varphi). \tag{18.7}$$

Производная функции φ в каком-либо направлении равна проекции вектора градиента этой функции на то же направление. Ясно, что эта производная максимальна, когда вектор $\mathbf{s}$ направлен вдоль $\operatorname{grad} \varphi$, т. е. по нормали к эквипотенциальной поверхности.

4. Вектор $\mathbf{E}$ направлен противоположно вектору градиента потенциала φ. Электрические силовые линии являются, таким образом, линиями, вдоль которых потенциал φ изменяется *наиболее быстро.* Они *нормальны* к эквипотенциальным поверхностям. Эквипотенциальные поверхности могут служить поэтому для наглядного изображения картины поля. Обычно их чертят так, что при переходе от одной эквипотенциальной поверхности к соседней потенциал получает *одно и то же* приращение $\Delta\varphi$. Чем меньше выбрано $\Delta\varphi$, тем детальнее будет представлено распределение потенциала в пространстве, а с ним и картина электростатического поля. Для большей наглядности чертят также силовые линии, ортогональные к семейству поверхностей равного потенциала. Там, где (при постоянном $\Delta\varphi$) соседние эквипотенциальные поверхности наиболее близко подходят друг к другу, напряженность электрического поля максимальна. Наоборот, в местах, где расстояния между ними велики, будет мала и напряженность поля $\mathbf{E}$. Поверхность проводника есть одна из эквипотенциальных поверхностей, и силовые линии должны подходить к ней нормально. Внутри проводника $E = 0$, а потому потенциал φ должен иметь одно и то же значение во всех точках проводника. Здесь эквипотенциальная поверхность вырождается в эквипотенциальный объем.

ЗАДАЧИ

1. Доказать формулу

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{A}) = (\mathbf{A} \operatorname{grad} \varphi) + \varphi \operatorname{div} \mathbf{A}. \tag{18.8}$$

2. Доказать формулу

$$\operatorname{grad}(\mathbf{ar}) = \mathbf{a}, \tag{18.9}$$

где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор.

3. Из трех концентрических бесконечно тонких металлических сфер с радиусами $R_1 < R_2 < R_3$, находящихся в вакууме, крайние заземлены, а средней сообщен электрический заряд Q. Найти напряженность электрического поля во всем пространстве.

Ответ. Электрическое поле радиально и определяется выражениями

$$E = \begin{cases} 0, & \text{если } r < R_1 \text{ или } R_3 < r < \infty, \\ \dfrac{R_1(R_2 - R_3)}{R_2(R_3 - R_1)} \dfrac{Q}{r^2}, & \text{если } R_1 < r < R_2, \\ \dfrac{R_3(R_2 - R_1)}{R_2(R_3 - R_1)} \dfrac{Q}{r^2}, & \text{если } R_2 < r < R_3, \end{cases}$$

где r — расстояние от центра сфер.

4. Из трех параллельных металлических пластинок A, B и C (рис. 57) крайние A и B неподвижны и соединены с гальванической батареей, поддерживающей разность потенциалов V между ними постоянной. Средняя пластинка C сначала находится в контакте с верхней пластинкой A. Затем с помощью изолирующей ручки она перемещается по направлению к нижней пластинке. Пренебрегая краевыми эффектами, найти напряженности полей E_1 и E_2 в зазорах между пластинками в зависимости от переменного расстояния x.

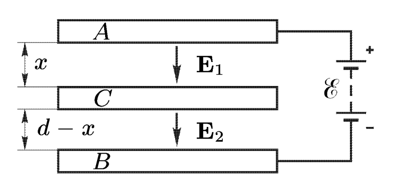


Рис. 57

Ответ. $E_1 = Vx/d^2$, $E_2 = V(x + d)/d^2$.

5. Внутри плоского воздушного конденсатора, обкладки которого соединены между собой, помещена поляризованная пластинка из электрета толщины h. Вектор поляризации пластинки $\mathbf{P}$ перпендикулярен к ее боковым граням. Пренебрегая зависимостью поляризованности электрета $\mathbf{P}$ от электрического поля, определить напряженность и электрическое смещение поля внутри и вне пластинки, если расстояние между обкладками конденсатора AB равно d.

Ответ. В воздушном зазоре $E = D = 4\pi hP/d$. Внутри пластинки $E = -4\pi(d - h)P/d$, $D = 4\pi hP/d$.

§ 19. Вычисление потенциала по напряженности поля

Если известен потенциал $\varphi(x, y, z)$, то напряженность электрического поля можно вычислить его *дифференцированием* по координатам. Обратная задача вычисления потенциала по напряженности поля решается *интегрированием.* Исходными являются формулы (18.2) или им аналогичные. Рассмотрим простейшие примеры на вычисление потенциала.

1. Потенциал поля точечного заряда q в однородном диэлектрике. Электрическое смещение поля определяется выражением (13.10). Из него получаем

$$E = E_r = \frac{q}{\varepsilon r^2} = -\frac{d\varphi}{dr},$$

или после интегрирования

$$\varphi = -\frac{q}{\varepsilon r} + \text{const}.$$

В качестве постоянной интегрирования следует взять нуль, чтобы при $r = \infty$ потенциал φ обратился в нуль. Тогда

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r}. \tag{19.1}$$

2. Потенциал поля системы точечных зарядов в однородном диэлектрике. На основании принципа суперпозиции из (19.1) получаем

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\sum \frac{q_i}{r_i}, \tag{19.2}$$

где r_i — расстояние i-го заряда до точки наблюдения. Суммирование ведется по всем зарядам.

3. Потенциал непрерывно распределенных электрических зарядов. Рассматривая заряды элементов объема и поверхности как точечные и применяя формулу (19.2), для потенциала φ в однородном диэлектрике можно написать

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{\sigma(\mathbf{r}')\,dS'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{19.3}$$

Здесь dV' и dS' — элементы объема и заряженных поверхностей с центрами в точке $\mathbf{r}'$. Интегрирование ведется по всем объемным и поверхностным зарядам. Если диэлектрик неоднороден, то интегрирование надо распространить и на поляризационные заряды. Включение таких зарядов автоматически учитывает влияние среды, и величину ε вводить не надо:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}') + \rho_{\text{пол}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' + \int \frac{\sigma(\mathbf{r}') + \sigma_{\text{пол}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dS'. \tag{19.4}$$

Формула (19.3) является частным случаем этой формулы. Влияние поляризационных зарядов в ней учитывается посредством ε.

4. Потенциал бесконечной равномерно заряженной плоскости в однородном диэлектрике. В этом случае

$$\varphi = \begin{cases} -2\pi\sigma x/\varepsilon + C & \text{при } x > 0, \\ +2\pi\sigma x/\varepsilon + C & \text{при } x < 0, \end{cases} \tag{19.5}$$

Начало координат помещено на заряженной плоскости, ось X направлена перпендикулярно к ней. Постоянная C одна и та же в обоих выражениях, так как при переходе через заряженную плоскость потенциал должен изменяться непрерывно.

Никаким выбором постоянной C нельзя добиться обращения потенциала в нуль в бесконечности. Это связано с тем, что в рассматриваемом случае в бесконечности имеются не только поля, но и сами заряды. Для плоскости конечных размеров выражениями (19.5) можно пользоваться только при таких x, которые малы по сравнению с размерами плоскости. При x порядка размеров плоскости выражение для φ

становится очень сложным. На очень больших расстояниях плоскость ведет себя как точечный заряд. Разумеется, для конечной плоскости постоянную C в формулах (19.5) всегда можно выбрать так, чтобы в бесконечности потенциал обратился в нуль. Однако для вычисления C надо знать выражение для потенциала не только вблизи плоскости, но и на любых расстояниях от нее.

ЗАДАЧИ

Всюду предполагается, что диэлектрик однороден.

1. Вычислить потенциал поля точечного диполя.

Ответ.

$$\varphi = \frac{(\mathbf{pr})}{\varepsilon r^3}. \tag{19.6}$$

2. Дифференцированием (19.6) вычислить напряженность поля точечного диполя.

3. Вычислить потенциал поля шара радиуса a, равномерно заряженного по объему.

Ответ. Вне шара φ определяется формулой (19.1). Внутри шара

$$\varphi = \frac{2\pi\rho}{3\varepsilon}(3a^2 - r^2). \tag{19.7}$$

4. Вычислить потенциал поля сферы радиуса a, равномерно заряженной по поверхности.

Ответ. Вне сферы φ определяется формулой (19.1). Внутри сферы

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon a} = \text{const}. \tag{19.8}$$

5. Вычислить потенциал поля равномерно заряженной бесконечной плоскопараллельной пластинки толщины $2a$.

Ответ. Внутри пластинки

$$\varphi = -\frac{2\pi\rho}{\varepsilon}(x^2 + a^2) + C, \tag{19.9}$$

вне пластинки

$$\varphi = \begin{cases} -4\pi\rho a x/\varepsilon + C & \text{при} \quad x > a, \\ +\,4\pi\rho a x/\varepsilon + C & \text{при} \quad x < a. \end{cases} \tag{19.10}$$

Начало координат помещено в средней плоскости пластинки, ось X направлена нормально к ней.

6. Вычислить потенциал поля бесконечно длинной и бесконечно тонкой прямолинейной нити, равномерно заряженной электричеством с линейной плотностью $\varkappa$.

Ответ.

$$\varphi = -\frac{2\varkappa}{\varepsilon}\ln r + C, \tag{19.11}$$

где r — расстояние до нити.

7. Вычислить потенциал поля бесконечно длинного цилиндра радиуса a, равномерно заряженного по объему.

Ответ.

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{\pi}{\varepsilon}\,\rho(a^2 - r^2) + C & \text{при } r \leqslant a, \\ -\dfrac{2\pi a^2 \rho}{\varepsilon}\,\ln\dfrac{r}{a} + C & \text{при } r \geqslant a. \end{cases} \tag{19.12}$$

8. Вычислить потенциал поля бесконечно длинного цилиндра радиуса a, равномерно заряженного по поверхности.

Ответ.

$$\varphi = \begin{cases} C & \text{при } r \leqslant a, \\ -\dfrac{2\pi a\sigma}{\varepsilon}\,\ln\dfrac{r}{a} + C & \text{при } r \geqslant a. \end{cases} \tag{19.13}$$

9. Показать, что эквипотенциальными поверхностями двух параллельных бесконечно длинных прямых, равномерно заряженных электричествами противоположных знаков, являются круговые цилиндры, оси которых параллельны рассматриваемым линиям и лежат с ними в одной плоскости.

Указание. Уравнение эквипотенциальной поверхности имеет вид $r_1/r_2 = \text{const}$, где r_1 и r_2 — расстояния до рассматриваемых прямых. Записав это уравнение в координатах, нетрудно убедиться, что эквипотенциальными поверхностями будут круговые цилиндры.

§ 20. Измерение разности потенциалов электрометром. Электрический зонд

1. Электроскоп, листочки или стрелка которого окружены металлической оболочкой, может служить *электрометром*, т. е. прибором для измерения разности потенциалов между двумя проводниками. Один из проводников соединяют с шариком электрометра, а другой — с оболочкой (рис. 58). Стрелка электрометра примет потенциал тела A, оболочка — потенциал тела B. Возникнет электрическое поле с силовыми линиями, идущими от оболочки к стрелке или обратно. Угол отклонения стрелки определяется напряженностью и конфигурацией этого поля. Но поле внутри замкнутой металлической оболочки совершенно не зависит от наружного поля. Оно однозначно определяется разностью потенциалов между оболочкой и стрелкой. Следовательно, угол отклонения стрелки может служить мерой разности потенциалов между телами A и B. Электрометр можно проградуировать, чтобы сразу отсчитывать разность потенциалов в вольтах. Обычно в качестве тела B берут Землю, т. е. оболочку электрометра заземляют. Тогда электрометр покажет потенциал тела A относительно Земли.

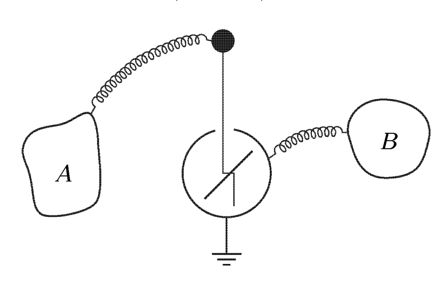


Рис. 58

2. В принципе безразлично, что заземлять: оболочку или шарик. От этого зависит только направление силовых линий, но не их конфигурация и значение напряженности поля внутри оболочки. Угол отклонения стрелки в обоих случаях будет одинаков. Установим электрометр на диэлектрике и заземлим его оболочку. Затем с помощью наэлектризованной палочки зарядим шарик. Стрелка отклонится. Заземлим теперь шарик, а оболочку изолируем. Той же палочкой электризуем оболочку, стрелка отклоняется так же. Но стрелка электрометра защищена от влияния внешних электрических зарядов, так как она окружена металлической оболочкой. Почему же при электризации оболочки стрелка отклоняется? Дело в том, что ее защита *не полная.* Оболочка не замкнута. В ней есть отверстие, через которое проходит металлический стержень, соединяющий стрелку с шариком электрометра. Электричество, сообщенное наружной поверхности оболочки, индуцирует заряды на шарике, которые по стержню переходят на стрелку электрометра. Заряженные стрелка и стержень оттягивают часть электричества с наружной поверхности оболочки на внутреннюю. В результате появляется электрическое поле не только снаружи, но и внутри оболочки. Мы видим, что электрометр только тогда может служить измерительным прибором, когда его стрелка защищена от внешних электрических полей не полностью. Но связь стрелки с внешними телами должна быть слабой. Для этого отверстие в оболочке, шарик электрометра и наружная часть стержня, соединяющего шарик со стрелкой, должны быть малыми. Иначе на этих частях электрометра могли бы возникать заметные заряды, индуцированные посторонними внешними телами. Переходя на стрелку, такие заряды вносили бы заметные искажения в измеряемую разность потенциалов. По той же причине провода, соединяющие тела A и B с шариком и оболочкой электрометра, должны быть тонкими.

3. Поучителен также следующий опыт. Пробный шарик на изолирующей ручке соединен гибким проводом с шариком электрометра, оболочка которого заземлена (рис. 59). При перемещении пробного шарика по поверхности заряженного металлического тела C показание электрометра не меняется. Это и понятно. Электрометр измеряет разность потенциалов между шариками. Потенциал же пробного шарика не зависит от того, какой точки проводящего тела C он касается. В аналогичном опыте, описанном в § 11 (см. рис. 33), электрометр не чувствовал заряда, снятого с впадины B. Отсюда не следует, что в точке B поверхностная плотность электричества равна нулю. Можно лишь сказать, что прежний опыт недостаточно чувствителен, чтобы ее обнаружить.

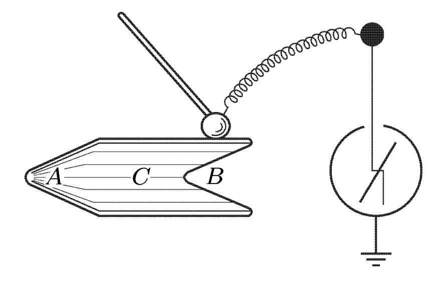


Рис. 59

Новый опыт позволяет определенно утверждать, что плотность электричества у B хотя и мала, но не равна нулю. Если бы это было не так, то стрелка электрометра не могла бы отклоняться, когда незаряженным пробным шариком касаются проводника C в точке B. Заряд, перешедший с тела C на пробный шарик и электрометр, не зависит от положения точки касания. От этого может зависеть только время зарядки электрометра. Оно хотя и очень мало, но всегда конечно. Когда пробный шарик касается острия A, зарядка происходит всего быстрее; когда он касается впадины B, электрометр заряжается медленнее.

4. Для измерения потенциала в различных точках жидкого или газообразного диэлектрика можно пользоваться методом *электрического зонда*. Зонд представляет собой малое металлическое тельце (кончик проволочки, выступающий из диэлектрической трубочки, шарик или диск), соединенное проволокой с шариком электрометра, оболочка которого заземлена. Он вводится в ту точку диэлектрика, потенциал которой надо измерить. Очевидно, электрометр укажет разность потенциалов между стрелкой и оболочкой или, что то же самое, между зондом и Землей. Однако зонд, соединенный с электрометром, вообще говоря, существенно меняет потенциал той точки пространства, в которую он вносится. Причиной этого являются индукционные заряды, появляющиеся на зонде и шарике электрометра, с которым он соединен.

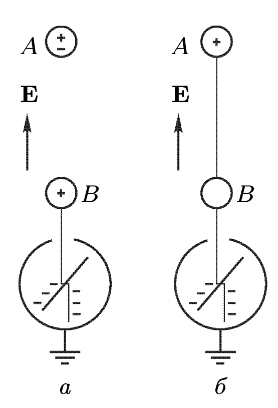


Рис. 60

Допустим сначала, что маленький зонд A изолирован (рис. 60 *а*). При введении в электрическое поле зонд поляризуется. Положительные и отрицательные заряды немного смещаются в противоположных направлениях. Так как эти смещения малы, то внесение зонда исказит поле в окрестности точки A очень мало. На шарике и стрелке электрометра также возникают индукционные заряды противоположных знаков. Соединим теперь тонкой проволокой зонд A с шариком электрометра B (рис. 60 *б*). Тогда на зонде A останется электричество только одного знака, электричество противоположного знака перейдет на электрометр. Так как количество перешедшего электричества очень мало, то потенциал шарика B и стержня электрометра при этом практически не изменится. Не то будет с потенциалом зонда A. Геометрические размеры зонда малы. Небольшой заряд, ушедший с зонда, существенно меняет его потенциал. Зонд A принимает потенциал шарика и стержня электрометра. Таким образом, соединение зонда с электрометром практически не сказывается на угле отклонения стрелки. Показание электрометра не имеет никакого отношения к потенциалу, существовавшему в точке A до внесения в нее зонда.

Для возможности измерения потенциала необходимо, чтобы при внесении зонда в точку A зонд и соединенный с ним шарик электромет-

ра приняли потенциал, существовавший в точке A до внесения зонда. Этого можно достигнуть, убирая индукционные заряды, образующиеся на зонде. В *капельном зонде* телом A служит малое ведерко, наполненное проводящей жидкостью. В дне ведерка имеется малое отверстие. Капли жидкости, уходящие через это отверстие, уносят индукционные заряды, образующиеся на зонде. При этом заряды противоположного знака переходят с зонда на стержень и стрелку электрометра. Благодаря этому угол отклонения стрелки изменяется. В установившемся состоянии, когда зонд оказывается незаряженным, потенциал зонда становится равным потенциалу окружающего пространства. А так как зонд соединен проводником с шариком электрометра B, то потенциал последнего будет таким же. Электрометр покажет тот потенциал, который надо измерить.

Удаление индукционных зарядов с зонда можно осуществить и другими способами. Например, зондом может служить кончик металлической проволоки, выступающий из диэлектрической трубочки, играющей роль газовой горелки (*пламенный зонд*). Благодаря высокой температуре пламени окружающий воздух немного ионизуется и становится проводящим. Образующиеся ионы снимают индукционные заряды с зонда и уносятся потоком окружающего газа. Аналогичная идея используется в *радиоактивном зонде*. На зонд наносится небольшое количество радиоактивного вещества, которое и создает нужную ионизацию окружающего газа. В том и другом случае на зонде устанав-

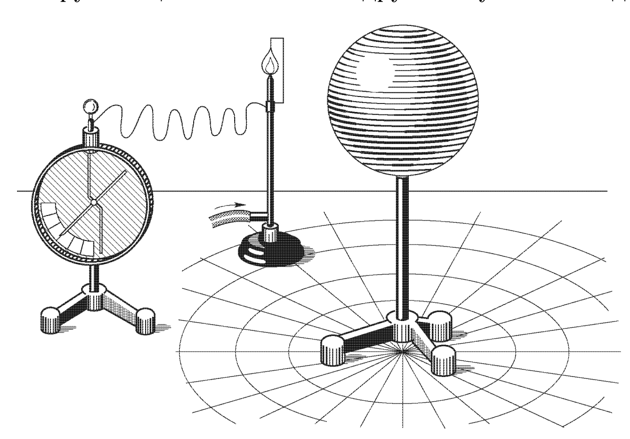


Рис. 61

ливается потенциал, равный потенциалу окружающего пространства до внесения в него зонда. То же самое происходит в проводящих жидкостях (электролитах), в которые погружены заряженные электроды. Здесь удаление индуцированных зарядов с зонда обеспечивается электрической проводимостью самой жидкости.

5. Следующий демонстрационный опыт может служить для иллюстрации действия зонда. Холодный пламенный зонд помещается вблизи

большого изолированного металлического шара (рис. 61). Пока зонд холодный, стрелка удаленного от него электрометра не отклоняется, если даже шар сильно зарядить. Но отклонение стрелки становится большим, если зажечь светильный газ, вытекающий из трубочки зонда. При приближении электрометра к шару отклонение стрелки увеличивается, при удалении — уменьшается. Стрелка стоит на месте при перемещении зонда по сферической эквипотенциальной поверхности, концентрической с поверхностью шара.

§ 21. Электрическое поле Земли

1. Электрическим зондом можно измерять и напряженность поля в диэлектриках, например газах. Надо измерить потенциал φ в различных точках пространства, а затем вычислить его градиент. Проще и точнее, однако, напряженность поля измеряется непосредственно. Один из способов состоит в следующем. Две параллельные металлические пластины (воздушный конденсатор) устанавливаются перпендикулярно к направлению измеряемого электрического поля (рис. 62). Пластины соединяются между собой через баллистический гальванометр, с помощью которого можно измерять величину заряда, прошедшего через цепь. Так как пластины соединены, то их потенциалы одинаковы, а напряженность электрического поля между ними равна нулю. Поле существует только снаружи пластин и связано с поверхностной плотностью электричества соотношением $E = 4\pi\sigma$ (в газах различием между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ можно пренебречь). Если зазор между пластинами мал по сравнению с их размерами, то можно также пренебречь влиянием краев пластин, считая величину σ постоянной. Пластины быстро поворачивают на 90° в вертикальное положение. При этом через баллистический гальванометр проходит заряд $q = S\sigma$, где S — площадь пластины. Измерив q, можно вычислить σ, а затем и напряженность поля E.

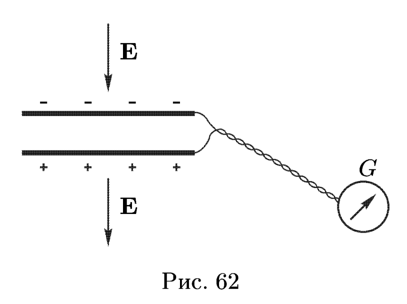


Рис. 62

2. Подобные измерения показали, что земной шар заряжен отрицательно. Земное электрическое поле меняется во времени. Эти изменения могут быть регулярными (суточными и годичными) и нерегулярными. В среднем напряженность поля у самой поверхности Земли составляет 130 В/м. Между двумя уровнями, отстоящими друг от друга на рост человека, существует разность потенциалов примерно 200 В. Человек не чувствует этой разности потенциалов и его не поражает ток потому, что сам он является хорошим проводником электричества. Как и всякий проводник, тело человека сильно искажает электрическое поле. Электрические силовые линии подходят к поверхности тела человека нормально, а эквипотенциальные поверхности огибают его совершенно так же, как они огибают металлический предмет. Все точки тела человека находятся под одним и тем же потенциалом.

Зная напряженность поля вблизи земной поверхности, нетрудно подсчитать, что полный отрицательный заряд Земли составляет около $6 \cdot 10^5$ Кл. На высоте 1 км напряженность земного поля падает примерно до 40 В/м. На высоте 10 км поле не превышает нескольких вольт на метр. На высоте 50 км и больше земное поле едва заметно. Большая часть падения потенциала приходится на малые высоты. Полная разность потенциалов

между поверхностью Земли и верхними слоями атмосферы составляет почти 400 000 В. Эти данные показывают, что земная атмосфера заряжена положительно.

3. Воздух обладает электрической проводимостью. Она обусловлена ионами, образующимися в результате ионизации молекул и атомов космическими лучами Благодаря проводимости в атмосфере текут токи, стремящиеся разрядить Землю. Средняя плотность тока порядка 10^{-6} мкА/м^2. Полный электрический ток, достигающий земной поверхности, равен приблизительно 1800 А. Заряд Земли, как указывалось выше, равен примерно $6 \cdot 10^5$ Кл. Используя эти данные, нетрудно подсчитать, что заряд Земли должен был бы убывать в два раза примерно через каждые 4 минуты Земля должна была бы полностью потерять свой заряд менее чем за полчаса. Если этого не происходит, то существуют какие-то процессы, непрерывно заряжающие Землю отрицательным электричеством и поддерживающие ее средний заряд неизменным. Долгое время оставалось загадкой, что это за процессы. В настоящее время, по-видимому, можно считать установленным, что заряд Земли поддерживается грозовой деятельностью атмосферы.

Гроза является одним из величественных явлений природы. Хотя электрическая природа молнии давно установлена, в учении об атмосферном электричестве еще очень много неисследованного и неясного. Далеко не ясен даже механизм возникновения электрических зарядов в атмосфере. Однако, по-видимому, можно считать установленным, что заряд земного шара поддерживается молниями, проскакивающими между атмосферой и поверхностью Земли. С каждым ударом молнии на Землю низвергается в среднем 20–30 Кл отрицательного электричества. Ричард Фейнман (1918–1988) в своих известных лекциях по физике приводит следующие аргументы в подтверждение этой точки зрения. При ясной погоде над поверхностью моря систематически измерялся электрический ток, идущий на Землю. Оказалось, что этот ток, если его усреднить по земной поверхности, испытывает суточные вариации. Ток в максимуме примерно на 15 % больше среднего суточного тока, причем максимум приходится примерно на 19 часов по лондонскому времени. Такие же вариации испытывает и напряженность земного электрического поля. Самое интересное здесь то, что момент максимума *один и тот же* для всех точек земного шара *не по местному времени, а по единому* (например, лондонскому) *времени.* Это не так уж удивительно, потому что верхние слои атмосферы (ионосфера) сильно ионизованы и обладают высокой электрической проводимостью. Высокой электрической проводимостью обладает и морская вода. Имеются, таким образом, две хорошо проводящие сферические оболочки, между которыми и возбуждается электрическое поле Земли, как между обкладками сферического конденсатора. В самих оболочках из-за их высокой электрической проводимости не может возникнуть сколько-нибудь существенной разности потенциалов. С другой стороны, установлено, что максимум грозовой деятельности, усредненный по всей поверхности земного шара, приходится также на 19 часов по лондонскому времени. Это подтверждает гипотезу о наличии связи между грозовой деятельностью атмосферы и электрическим полем Земли.

ЗАДАЧА

Земля непрерывно облучается космическими лучами высокой энергии, приходящими из пространства вне Солнечной системы. Космические лучи в основном состоят из протонов, средняя энергия $\mathscr{E}$ которых составляет несколько миллиардов электронвольт. Интенсивность I потока протонов, достигающих земной атмосферы, равна примерно одному протону на квад-

ратный сантиметр в секунду. Оценить время, необходимое для того, чтобы протоны космических лучей повысили потенциал Земли настолько, чтобы они уже не могли попадать на поверхность Земли из-за электрического отталкивания. Объяснить, почему и после этого времени протоны космических лучей продолжают достигать земной поверхности.

Ответ. $t = \mathscr{E}/(4\pi RIe^2) \approx 10^6$ с ≈ 10 сут (R — радиус Земли, e — заряд протона; числовой ответ получен при $\mathscr{E}/e \sim 10^9$ В). В действительности потенциал Земли не может достигать такого значения, так как наряду с приходом протонов существует обратный процесс, в котором земная атмосфера теряет положительные заряды в виде протонов и положительных ионов, уходящих в космическое пространство под действием возникшего электрического поля.

§ 22. Общая задача математической электростатики

1. Если известен потенциал φ как функция пространственных координат, то его дифференцированием можно вычислить напряженность электрического поля по формуле (18.5). Зная диэлектрическую проницаемость, можно затем определить вектор электрического смещения $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ и по теореме Гаусса (13.5) найти объемную плотность свободных зарядов ρ. Поверхностная плотность свободных зарядов найдется по скачку нормальной составляющей вектора $\mathbf{D}$ из соотношения (14.1).

Наоборот, если известны плотности свободных и связанных зарядов, то интегрированием можно вычислить потенциал по формуле (19.3) или (19.4), а затем найти и все остальные величины. Как правило, интегралы (19.3) или (19.4) не берутся аналитически, но они всегда могут быть найдены численно.

Реальные задачи, к которым приводит электростатика, гораздо сложнее. Дело в том, что связанные заряды, а также распределение свободного электричества по поверхности проводников не бывают известными, а сами подлежат определению. Общая задача математической электростатики формулируется следующим образом.

В диэлектрической среде заданы расположение и форма всех проводников. Известна диэлектрическая проницаемость среды ε между проводниками и объемная плотность свободных электрических зарядов во всех точках диэлектриков. Кроме того, известны: а) либо потенциалы всех проводников, б) либо заряды всех проводников, в) либо заряды некоторых проводников и потенциалы всех остальных проводников. Требуется определить напряженность электрического поля во всех точках пространства и распределение электричества по поверхностям проводников.

2. Задача сводится к нахождению потенциала φ как функции пространственных координат x, y, z. Найдем дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять эта функция. Для этого теорему Гаусса (13.5) запишем в виде $\operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = 4\pi\rho$ и подставим в нее выражение для $\mathbf{E}$ из формулы (18.5). Получим

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad}\varphi) = -4\pi\rho, \qquad (22.1)$$

или в координатной форме

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=-4\pi\rho. \tag{22.1a}$$

Если диэлектрик однороден (ε не зависит от координат), то

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}, \tag{22.2}$$

или

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \tag{22.2a}$$

Введем так называемый *оператор Лапласа*, или *лапласиан*:

$$\Delta\equiv\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{22.3}$$

Тогда

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\equiv\Delta\varphi\equiv\nabla^2\varphi, \tag{22.4}$$

и уравнение (22.2a) запишется в более кратком виде:

$$\Delta\varphi=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \tag{22.5}$$

Это уравнение называется *уравнением Пуассона.* При отсутствии свободных зарядов ($\rho=0$) оно переходит в *уравнение Лапласа*:

$$\Delta\varphi=0. \tag{22.6}$$

Общая электростатическая задача сводится к нахождению решения дифференциального уравнения (22.1), удовлетворяющего всем условиям, перечисленным выше. Можно показать, что такая задача не может иметь более одного решения [1]. Для того чтобы не повторять дважды одни и те же математические выкладки, мы отложим доказательство этой *теоремы единственности* до § 29. Нахождение самого решения, вообще говоря, задача очень сложная. Аналитические решения известны лишь для немногих частных случаев. Однако если удалось угадать функцию φ, удовлетворяющую всем условиям задачи, то можно утверждать, что она и будет искомым (единственным) решением задачи. В этом и состоит значение теоремы единственности.

Не всегда требуется задавать заряды или потенциалы тел *во всем пространстве.* Если требуется найти электрическое поле в полости, окруженной проводящей оболочкой, то это достаточно сделать только для тел, заключенных *внутри самой полости.* Наоборот, если требуется найти внешнее поле, то надо задать заряды или потенциалы только тел *вне проводящей оболочки*, а также общий заряд или потенциал на внешней поверхности этой оболочки. Теорема единственности распространяется и на эти случаи.

[1] Если заданы только заряды всех проводников, то потенциал φ определяется с точностью до несущественной аддитивной постоянной.

Приведем два примера на применение теоремы единственности.

3. Пусть в вакууме распределено электричество с объемной плотностью ρ. Потенциал электрического поля φ_0 будет удовлетворять уравнению $\Delta\varphi_0 = -4\pi\rho$. Заполним все пространство однородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, оставляя свободные заряды на прежних местах. Тогда потенциал изменится и будет удовлетворять уравнению (22.5). Сравнив оба уравнения и применив теорему единственности, найдем $\varphi = \varphi_0/\varepsilon$. Таким образом, заполнение пространства однородным диэлектриком уменьшает потенциал, а с ним и напряженность электрического поля в ε раз. Результат остается верным и при наличии поверхностных зарядов.

4. В качестве второго примера рассмотрим теорему Фарадея (§ 11, п. 5). Часть результатов, относящихся к этой теореме, была получена нами интуитивно на основе физических соображений. Теорема единственности позволяет обосновать их строго. Пусть в полости, окруженной проводящей оболочкой, нет электрических зарядов. Потенциал внутри полости удовлетворяет уравнению Лапласа (22.6). На стенках полости он должен принимать какое-то постоянное значение C. Решение уравнения (22.6), удовлетворяющее этому условию, можно указать сразу. Это есть $\varphi(x, y, z) = C$. По теореме единственности других решений быть не может. Таким образом, внутри полости $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi = 0$, что и доказывает теорему Фарадея.

§ 23. Метод электрических изображений

1. В ближайших четырех параграфах рассматриваются некоторые задачи на вычисление электростатических полей. Все они решаются *искусственными методами.* Начнем с *метода электрических изображений.*

Допустим, что в пространстве имеется несколько точечных электрических зарядов. Пусть S — какая-либо эквипотенциальная поверхность, разделяющая все пространство на два полупространства: I и I' (рис. 63). Обозначим через q_1, q_2, ... точечные заряды в полупространстве I, а через q_1', q_2', ... — в полупространстве I'. Точечные заряды можно рассматривать как предельные случаи малых проводящих тел, например металлических шариков. К ним применима теорема единственности. Заданием величины и расположения зарядов q_1, q_2, ..., а также потенциала поверхности S поле в полупространстве I определяется однозначно. Аналогичное утверждение справедливо для полупространства I'. Поэтому если поверхность S сделать проводящей, то поле во всем пространстве не претерпит никаких изменений. Однако поля в полупространствах I и I' сделаются теперь совершенно независимыми друг от друга. В результате мы получаем решение сразу двух задач, вполне аналогичных друг другу. Одна из них состоит в следующем.

В полупространстве I по одну сторону от поверхности проводящего тела S находятся точечные заряды $q_1, q_2, \ldots$ Найти электрическое поле

в этом полупространстве. Конечно, это поле векторно складывается из полей зарядов q_1, q_2, ... и зарядов, индуцированных на поверхности тела S. Однако в силу теоремы единственности, поле индуцированных зарядов в полупространстве I эквивалентно полю, создаваемому зарядами q_1', q_2', ... При вычислении искомого поля проводящее тело можно убрать и заменить его точечными зарядами q_1', q_2', ... Совокупность этих последних зарядов называется *электрическим изображением* зарядов q_1, q_2, ... в поверхности S. Таким образом, задача об электрическом поле зарядов, расположенных по одну сторону от проводящей поверхности, сводится к отысканию электрических изображений этих зарядов в этой поверхности.

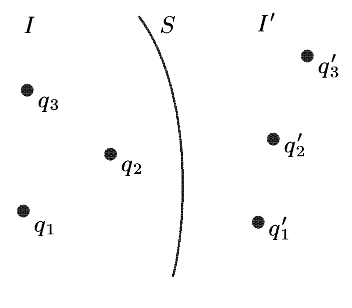


Рис. 63

Приведем два примера на метод электрических изображений.

2. Точечный заряд q над бесконечной плоской поверхностью проводника. Электрическим изображением заряда q в плоскости AB будет заряд противоположного знака $q' = -q$, расположенный по другую сторону плоскости AB на таком же расстоянии от нее, что и заряд q (рис. 64). Действительно, потенциал поля точечных зарядов q и q' в какой-либо точке C над поверхностью проводника будет

$$\varphi = q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right). \tag{23.1}$$

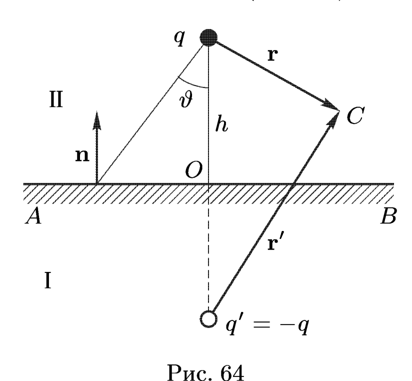


Рис. 64

Он обращается в нуль на плоскости AB, а потому эта плоскость является эквипотенциальной. Формула (23.1) и определяет потенциал поля в верхнем полупространстве I. В нижнем полупространстве II, заполненном проводящей средой, поле, разумеется, равно нулю. Таким образом, заряд q индуцирует на плоскости AB такие заряды, которые создают в верхнем полупространстве Iтакое же поле, что и вспомогательный точечный заряд $q' = -q$. Отсюда следует, что индуцированные заряды притягивают заряд q с той же силой, что и вспомогательный точечный заряд $q' = -q$, т. е. с силой $F = q^2/(2h)^2$, где h — расстояние между зарядом q и плоскостью AB. Поэтому эта сила называется *силой электрического изображения.* В нижнем полупространстве IIиндуцированные заряды компенсируют поле заряда q.

Поверхностная плотность электричества найдется по формуле

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} E_n = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}.$$

Простое вычисление дает

$$\sigma = -\frac{q}{2\pi h^2} \cos^3 \vartheta. \qquad (23.2)$$

Полный индуцированный заряд на бесконечной плоскости AB равен и противоположен по знаку заряду q. В этом легко убедиться непосредственным интегрированием выражения (23.2) по плоскости AB. Еще проще воспользоваться теоремой Гаусса. Окружим заряд q и индуцированные заряды бесконечно удаленной сферой с центром в точке O. На полусфере, проходящей внутри проводящей среды, поле и его поток равны нулю. На полусфере, проходящей в вакууме, поле совпадает с полем точечного диполя, а потому обратно пропорционально кубу радиуса. Сама поверхность полусферы возрастает пропорционально квадрату радиуса. Поток вектора **E** через нее в пределе $r \to \infty$ обращается в нуль. По теореме Гаусса должен обращаться в нуль и полный заряд, окруженный сферой. Но этот заряд равен $q + q_{\text{инд}}$, где $q_{\text{инд}}$ — полный индуцированный заряд на плоскости AB. Значит, $q_{\text{инд}} = -q$.

3. Точечный заряд q вблизи проводящей сферы (рис. 65). Допустим, что сфера S радиуса a заземлена, т. е. потенциал ее равен нулю. Величина точечного заряда q и его расстояние до центра сферы $R = OA$ заданы. Этими условиями решение электростатической задачи определяется однозначно. Поле внутри сферы, по теореме Фарадея, равно нулю. Найдем поле вне сферы. Выберем на прямой OA такую точку C, чтобы треугольник OBC был подобен треугольнику OBA. Поместим в этой точке вспомогательный точечный заряд q'. Если b и b' — длины отрезков BA и BC, то потенциал зарядов q и q' в точке B будет $(q/b + q'/b')$. Он обратится в нуль, если

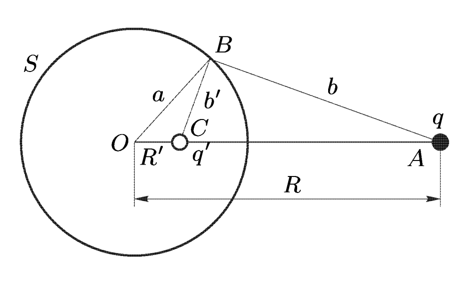


Рис. 65

$$q' = -\frac{b'}{b}\, q = -\frac{a}{R}\, q. \qquad (23.3)$$

Мы видим, что величина q' не зависит от положения точки B на сфере S. Следовательно, потенциал, создаваемый зарядами q и q', обращается в нуль во всех точках сферы S, т. е. q' является электрическим изображением заряда q в сфере S. Вне сферы на расстояниях r и r' от зарядов q и q' потенциал определяется выражением

$$\varphi = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'}. \qquad (23.4)$$

Общий заряд $q_{\text{инд}}$, индуцированный на сфере S, равен по абсолютной величине и совпадает по знаку с зарядом q'. Для доказательства

возьмем произвольную замкнутую поверхность Σ, окружающую сферу S, но не окружающую заряд q. На поверхности Σ поле **E** совпадает с полем точечных зарядов q и q', из которых q лежит вне Σ. Поэтому поток Φ этого поля через поверхность Σ будет $\Phi = 4\pi q'$. По теореме Гаусса тот же поток равен $\Phi = 4\pi q_{\text{инд}}$. Следовательно, $q_{\text{инд}} = q'$.

Если потенциал сферы S равен φ_0, то для решения задачи надо ввести еще один фиктивный заряд $q_0 = a\varphi_0$, поместив его в центре O сферы S. Поле во внешнем пространстве представится суперпозицией полей трех зарядов: q, q', q_0. Действительно, потенциал зарядов q и q' на сфере S равен нулю. Потенциал на S создается только зарядом q_0, т. е. равен $q_0/a = \varphi_0$.

Заметим, наконец, что электрические заряды q и q' обладают *свойством взаимности*. Оно заключается в следующем. Если q' является электрическим изображением заряда q, то, и обратно, заряд q является электрическим изображением заряда q'. Это замечание позволяет распространить изложенный метод на случай, когда точечный заряд внесен внутрь сферической полости, сделанной в проводящей среде.

4. Допустим теперь, что сфера S изолирована и задан ее заряд q_0. Нетрудно заметить, что в этом случае для определения поля во внешнем пространстве к зарядам q и q' надо добавить третий (фиктивный) заряд $q_0 - q'$, поместив его в центре сферы O. Рассмотрим специально частный случай, когда $q_0 = 0$. Индукционные заряды возбуждают во внешнем пространстве такое же поле, что и диполь длины R' с дипольным моментом $p = -q'R'$, который направлен по полю **E**, создаваемому зарядом q. Будем неограниченно удалять заряд q, одновременно увеличивая его так, чтобы поле **E** в центре сферы оставалось неизменным. В пределе получится однородное электрическое поле, в которое внесен проводящий шар. При этом $p = -q'R' = a^3q/R^2 = a^3E$, или в векторной форме

$$\mathbf{p} = a^3\mathbf{E}. \tag{23.5}$$

Этот результат уже был получен в § 16.

ЗАДАЧИ

1. Определить силу притяжения между точечным зарядом q и металлическим шаром (см. рис. 65). Рассмотреть два случая: 1) шар заземлен, 2) шар изолирован, а полный заряд его равен нулю.

Ответ. 1) $F = \dfrac{Ra}{(R^2 - a^2)^2}\, q^2$; 2) $F = \left(\dfrac{Ra}{(R^2 - a^2)^2} - \dfrac{a}{R^3}\right) q^2$.

2. В условиях предыдущей задачи найти работу A, которую надо совершить, чтобы точечный заряд q удалить в бесконечность.

Ответ. 1) $\dfrac{aq^2}{2(R^2 - a^2)}$; 2) $\dfrac{a^3q^2}{2R^2(R^2 - a^2)}$.

3. Внутри сферической незаряженной проводящей оболочки в точке A на расстоянии $OA = a$ от ее центра помещен точечный заряд q (рис. 66). Радиус внутренней поверхности оболочки равен r, а внешней R. Найти: 1) поверхностную плотность индуцированных электрических зарядов на внешней поверхности оболочки; 2) потенциал оболочки, принимая за нуль потенциал

бесконечно удаленной точки; 3) поверхностную плотность индуцированных зарядов в точках B и C внутренней поверхности оболочки.

Ответ. 1) $\sigma = \dfrac{q}{4\pi R^2}$; 2) $\varphi = \dfrac{q}{R}$;

3) $\sigma_B = \dfrac{q}{4\pi(r-a)^2}\left(1+\dfrac{a}{r}\right)$, $\sigma_C = \dfrac{q}{4\pi(r+a)^2}\left(1-\dfrac{a}{r}\right)$.

4. Найти силу, действующую на точечный заряд q, помещенный на биссектрисе прямого двугранного угла между двумя проводящими плоскостями (рис. 67). Расстояние между зарядом q и вершиной двугранного угла равно a.

Ответ. $F = \dfrac{q^2}{4a^2}\,(2\sqrt{2}-1)$. Сила F направлена к вершине двугранного угла O.

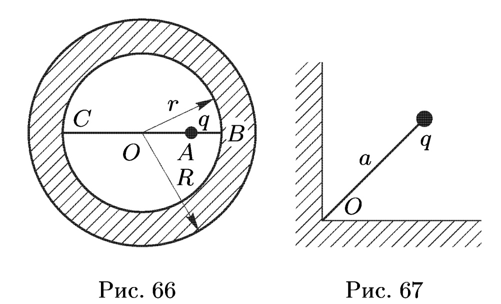


Рис. 66 Рис. 67

5. Точечный заряд q находится между двумя металлическими плоскостями, образующими между собой угол $60°$ (рис. 68). Найти предел, к которому стремится напряженность электрического поля **E**, когда точка наблюдения приближается к ребру O, все время оставаясь между металлическими плоскостями. Как изменится результат, если заряд будет не точечным?

Решение. Нетрудно убедиться, что электрическим изображением заряда q относительно поверхности AOB будет совокупность пяти зарядов: q_1, q_2, q_3, q_4, q_5. Поле этих зарядов и заряда q в точке O равно нулю. Результат не изменится, если заряд q будет не точечным.

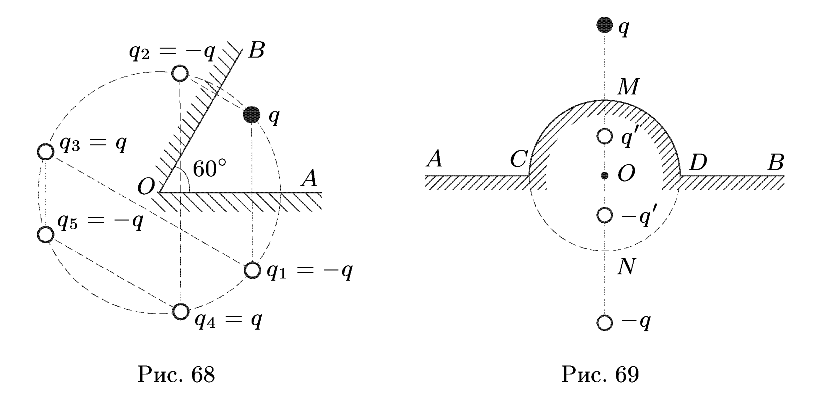


Рис. 68 Рис. 69

6. На бесконечной плоской поверхности проводника имеется сферический бугор CMD, центр которого O лежит в той же плоскости (рис. 69). На перпендикуляре OM вне проводника расположен точечный заряд q. Найти электрическое поле во всем пространстве.

Решение. Введем электрические изображения в сфере и плоскости, как указано на рис. 69. Сгруппируем заряды попарно: 1) q с $-q$; 2) q' с $-q'$. Каждая пара в плоскости $ACDB$ создает нулевой потенциал. Сгруппируем

теперь те же заряды по-другому: 1) q с q'; 2) $-q$ с $-q'$. При такой группировке каждая пара будет создавать нулевой потенциал на сфере $CMDN$. Ясно поэтому, что потенциал четырех зарядов q, $-q$, q', $-q'$ обращается в нуль на поверхности $ACMDB$. Следовательно, поле этих зарядов в верхнем полупространстве будет тождественно с полем, которое требуется рассчитать.

7. Найти силу притяжения F между точечным электрическим диполем и бесконечной металлической пластинкой, если момент диполя $\mathbf{p}$ перпендикулярен к плоскостям пластинки, а расстояние его до ближайшей поверхности пластинки равно h. Определить также работу A_{12}, которую надо затратить, чтобы удалить диполь от пластинки с расстояния h_1 до h_2.

О т в е т. $F = \dfrac{3p^2}{8h^4}$, $A_{12} = \dfrac{p^2}{8}\left(\dfrac{1}{h_1^3} - \dfrac{1}{h_2^3}\right)$. Обратим внимание, что перемещение диполя сопровождается перемещением индуцированных им зарядов. Однако это перемещение происходит перпендикулярно к силовым линиям и поэтому не сопровождается дополнительной работой.

§ 24. Точечный заряд над плоской поверхностью диэлектрика

Пусть два однородных диэлектрика с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 граничат друг с другом вдоль плоскости MN (рис. 70). В точке A первого диэлектрика помещен точечный заряд q. Найдем электрическое поле в каждом из диэлектриков. В окрестности точки A поле должно стремиться к бесконечности, как кулоново поле точечного заряда q. Поэтому поле в первом диэлектрике должно содержать слагаемое $qr/(e_1 r^3)$. К нему надо добавить поле поляризационных зарядов, возникших на границе раздела диэлектриков. Введем предположение, оправдываемое последующими вычислениями, что поле поляризационных зарядов в первом диэлектрике эквивалентно полю какого-то точечного заряда q', помещенного в точке A', зеркально симметричной с A относительно границы раздела. Тогда для поля в первом диэлектрике можно написать

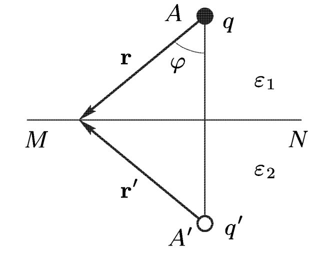


Рис. 70

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r^3}\,\mathbf{r} + \frac{q'}{\varepsilon_1 r'^3}\,\mathbf{r}',$$

где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ — радиусы-векторы, проведенные из зарядов q и q' в рассматриваемую точку. Введем второе предположение, также оправдываемое последующими вычислениями, что поле во втором диэлектрике представляется выражением

$$\mathbf{E}_2 = \frac{q''}{\varepsilon_2 r^3}\,\mathbf{r},$$

причем второй (фиктивный) заряд q'' совмещен пространственно с зарядом q (на рис. 70 он не изображен). Теперь необходимо выражения для $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ «сшить», чтобы на границе раздела диэлектриков удовлетворялись граничные условия: непрерывность касательных компонент вектора $\mathbf{E}$ и нормальных компонент вектора $\mathbf{D}$. Первое условие имеет вид

$$\frac{q}{\varepsilon_1}\sin\varphi + \frac{q'}{\varepsilon_1}\sin\varphi = \frac{q''}{\varepsilon_2}\sin\varphi,$$

а второе —

$$q\cos\varphi - q'\cos\varphi = q''\cos\varphi.$$

Существенно, что угол φ выпадает из обоих уравнений. Поэтому если q' и q'' определить из этих уравнений, то граничные условия будут удовлетворены во всех точках границы раздела. Таким путем находим

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r^3}\mathbf{r} - \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{q}{r'^3}\mathbf{r}', \quad \mathbf{E}_2 = \frac{2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{q}{r^3}\mathbf{r}. \tag{24.1}$$

Эти выражения удовлетворяют всем условиям задачи и, в силу теоремы единственности, дают ее решение. При $\varepsilon_2 \to \infty$ они переходят в соответствующие выражения для поля точечного заряда над проводящей плоскостью.

ЗАДАЧА

Какая сила действует на точечный заряд q вблизи плоской границы раздела двух диэлектриков, если заряд помещен в первом диэлектрике?

Ответ. $F = \dfrac{1}{4\varepsilon_1}\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\dfrac{q^2}{h^2}$, где h — расстояние заряда от границы раздела. Заряд притягивается к плоскости, если $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ и отталкивается, если $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$.

§ 25. Электрическое поле заряженного проводящего эллипсоида

1. Возьмем сферический слой между двумя концентрическими сферами, равномерно заряженный по всем объему. Электрическое поле в полости, ограниченной таким слоем, как известно, равно нулю. Хотя этот результат является непосредственным следствием теоремы Гаусса (см. § 6), для последующего важно получить его непосредственно из закона Кулона. С этой целью через произвольную точку M (рис. 71) внутри сферической полости, ограниченной рассматриваемым слоем, проведем бесконечно узкий конус прямых. Он вырежет из слоя два бесконечно малых элемента объема dV_1 и dV_2, заштрихованных на рисунке. Проведем далее через точки A, B, A', B' участки сферических поверхностей с общим центром в точке M, изображенные на рисунке штриховыми линиями. Между ними тот же конус прямых вырежет элементы объема $d\tau_1$ и $d\tau_2$ (не обозначенные на рисунке). Очевидно, $d\tau_1/d\tau_2 = r_1^2/r_2^2$, где r_1 и r_2 — расстояния рассматриваемых элементов объема от точки M. Кроме того, $d\tau_1 = dV_1$, $d\tau_2 = dV_2$, а потому $dq_1/dq_2 = r_1^2/r_2^2$, где dq_1 и dq_2 — заряды элементов объема dV_1 и dV_2 соответственно. На основании закона Кулона можно утверждать, что поля зарядов dq_1 и dq_2 в точке M равны и противоположно направлены. Проведя через точку M конусы прямых во всевозможных направлениях, можно разделить весь заряженный сферический слой на пары аналогичных бесконечно малых зарядов, электрические поля которых в точке M взаимно уничтожают друг друга. Отсюда следует, что электрическое поле будет равно нулю во всех точках полости, так как точку M можно взять произвольно.

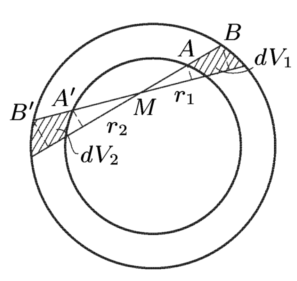


Рис. 71

2. Предполагая, что электрические заряды в сферическом слое неподвижно закреплены, будем равномерно сжимать или растягивать всю фигуру

на рис. 71 последовательно вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений. При такой деформации сферический слой перейдет в равномерно заряженный эллипсоидальный слой, ограниченный двумя подобными и подобно расположенными концентрическими эллипсоидами. Каждая прямая перейдет в прямую, равномерно сжатую или растянутую. Величины зарядов dq_1 и dq_2, разумеется, останутся без изменения. Элементы объема dV_1 и dV_2, а также расстояния r_1 и r_2 изменятся, но их отношения останутся прежними. В частности, $dq_1/dq_2 = r_1^2/r_2^2$. Значит, сохранится и компенсация полей в каждой точке внутри полученной эллипсоидальной полости. Отсюда следует, что *электрическое поле в полости, ограниченной равномерно заряженным эллипсоидальным слоем между двумя подобными и подобно расположенными концентрическими эллипсоидами, равно нулю.*

3. Будем теперь уменьшать толщину эллипсоидального слоя беспредельно, сохраняя его общий заряд q неизменным. В пределе получится *поверхностное распределение электричества*, при котором поле внутри эллипсоидальной полости всюду равно нулю. Если поверхность полости сделать проводящей, то равновесие электричества на ней не нарушится. Значит, в результате такого предельного перехода получится равновесное распределение электричества по поверхности проводящего эллипсоида. Выполним теперь указанный предельный переход и найдем величину поверхностной плотности электричества σ на поверхности эллипсоида. Проведем из центра эллипсоидального слоя O бесконечно узкий конус прямых, вырезающий из этого слоя объем dV, а из его поверхности — элементарную площадку dS (рис. 72). Очевидно, $dV = dS\,dN$, где dN — толщина слоя в рассматриваемом месте. Если ρ — объемная плотность электричества в слое, то заряд элемента объема dV будет $dq = \rho\,dS\,dN$. Если $dN \to 0$, а общий заряд эллипсоидального слоя сохраняется неизменным, то получается поверхностное распределение электричества с поверхностной плотностью

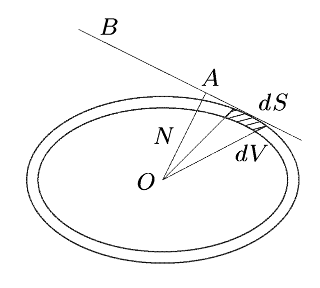


Рис. 72

$$\sigma = \frac{dq}{dS} = \rho\,dN.$$

Проведем в рассматриваемом месте эллипсоидальной поверхности касательную плоскость AB и опустим на нее перпендикуляр OA, длину которого обозначим через N. При неизменном направлении перпендикуляра OA объемы подобных и подобно расположенных эллипсоидов, очевидно, пропорциональны N^3. Если V — объем эллипсоида, то $V \sim N^3$, а потому

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3\,dN}{N},$$

где ΔV — объем эллипсоидального слоя. Исключив dN и воспользовавшись соотношением $q = \rho\Delta V$, получим

$$\sigma = \frac{qN}{3V}. \tag{25.1}$$

Пусть уравнение поверхности эллипсоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{25.2}$$

Тогда, как известно из аналитической геометрии,

$$N = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2}.$$

Кроме того, $V = (4\pi/3)abc$. Поэтому формула (25.1) переходит в

$$\sigma = \frac{q}{4\pi abc}\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2}. \qquad (25.3)$$

Из рассуждений настоящего параграфа непосредственно следует, что *равновесное распределение электричества на поверхности проводящего эллипсоида остается равновесным при любом равномерном растяжении или сжатии его.* Пользуясь этим, можно было бы найти равновесное распределение электричества по поверхности эллипсоида путем равномерного растяжения или сжатия заряженного проводящего шара. Такой путь является наиболее коротким. Разумеется, он также приводит к формуле (25.3).

Зная распределение электричества по поверхности эллипсоида, можно путем интегрирования по этой поверхности найти потенциал, а затем и напряженность электрического поля в любой точке пространства. Такой путь, однако, приводит к громоздким вычислениям. Значительно проще другой, искусственный прием (см. задачи 3 и 4 к этому параграфу).

ЗАДАЧИ

1. Найти поверхностную плотность электричества на бесконечно тонкой проводящей эллиптической пластинке, получающейся равномерным сжатием трехосного эллипсоида в направлении оси Z.

Решение. Пренебрегая в (25.3) первыми двумя членами в скобках, а затем воспользовавшись формулой (25.2), получаем

$$\sigma = \frac{q}{4\pi ab}\left(\frac{z^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \frac{q}{4\pi ab}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2}. \qquad (25.4)$$

2. Заряженный проводящий эллипсоид мысленно разделен на части равноотстоящими плоскостями, перпендикулярными к одной из его главных осей. Показать, что, каково бы ни было число таких частей, величины их зарядов будут всегда одинаковы. В частности, если эллипсоид является вытянутым и бесконечно тонким, то электричество распределится по его длине равномерно.

3. Найти условие, при выполнении которого поверхности семейства $\lambda(x, y, z) = \text{const}$ могут быть эквипотенциальными.

Решение. По условию потенциал φ постоянен, если постоянна функция λ. Значит, он должен быть функцией только λ: $\varphi = \varphi(\lambda)$. Дифференцируя φ по координате x, получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \varphi'\frac{\partial\lambda}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \varphi''\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \varphi'\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}.$$

Написав аналогичные соотношения для y и z и складывая их, найдем

$$\Delta\varphi = \varphi''(\operatorname{grad}\lambda)^2 + \varphi'\Delta\lambda.$$

С учетом уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$ отсюда следует

$$\frac{\Delta\lambda}{(\operatorname{grad}\lambda)^2} = -\frac{\varphi''(\lambda)}{\varphi'(\lambda)}.$$

Таким образом, чтобы уравнение $\lambda(x,y,z) = \text{const}$ представляло семейство эквипотенциальных поверхностей, необходимо, чтобы левая часть последнего соотношения была функцией только λ:

$$\Delta\lambda \frac{\Delta\lambda}{(\operatorname{grad}\lambda)^2} = \Phi(\lambda). \tag{25.5}$$

Если функция $\Phi(\lambda)$ известна, то потенциал φ можно найти интегрированием уравнения

$$\frac{\varphi''(\lambda)}{\varphi'(\lambda)} = -\Phi(\lambda), \tag{25.6}$$

что сводится к выполнению двух квадратур.

4. Найти потенциал электрического поля заряженного проводящего эллипсоида.

Решение. Пусть $\lambda(x,y,z)$ — неявная функция, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1 \tag{25.7}$$

$(a \geqslant b \geqslant c > 0)$. Уравнение $\lambda(x,y,z) = \text{const}$ представляет семейство софокусных поверхностей второго порядка. При $c^2+\lambda > 0$ это есть семейство эллипсоидов; при $b^2+\lambda > 0$, $c^2+\lambda < 0$ — однополостных гиперболоидов; при $a^2+\lambda > 0$, $b^2+\lambda < 0$, $c^2+\lambda < 0$ — двухполостных гиперболоидов. Во всех случаях уравнение $\lambda(x,y,z) = \text{const}$ может быть семейством эквипотенциальных поверхностей. Для доказательства достаточно убедиться, что выполняется условие (25.5). Введем обозначение

$$F_n = \frac{x^2}{(a^2+\lambda)^n} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^n} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^n}.$$

Тогда дифференцированием (25.7) по x получим

$$\frac{2x}{a^2+\lambda} - F_2\frac{\partial\lambda}{\partial x} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{2x}{(a^2+\lambda)F_2}.$$

Вторичное дифференцирование дает

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} = \frac{2}{(a^2+\lambda)F_2} - \frac{2x}{(a^2+\lambda)^2F_2}\,\frac{\partial\lambda}{\partial x} - \frac{2x}{(a^2+\lambda)F_2^2}\left[\frac{2x}{(a^2+\lambda)^2} - 2F_3\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right] =$$

$$= \frac{2}{(a^2+\lambda)F_2} - \frac{8x^2}{(a^2+\lambda)^3F_2^2} + \frac{8F_3x^2}{(a^2+\lambda)^2F_2^3}.$$

Написав аналогичные выражения для производных по y и z и складывая их, находим

$$(\operatorname{grad}\lambda)^2 = \frac{4}{F_2},$$

$$\Delta\lambda = \frac{2}{F_2}\left(\frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda}\right).$$

Следовательно, условие (25.5) выполняется, причем

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda}\right). \qquad (25.8)$$

Задача свелась к интегрированию уравнения

$$\frac{\varphi''(\lambda)}{\varphi'(\lambda)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda}\right). \qquad (25.9)$$

Допустим теперь, что все знаменатели в правой части уравнения (25.9) положительны. Тогда эквипотенциальными поверхностями (25.7) будут софокусные эллипсоиды. При $\lambda = 0$ получается эллипсоид (25.2). Таким образом, если потенциал $\varphi(x, y, z)$ найти из уравнения (25.9), то на поверхности эллипсоида (25.2) он обратится в постоянную и, следовательно, будет давать решение рассматриваемой задачи. Интегрируя уравнение (25.9), получаем

$$\varphi'(\lambda) = A[(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)]^{-1/2},$$

где A — постоянная интегрирования. Интегрируя вторично и принимая за нуль потенциал бесконечно удаленной точки, находим

$$\varphi(\lambda) = A\int_{\infty}^{\lambda}[(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)]^{-1/2}\,d\lambda.$$

Постоянная A определится из условия, что на больших расстояниях функция φ должна переходить в потенциал точечного заряда $\varphi = q/r$. При больших λ эллипсоид (25.7) переходит в шар радиуса $r = \sqrt{\lambda}$, а предыдущий интеграл — в

$$\varphi(\lambda) = A\int_{\infty}^{\lambda}\lambda^{-3/2}\,d\lambda = -2A\lambda^{-1/2} = -\frac{2A}{r}.$$

Значит,

$$\varphi = \frac{q}{2}\int_{\lambda}^{\infty}[(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)]^{-1/2}\,d\lambda. \qquad (25.10)$$

Входящий сюда интеграл является *эллиптическим.* Если эллипсоид является эллипсоидом вращения, то интегрирование выполняется в элементарных функциях. Для *вытянутого эллипсоида вращения* $(b = c)$

$$\varphi = \frac{q}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{\sqrt{b^2+\lambda}}{\sqrt{a^2+\lambda}-\sqrt{a^2-b^2}}. \qquad (25.11)$$

Введем обозначения: $A = \sqrt{a^2+\lambda}$, $f = \sqrt{a^2-b^2}$. Величина $2A$ есть *большая ось* эквипотенциального эллипсоида, проходящего через точку наблюдения, а $2f$ — расстояние между *фокусами* рассматриваемого семейства *софокусных эллипсоидов.* Выражение (25.11) можно преобразовать к виду

$$\varphi = \frac{q}{2f}\ln\frac{A+f}{A-f}. \qquad (25.11a)$$

Для *сплюснутого эллипсоида вращения* $(a = b)$

$$\varphi = \frac{q}{\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{\sqrt{\lambda+c^2}}. \qquad (25.12)$$

Введем длину малой оси эквипотенциального эллипсоида, проходящего через точку наблюдения: $2B = 2\sqrt{c^2+\lambda}$, а также расстояние между фокусами

$2f = 2\sqrt{a^2 - c^2}$. Тогда

$$\varphi = \frac{q}{f} \operatorname{arctg} \frac{f}{B}. \tag{25.12a}$$

5. Бесконечно тонкая диэлектрическая палочка равномерно заряжена электричеством с постоянной линейной плотностью. Показать, что эквипотенциальными поверхностями поля такой палочки будут софокусные эллипсоиды, фокусы которых находятся на ее концах.

6. Бесконечно тонкая круглая диэлектрическая пластинка радиуса a заряжена электричеством с поверхностной плотностью

$$\sigma = \frac{q}{2\pi a\sqrt{a^2 - r^2}},$$

где r — расстояние от центра пластинки. Показать, что эквипотенциальными поверхностями поля пластинки будут софокусные сплюснутые эллипсоиды вращения с фокальной линией, расположенной по окружности пластинки.

§ 26. Емкость проводников и конденсаторов

1. Рассмотрим заряженный уединенный проводник, погруженный в неподвижный диэлектрик. Потенциал создаваемого им электрического поля на бесконечности условимся считать равным нулю. Если удвоить заряд проводника, то его потенциал также удвоится. Вообще, между зарядом проводника q и его потенциалом φ существует прямая пропорциональность:

$$q = C\varphi. \tag{26.1}$$

Коэффициент C зависит только от размеров и формы проводника, а также от диэлектрической проницаемости окружающего диэлектрика и ее распределения в пространстве. Он называется *емкостью уединенного проводника.* Например, для шара радиуса a в однородном диэлектрике $\varphi = q/(\varepsilon a)$, а потому

$$C = \varepsilon a. \tag{26.2}$$

2. Более важным является понятие *емкости конденсатора.* Всякий конденсатор состоит из двух металлических обкладок, отделенных одна от другой слоем диэлектрика. Пусть обкладками конденсатора являются две замкнутые металлические оболочки: наружная и внутренняя, причем внутренняя целиком окружена наружной. Тогда поле между обкладками совершенно не будет зависеть от внешних электрических полей. Заряды на поверхностях обкладок, обращенных одна к другой, по теореме Фарадея, равны по величине и противоположны по знаку. В реальном конденсаторе, поскольку его обкладки не являются полностью замкнутыми, это верно только приближенно, хотя и с большой точностью. Практическая независимость внутреннего поля конденсатора от внешнего поля здесь достигается тем, что обкладки располагаются очень близко одна от другой. В этом случае заряды будут почти целиком сосредоточены на внутренних поверхностях обкладок, т. е. поверхностях, обращенных друг к другу. Если q — заряд одной

из обкладок (для определенности положительной), а $\varphi \equiv (\varphi_1 - \varphi_2)$ — разность потенциалов между обкладками, то

$$q = C(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{26.3}$$

Постоянная C зависит только от размеров и устройства конденсатора. Она называется *емкостью конденсатора.*

Возьмем два конденсатора. В одном пространство между обкладками заполнено однородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, в другом между обкладками — вакуум (такой конденсатор обычно называют *воздушным*, что не вполне точно). В остальных отношениях оба конденсатора тождественны. При одних и тех же зарядах разность потенциалов между обкладками первого конденсатора будет в ε раз меньше, чем между обкладками второго (см. § 22, п. 3). Следовательно, емкость C конденсатора с диэлектриком будет в ε раз больше емкости C_0 воздушного конденсатора:

$$C = \varepsilon C_0. \tag{26.4}$$

3. Во всякой системе единиц за единицу емкости принимают емкость такого конденсатора, который единичным зарядом заряжается до разности потенциалов, равной единице. В гауссовой и СГСЭ-системах, как это видно из формулы (26.2), единичной емкостью обладает уединенный шарик в вакууме, если радиус его равен 1 см. Размерность емкости в этих системах единиц совпадает с размерностью длины. Поэтому указанная единица емкости называется *сантиметром.* Практической единицей емкости является *фарад.* Фарад есть емкость такого конденсатора, который одним кулоном электричества заряжается до разности потенциалов в один вольт. Очевидно,

$$1\ \text{Ф} = \frac{1\ \text{Кл}}{1\ \text{В}} = \frac{3\cdot 10^9\ \text{СГСЭ-ед. заряда}}{\frac{1}{300}\ \text{СГСЭ-ед. потенциала}} = 9\cdot 10^{11}\ \text{см}.$$

Емкостью в один фарад обладает уединенный шар в вакууме с радиусом $9\cdot 10^{11}$ см $= 9\cdot 10^6$ км. Это очень большая емкость. На практике применяется *микрофарад*, равный миллионной доле фарада, а также *пикофарад*, который в миллион раз меньше микрофарада. Емкостью в один пикофарад обладает шарик в вакууме, если его радиус равен 0,9 см.

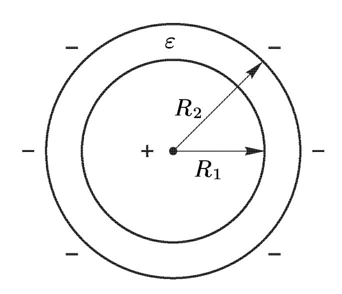


Рис. 73

4. Емкость шарового конденсатора. Обкладками конденсатора являются две сферы: внутренняя с радиусом R_1 и внешняя с радиусом R_2 (рис. 73). Разность потенциалов между ними

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Емкость конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon}{1/R_1 - 1/R_2} = \varepsilon\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}. \tag{26.5}$$

Если толщина зазора между обкладками $d = R_2 - R_1$ мала по сравнению с радиусами R_1 и R_2, то площади обкладок почти одинаковы и приближенно равны $S \approx 4\pi R_1^2 \approx 4\pi R_2^2 \approx 4\pi R_1R_2$. Тогда

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}. \tag{26.6}$$

Эта формула, как и следовало ожидать, совпадает с формулой для емкости плоского конденсатора, которая выводится ниже.

5. Емкость плоского конденсатора. Поле между обкладками конденсатора почти всюду однородно (рис. 74). Однородность поля нарушается только вблизи краев конденсатора. Такими «*краевыми эффектами*» при вычислении емкости конденсатора мы пренебрежем. Это можно делать, когда расстояние d между обкладками очень мало по сравнению с их линейными размерами. Если σ — поверхностная плотность электричества на положительной обкладке, а S — площадь последней, то $q = \sigma S$. Напряженность поля $E = 4\pi\sigma/\varepsilon$, разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = 4\pi\sigma d/\varepsilon$, емкость конденсатора

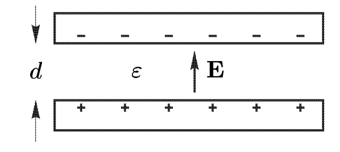


Рис. 74

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}.$$

Краевые эффекты вносят некоторую поправку к этой формуле, но ее вычислением мы заниматься не будем.

Возьмем воздушный конденсатор, состоящий из двух пластин — неподвижной A и подвижной B (рис. 75). Пластину B заземлим, пластину A хорошо изолируем и соединим с шариком электрометра. Зарядим пластину A и будем перемещать пластину B. При увеличении расстояния между пластинами стрелка электрометра отклоняется сильнее, при уменьшении — слабее. Дело в том, что при разведении пластин емкость конденсатора уменьшается. Заряд q пластины A практически не меняется, так как на электрометр переходит пренебрежимо малое количество электричества. Поэтому разность потенциалов $\varphi = q/C$ возрастает, что и показывает электрометр. Наоборот, при сближении пластин емкость возрастает, а разность потенциалов уменьшается.

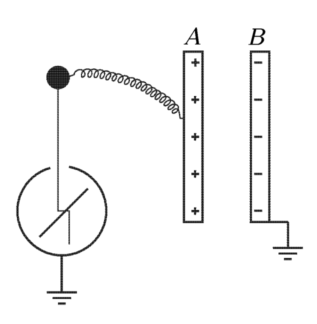


Рис. 75

Явление можно также объяснить непосредственно с помощью закона Кулона. При соединении заряженной пластины A с электрометром часть заряда уходит с нее на электрометр. Оставшийся заряд удерживается электрическим полем пластины B. Когда B приближается к A, поле возрастает. Благодаря этому часть зарядов с электрометра оттягивается к пластине A, и угол отклонения стрелки уменьшается. Из приведенного объяснения видно, что явление все же обусловлено влиянием краевых эффектов. Напряженность поля между бесконечными пластинами не зависит от расстояния между ними. Но для конечных пластин, в особенности вблизи их краев, это не так. При приближении конечной пластины B на A увеличиваются индукционные заряды противоположного, а на шарике и стрелке электрометра — того же знаков. Такое перемещение зарядов меняет заряд конденсатора и напряженность электрического поля между его пластинами пренебрежимо мало. Но его достаточно, чтобы сильно изменить заряд на электрометре и соответствующую ему разность потенциалов.

Если, оставляя расстояние между пластинами A и B неизменным, ввести между ними лист из диэлектрика, то электрометр покажет меньшую разность потенциалов. Такой опыт был поставлен Фарадеем. На нем Фарадей впервые установил влияние *промежуточной среды* на электрическое поле между наэлектризованными телами. Результат опыта, очевидно, объясняется возрастанием емкости конденсатора при введении диэлектрика между пластинами. Можно также сказать, что на диэлектрике появляются поляризационные заряды, оттягивающие часть электричества с электрометра на пластины конденсатора. Металлический лист в таком опыте действует как диэлектрик с бесконечно большим значением ε. Его введение эквивалентно уменьшению зазора d между пластинами конденсатора.

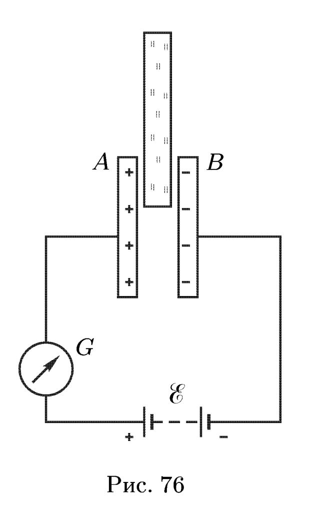


Рис. 76

Опыт можно осуществить в другой постановке (рис. 76). Пластины воздушного конденсатора через баллистический гальванометр подсоединяют к полюсам гальванической батареи, поддерживающей постоянной разность потенциалов между ними. Если между пластинами ввести лист из диэлектрика, то емкость и заряд конденсатора должны возрастать. По цепи пройдет кратковременный электрический ток, и баллистический гальванометр «даст отброс».

6. Емкость цилиндрического конденсатора. Цилиндрический конденсатор состоит из коаксиальных цилиндрических об- кладок, разделенных слоем диэлектрика (рис. 77). Примером такого конденсатора может служить лейденская банка. Пусть a и b — радиусы внутренней и наружной обкладок, а l — длина конденсатора. Если

пренебречь краевыми эффектами, то

$$C = \frac{\varepsilon l}{2\ln(b/a)}. \qquad (26.7)$$

Когда зазор между обкладками конденсатора $d = b - a$ мал по сравнению с a и b, эта формула, как легко убедиться, переходит в (26.6).

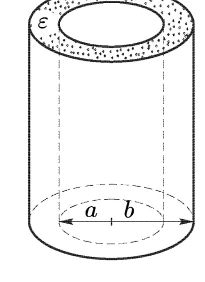


Рис. 77

7. Емкость двух параллельных прямых проволок. Пусть l — длина каждой проволоки, a и b — их радиусы, $2h$ — расстояние между ними. Предполагая, что $l \gg 2h \gg a$, $2h \gg b$, можно воспользоваться формулой (19.11) и написать

$$\varphi = -2q\ln\frac{r_1}{\varepsilon l} + 2q\ln\frac{r_2}{\varepsilon l} + \text{const},$$

где r_1 и r_2 — расстояния точки наблюдения от осей проволок. Полагая сначала $r_1 = a$, $r_2 = 2h$, а затем $r_1 = 2h$, $r_2 = b$, находим потенциалы проволок φ_1, φ_2 и разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$. В результате получаем для емкости формулу

$$C = \frac{\varepsilon l}{2\ln\dfrac{4h^2}{ab}}. \qquad (26.8)$$

В частности, при $a = b$

$$C = \frac{\varepsilon l}{4\ln(2h/a)}. \qquad (26.9)$$

Из последней формулы методом зеркальных изображений легко получить выражение для емкости цилиндрической прямой проволоки, подвешенной над заземленной бесконечной проводящей плоскостью (телеграфный провод над земной поверхностью). Если проволока параллельна плоскости, а расстояние между ними равно h, то емкость будет

$$C = \frac{\varepsilon l}{2\ln(2h/a)}, \qquad (26.10)$$

т. е. вдвое больше, чем в предыдущем случае.

8. Конденсаторы часто соединяют в батареи. Соединение может быть *параллельным* (рис. 78) или *последовательным* (рис. 79). Применяют также *комбинированное соединение.* Ограничимся ради простоты случаем двух конденсаторов. При параллельном соединении разности потенциалов между обкладками обоих конденсаторов одинаковы, а заряды обкладок складываются: $q = q_1 + q_2$. Делением на общую разность потенциалов $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ находим емкость батареи:

$$C = C_1 + C_2. \qquad (26.11)$$

При последовательном соединении средние пластины, соединенные между собой, электризуются через влияние, а потому их заряды равны

и противоположны по знаку. Таким образом, заряды на обоих конденсаторах одинаковы. Разности потенциалов складываются:

$$\varphi_1 - \varphi_3 = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3).$$

А так как

$$\varphi_1 - \varphi_3 = \frac{q}{C}, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{C_1}, \quad \varphi_2 - \varphi_3 = \frac{q}{C_2},$$

то отсюда получаем

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \tag{26.12}$$

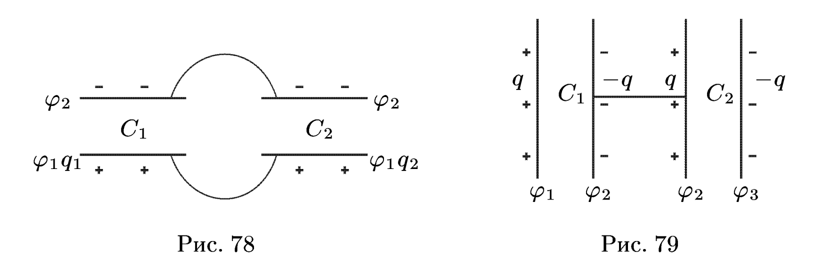


Рис. 78

Рис. 79

Обобщение формул (26.11) и (26.12) на случай нескольких конденсаторов тривиально. Параллельное соединение применяется для увеличения емкости конденсатора. Последовательное применяют тогда, когда во избежание пробоя большую разность потенциалов требуется распределить между несколькими конденсаторами.

9. Применим формулу (26.12) к расчету емкости *слоистого плоского конденсатора.* Конденсатор состоит из двух параллельных металлических обкладок, разделенных плоскими слоями из диэлектриков с различными диэлектрическими проницаемостями (рис. 80). Представим себе, что между слоями диэлектриков введены бесконечно тонкие металлические листы. От этого заряды на обкладках конденсатора и напряженности полей в слоях диэлектрика не изменятся. Не изменится и разность потенциалов между обкладками, а с ней и емкость конденсатора. Однако введение металлических листов превращает слоистый конденсатор в батарею последовательно соединенных конденсаторов. Применяя к ней формулы (26.6) и (26.12), получим

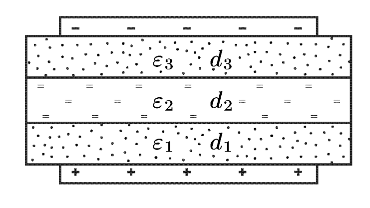


Рис. 80

$$\frac{1}{C} = \frac{4\pi}{S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} + \cdots\right), \tag{26.13}$$

где d_1, d_2, ... — толщины диэлектрических слоев, а ε_1, ε_2, ... — их диэлектрические проницаемости.

ЗАДАЧИ

1. Три конденсатора с емкостями $C_1 = 2$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ, $C_3 = 4$ мкФ и допустимыми напряжениями $V_1 = 1000$ В, $V_2 = 450$ В, $V_3 = 250$ В соединены в батарею. При каком соединении конденсаторов можно получить наибольшее напряжение? Чему равно это напряжение и соответствующая емкость батареи?

Ответ. При последовательном; $V = 1125$ В; $C = 0{,}8$ мкФ.

2. Определить емкость единицы длины двух параллельных бесконечно длинных круговых цилиндров, радиусы которых равны a и b, а расстояние между осями l.

Решение. Возьмем две бесконечно длинные параллельные прямые A и A', равномерно заряженные электричествами противоположных знаков (рис. 81). Эквипотенциальными поверхностями будут круговые цилиндры (см. задачу 9 к § 19). Пусть S и S' — два из них, расположенные вне друг

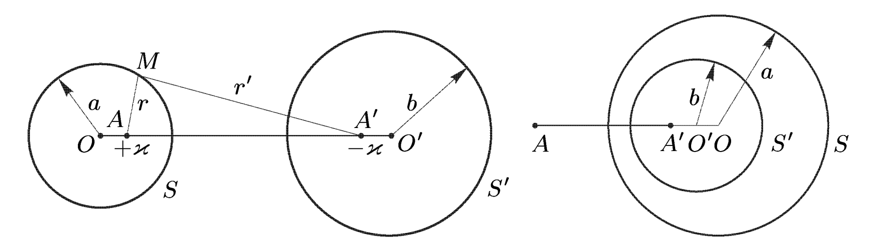


Рис. 81 Рис. 82

друга. Положение осей цилиндров O и O' определим условиями $OA \cdot OA' = a^2$, $O'A' \cdot O'A = b^2$ (см. § 23, п. 3). Потенциалы поверхностей S и S' будут

$$\varphi = \frac{2\varkappa}{\varepsilon} \ln \frac{a}{d}, \quad \varphi' = -\frac{2\varkappa'}{\varepsilon} \ln \frac{b}{d'},$$

где $d = OA$, $d' = O'A'$. Если заряды $\varkappa$ и $\varkappa'$ перейдут с линий A и A' на поверхности цилиндров S и S', то поле внутри цилиндров обратится в нуль, а во внешнем пространстве не изменится. Получится распределение зарядов, отвечающее условиям задачи. Вычислив разность потенциалов $\varphi - \varphi'$, найдем емкость на единицу длины

$$C = \frac{\varepsilon}{2 \ln (ab/dd')}. \tag{26.14}$$

Для определения d и d' имеем уравнения

$$d(l - d') = a^2, \quad d'(l - d) = b^2,$$

из которых находим

$$d = \frac{l^2 + a^2 - b^2 - \sqrt{(l^2 + a^2 - b^2)^2 - 4a^2 l^2}}{2l},$$
$$d' = \frac{l^2 + b^2 - a^2 - \sqrt{(l^2 + b^2 - a^2)^2 - 4b^2 l^2}}{2l}. \tag{26.15}$$

Рассмотрим теперь случай, когда цилиндр S' целиком лежит внутри цилиндра S (рис. 82). Все рассуждения и вычисления в этом случае остаются без изменений. Окончательная формула (26.14) также остается неизменной.

Только для определения $d = OA$ и $d' = O'A'$ получаются уравнения

$$d'(d-l) = b^2, \quad d(d'+l) = a^2 \quad (a > b > l).$$

Из них находим

$$d = \frac{a^2 - b^2 - l^2 + \sqrt{(a^2-b^2-l^2)^2 - 4a^2l^2}}{2l},$$
$$d' = \frac{a^2 - b^2 - l^2 - \sqrt{(a^2-b^2-l^2)^2 - 4a^2l^2}}{2l}. \tag{26.16}$$

3. Показать, что для тонких цилиндров формула (26.14) переходит в формулу (26.8), а для коаксиальных цилиндров — в формулу (26.7).

4. Найти выражение для емкости эллипсоида.

Ответ.

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_0^\infty [(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)]^{-1/2}\,d\lambda. \tag{26.17}$$

Для вытянутого эллипсоида вращения:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2ae\varepsilon}\ln\frac{1+e}{1-e}, \tag{26.18}$$

для сплюснутого:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2ae\varepsilon}\operatorname{arctg}\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}, \tag{26.19}$$

где e — эксцентриситет эллипсоида.

§ 27. Потенциальные и емкостные коэффициенты

1. Рассмотрим произвольную систему n заряженных неподвижных проводников, пространство между которыми заполнено неподвижным диэлектриком — однородным или неоднородным. Такую систему иногда называют *сложным конденсатором.* Будем предполагать, что свободных зарядов в диэлектрике нет. Докажем, что при этих условиях потенциалы проводников будут *линейными однородными функциями* их зарядов. При этом, как обычно, потенциал поля в бесконечности принимается равным нулю.

Предположим сначала, что все проводники не заряжены. Сообщим затем одному только i-му проводнику заряд, равный единице. Этим однозначно определится электрическое поле $\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$ во всем пространстве и соответствующие ему потенциал $V_i(\mathbf{r})$ и индукция $\mathbf{D}_i = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$. По теореме Гаусса поток вектора $\mathbf{D}_i$ через поверхность i-го проводника будет равен 4π, а через поверхности остальных проводников — нулю. Значение потенциала $V_i(\mathbf{r})$ в месте нахождения j-го проводника обозначим V_{ji}. Коэффициенты V_{ji} зависят только от формы и расположения проводников, а также от диэлектрической проницаемости диэлектрика между ними. Они называются *потенциальными коэффициентами.* Ввиду линейности и однородности уравнений электростатики произвольная линейная комбинация векторов $\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$ и $\mathbf{D}_i(\mathbf{r})$ с постоянными

коэффициентами q_i, т. е.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n} q_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r}), \tag{27.1}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n} q_i \mathbf{D}_i(\mathbf{r}), \tag{27.2}$$

удовлетворяет этим уравнениям. Действительно, вектор $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ потенциальный, так как все поля $\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$ потенциальны. В диэлектрике вектор $\mathbf{D}$ удовлетворяет уравнению $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$, так как $\operatorname{div}\mathbf{D}_i = 0$. Наконец, в проводниках $\mathbf{E} = 0$. Таким образом, выражения $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ могут рассматриваться как напряженность и индукция какого-то электростатического поля. Заряды, возбуждающие такое поле, не могут находиться внутри диэлектрика, так как $4\pi\rho = \operatorname{div}\mathbf{D} = 0$. Остается выяснить физический смысл постоянных коэффициентов q_i, введенных выше чисто формально. Для этого замечаем, что заряд на поверхности i-го проводника согласно теореме Гаусса равен

$$Q_i = \frac{1}{4\pi}\oint_{S_i}(\mathbf{D}\, d\mathbf{S}) = \frac{1}{4\pi}\sum_j q_j \oint_{S_i}(\mathbf{D}_j\, d\mathbf{S}) = \frac{q_i}{4\pi}\oint_{S_i}(\mathbf{D}_i\, d\mathbf{S}) = q_i.$$

На основании теоремы единственности можно поэтому сказать, что выражение (27.1) определяет электростатическое поле системы n проводников, заряды которых равны соответственно $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Потенциал поля (27.1) определяется выражением

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{n} q_j V_j(\mathbf{r}). \tag{27.3}$$

Поместив точку $\mathbf{r}$ на поверхности i-го проводника, находим его потенциал

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} V_{ij} q_j. \tag{27.4}$$

Разрешив эти уравнения относительно q_i, получим

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \varphi_j. \tag{27.5}$$

Постоянные C_{ij} называются *емкостными коэффициентами*[1]. Как и потенциальные коэффициенты, они определяются только величиной,

[1] В старой литературе коэффициенты C_{ij} назывались *коэффициентами емкости*, когда $i = j$, и *коэффициентами индукции*, когда $i \neq j$. Мы не следуем этой терминологии.

формой и расположением проводников, а также диэлектрической проницаемостью промежуточной среды. В § 28 будет доказано, что емкостные, а следовательно, и потенциальные коэффициенты симметричны, т. е. $C_{ij} = C_{ji}$, $V_{ij} = V_{ji}$.

Таким образом, *заряды проводников являются линейными однородными функциями их потенциалов, а потенциалы — линейными однородными функциями зарядов.*

Если диэлектрик между проводниками однороден, то все емкостные коэффициенты C_{ik} будут пропорциональны его диэлектрической проницаемости ε.

Для конденсатора число проводников (обкладок) равно двум. В этом случае

$$q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2, \quad q_2 = C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2,$$

причем $q_2 = -q_1$. Решив эти уравнения относительно φ_1 и φ_2, найдем разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ и емкость конденсатора:

$$C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}}{C_{11} + C_{22} + C_{12} + C_{21}}. \tag{27.6}$$

2. Отметим некоторые свойства потенциальных и емкостных коэффициентов. Мы не будем приводить их строгие математические доказательства, а ограничимся интуитивными, но достаточно убедительными физическими соображениями.

Все потенциальные коэффициенты V_{ij} положительны. Действительно, если j-му проводнику сообщить положительный заряд q, а остальные проводники оставить незаряженными, то интуитивно ясно, что потенциал во всех точках пространства будет положителен. При этом $\varphi_i = V_{ij}q$. Из положительности φ_i следует $V_{ij} > 0$.

Интуитивно также ясно, что максимальным будет потенциал проводника, которому сообщен заряд, т. е. $\varphi_j > \varphi_i$. Отсюда следует, что $V_{jj} > V_{ij}$ $(i \neq j)$.

Емкостные коэффициенты C_{ij} с одинаковыми индексами положительны, а с разными — отрицательны. Действительно, заземлим все проводники, за исключением i-го. Тогда $q_i = C_{ii}\varphi_i$. Величины q_i и φ_i будут иметь одинаковые знаки, а потому должно быть $C_{ii} > 0$. Теперь заземлим все проводники, за исключением i-го и j-го, i-му проводнику сообщим положительный заряд q_i а j-й проводник оставим незаряженным. Тогда потенциалы φ_i и φ_j будут положительны, причем $q_j = 0 = C_{ji}\varphi_i + C_{jj}\varphi_i = 0$. Это равенство может соблюдаться только при условии $C_{ji} < 0$.

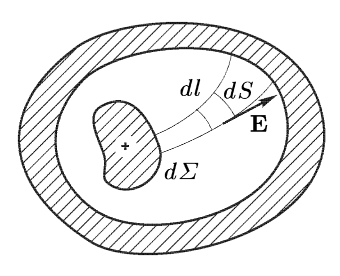


Рис. 83

Покажем, наконец, что $\sum\limits_{j=1}^{n} C_{ij} \geqslant 0$. Для этого предположим, что i-й проводник, которому сообщен положительный заряд q_i, окружен со всех сторон заземленной замкнутой проводящей оболочкой произвольной формы (рис. 83). По теореме Фарадея на оболочке индуцируется отрицательный заряд $q' = -q_i$. Удалим в бесконечность некоторые части оболочки, чтобы из оставшихся частей образовалось $n-1$ заземленных проводников с зарядами $q_1, q_2, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots, q_n$. Сумма этих зарядов по абсолютной величине будет меньше q_i. С учетом

знаков можно написать $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j \geqslant 0$. Подставив сюда $q_j = C_{ji}\varphi_i$ и приняв во внимание, что $\varphi_i > 0$, получим требуемый результат.

ЗАДАЧИ

1. К положительно заряженному уединенному проводнику подносится незаряженный изолированный проводник. Показать, что при этом потенциалы обоих проводников будут увеличиваться, а разность потенциалов между ними уменьшаться. Рассмотреть также случай, когда первый проводник был заряжен отрицательно.

2. Проводник заряжается от электрофора путем повторяющихся поднесений к пластинке, которая после каждого поднесения снова заряжается от того же электрофора до заряда Q. Пусть q_1 — заряд на проводнике после первой операции. Определить заряд q на проводнике после очень большого числа операций.

Решение. При поднесении проводника к пластинке общий заряд в определенном отношении распределяется между этими телами. При первом поднесении проводник получает заряд q_1, на пластинке остается $Q - q_1$. Если операция зарядки повторена многократно, то при последующих соприкосновениях проводника с пластинкой его заряд практически уже меняться не будет. Заряд пластинки также не будет меняться и будет равен Q, поскольку пластинка заряжается от электрофора. Искомый заряд q определится из пропорции

$$\frac{q}{Q} = \frac{q_1}{Q - q_1}.$$

3. Три одинаковых изолированных металлических шара расположены в вершинах равностороннего треугольника. Проволочкой, подключенной к удаленному заряженному проводнику, потенциал которого неизвестен, но поддерживается постоянным, по очереди касаются каждого из шаров. Заряды на первых двух шарах оказались после этого равными q_1 и q_2. Найти заряд на третьем шаре q_3.

Решение. В силу симметрии имеем $V_{11} = V_{22} = V_{33} = A$, $V_{12} = V_{21} = V_{23} = B$. При зарядке первого шара он получает потенциал $\varphi_1 = Aq_1$. При зарядке остальных двух шаров потенциал первого шара меняется, но его значения для решения не нужны. При зарядке второго шара его потенциал становится равным также $\varphi_1 = Aq_2 + Bq_1$. Аналогично для третьего шара: $\varphi_1 = Aq_3 + B(q_1 + q_2)$. Таким образом,

$$Aq_1 = Aq_2 + Bq_1 = Aq_3 + B(q_1 + q_2).$$

Отсюда

$$q_3 = \frac{q_2^2}{q_1}.$$

4. Четыре одинаковых изолированных металлических шара расположены в вершинах правильного тетраэдра. Проволочкой, подключенной к удаленному заряженному проводнику, потенциал которого неизвестен, но поддерживается постоянным, по очереди касаются каждого из шаров. Заряды на первых двух шарах оказались после этого равными q_1 и q_2. Найти заряды на двух остальных шарах.

Ответ. $q_3 = q_2^2/q_1$, $q_4 = q_2^3/q_1^2$.

§ 28. Электрическая энергия

1. Электрическая энергия, как и всякая другая энергия, зависит только от *состояния системы*, но не зависит от способа, каким система была приведена в это состояние. Вычислим сначала электрическую энергию заряженного конденсатора. Она однозначно определяется зарядами его обкладок или разностью потенциалов между ними. Способ зарядки на величину энергии не влияет. Применим такой способ зарядки, чтобы вычисления были максимально просты. Если конденсатор не заряжен, то на каждой из его обкладок имеется смесь одинаковых количеств положительного и отрицательного электричеств. Будем переносить положительное электричество бесконечно малыми порциями dq с отрицательной обкладки на положительную. Для переноса заряда dq необходимо совершить работу против электрического поля:

$$\delta A^{\text{внеш}} = \varphi\, dq,$$

где φ — мгновенное значение разности потенциалов между обкладками. Работа самого конденсатора будет такой же по величине, но противоположной по знаку:

$$\delta A = -\varphi\, dq. \tag{28.1}$$

Зарядка конденсатора может сопровождаться выделением или поглощением тепла, а также изменением плотности диэлектрика. Однако в большинстве случаев эти эффекты незначительны, и мы временно оставим их без внимания. Тогда работа $\delta A^{\text{внеш}}$ целиком пойдет на увеличение электрической энергии конденсатора W, т. е.

$$dW = \varphi\, dq = \frac{q\, dq}{C}. \tag{28.2}$$

Если, как мы предположили, температура и плотность диэлектрика при зарядке не изменяются, то не будет изменяться также диэлектрическая проницаемость ε, а с ней и емкость конденсатора C. Поэтому интегрированием предыдущего выражения находим

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}\, q\varphi = \frac{1}{2}\, C\varphi^2. \tag{28.3}$$

2. Проведем теперь вычисление электрической энергии в общем виде. Рассмотрим несколько тел с зарядами $q_1, q_2, \ldots$ и потенциалами $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, пространство между которыми заполнено неподвижным диэлектриком (однородным или неоднородным). Под $q_1, q_2, \ldots$ здесь следует понимать только *свободные*, а не поляризационные заряды. Тела, на которых они находятся, могут быть как проводниками, так и диэлектриками. Проводники могут быть любых размеров. Размеры диэлектрических тел должны быть настолько малы, чтобы потенциал каждого тела мог с достаточной точностью считаться одинаковым во всех его точках. Этого всегда можно достигнуть, мысленно разделяя диэлектрик на достаточно малые части и считая каждую из них за отдельное диэлектрическое тело. Примем за начальное такое состояние,

в котором все тела не заряжены. Будем переносить электричество из бесконечности на эти тела бесконечно малыми порциями. Рассуждая так же, как в случае конденсатора, найдем

$$W = \int \sum_i \varphi_i' \, dq_i',$$

где суммирование ведется по всем заряженным телам. Штрихи над φ_i и q_i поставлены для того, чтобы указать, что эти величины *переменные*, т. е. меняются во время зарядки. Интеграл легко вычислить, используя то обстоятельство, что его значение *не зависит от способа зарядки.* Пусть q_i и φ_i — заряд и потенциал i-го тела в конечном состоянии. Осуществим зарядку так, чтобы в любой момент времени переменные заряды q_i' были пропорциональны их конечным значениям q_i:

$$q_i' = kq_i,$$

где k — переменная величина, одинаковая для всех зарядов q_i. Во время зарядки она возрастает от начального значения $k = 0$ до конечного $k = 1$. Поскольку связь между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ предполагается линейной ($\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$), увеличение всех зарядов в несколько раз ведет к увеличению всех потенциалов в такое же число раз. На этом основании можно написать

$$\varphi_i' = k\varphi_i.$$

Единственной переменной, определяющей при зарядке мгновенные значения зарядов и потенциалов, стала величина k. Ее мы и примем за переменную интегрирования. Очевидно, $dq_i' = q_i \, dk$, и, следовательно,

$$W = \sum \varphi_i q_i \int_0^1 k \, dk.$$

Выполнив интегрирование, получим

$$W = \frac{1}{2} \sum \varphi_i q_i. \tag{28.4}$$

Ограничение, касающееся размеров диэлектриков, введенное при получении формулы (28.4), можно снять, если записать эту формулу в виде

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi\rho \, dV + \frac{1}{2} \int \varphi\sigma \, dS, \tag{28.5}$$

где ρ — объемная, а σ — поверхностная плотности (свободного) электричества. В таком виде формула справедлива при *любом* распределении проводящих и диэлектрических сред в пространстве. Интегрирование должно проводиться по всем свободным зарядам.

3. Рассмотрим теперь специально случай, когда все заряды находятся на проводниках. Тогда выражение для W надо взять в виде (28.4). Размеры проводников и их распределение в пространстве могут быть какими угодно. В частном случае конденсатора число проводников равно двум, а их заряды равны и противоположны по знаку. В этом

случае формула (28.4) переходит в (28.3). Пусть теперь число проводников произвольно. Если заряды на проводниках получат бесконечно малые приращения δq_i, то изменятся и потенциалы φ_i. Электрическая энергия изменится на

$$\delta W = \frac{1}{2}\sum \varphi_i\,\delta q_i + \frac{1}{2}\sum q_i\,\delta\varphi_i.$$

Но та же величина равна $\delta A^{\text{внеш}} = \sum \varphi_i\,\delta q_i$. Приравнивая оба выражения, находим

$$\sum \varphi_i\,\delta q_i = \sum q_i\,\delta\varphi_i. \tag{28.6}$$

С помощью этого соотношения легко доказать симметрию емкостных и потенциальных коэффициентов C_{ij} и V_{ij}. Для упрощения доказательства допустим, что заряженными являются только i-й и j-й проводники, причем потенциал φ_j поддерживается постоянным. Тогда

$$\varphi_i\,\delta q_i + \varphi_j\,\delta q_j = q_i\,\delta\varphi_i. \tag{28.6a}$$

Далее,

$$q_i = C_{ii}\varphi_i + C_{ij}\varphi_j, \quad q_j = C_{ji}\varphi_i + C_{jj}\varphi_j.$$

Ввиду постоянства φ_j

$$\delta q_i = C_{ii}\,\delta\varphi_i, \quad \delta q_j = C_{ji}\,\delta\varphi_j.$$

Подставляя эти значения в соотношение (28.6а), получим

$$C_{ij} = C_{ji}. \tag{28.7}$$

Отсюда следует также, что $V_{ij} = V_{ji}$. Этот результат можно, конечно, получить непосредственно из соотношения (28.6).

4. Учтем теперь, что поляризация диэлектрика, возникающая при возбуждении в нем электрического поля, может сопровождаться *изменением температуры* диэлектрика и появлением в нем *механических сил*, и *упругих напряжений*. Вследствие этого во время зарядки тел диэлектрическая проницаемость ε может измениться, поскольку она зависит от температуры и плотности диэлектрика. Это обстоятельство не сказывается на выражении для элементарной работы (28.1). Но последующее интегрирование этого выражения было проведено в предположении *постоянства* ε. Ясно, что таким путем нельзя получить выражение для внутренней электрической энергии системы. Однако выражения (28.3)–(28.5) определяют не менее важную физическую величину, а именно *свободную энергию системы*, точнее, ту часть ее, которая связана с электризацией тел. Чтобы показать это, переведем систему в конечное состояние в два этапа. Сначала в отсутствие электрического поля деформируем все тела и подведем к ним такое количество тепла, чтобы получилось то же распределение температуры и плотности, что и в конечном состоянии. Приращение свободной энергии в таком процессе обозначим $\Psi_{\text{упр}}$. Оно, очевидно, от электрического поля не зависит. Затем бесконечно малыми порциями будем

подводить к телам системы электричество, сохраняя неизменными температуру и плотность в каждой точке пространства. Диэлектрическая проницаемость среды изменяться не будет. Следовательно, на этом этапе применим способ вычисления работы, которым мы пользовались при выводе формул (28.3) и (28.5). Но, как известно из термодинамики, внешняя работа при изотермическом квазистатическом процессе идет на приращение свободной энергии системы. Значит, приращение свободной энергии на втором этапе процесса будет $\Psi_{\text{эл}} = W$. Если свободную энергию в начальном состоянии принять за нуль, то для полной свободной энергии системы в конечном состоянии можно написать

$$\Psi = \Psi_{\text{упр}} + W. \qquad (28.8)$$

Первое слагаемое в правой части дает *упругую* часть свободной энергии, второе — *электрическую.*

§ 29. Локализация электрической энергии в пространстве

1. В предыдущем параграфе работу по электризации диэлектрика и его электрическую энергию мы выразили через заряды и потенциалы наэлектризованных тел. Но те же величины (работу и энергию) можно выразить через векторы **E** и **D**, что более адекватно соответствует духу теории поля.

Начнем с вычисления элементарной работы $\delta^* A^{\text{внеш}}$, которую производят внешние силы при квазистатическом процессе электризации диэлектрика. При этом мы будем предполагать, что во время электризации объем диэлектрика остается неизменным, а сам диэлектрик — неподвижным. Это освобождает нас от необходимости учета работы упругих и вязких сил. Вся работа внешних сил затрачивается на отделение положительного электричества от отрицательного, и эта работа в конечном результате приводит к определенному распределению электричества в пространстве.

Возьмем в изотропном диэлектрике две бесконечно малые плоские площадки AB и CD, перпендикулярные к электрическому полю E (рис. 83). Расстояние между ними l предполагается бесконечно малым высшего порядка по сравнению с их линейными размерами. При этом условии площадки AB и CD могут рассматриваться как бесконечные плоскости, и краевые эффекты на них можно не учитывать. Пусть внешние силы, направленные против поля **E**, переносят с площадки AB на площадку CD электрический заряд $\delta q = S\,\delta\sigma$, где S — площадь одной площадки, а $\delta\sigma$ — приращение поверхностной плотности электричества на площадке CD. Работа внешних сил против поля E при таком переносе равна

$$\delta^* A^{\text{внеш}} = \delta q E l = S l E\,\delta\sigma = V E\,\delta\sigma,$$

где V — бесконечно малый объем между AB и CD. В результате такого переноса, как это следует из теоремы Гаусса, электрическое поле

изменяется только между площадками, а вне их всюду остается неизменным. Длина вектора **D** между площадками изменяется на величину $dD = 4\pi\,\delta\sigma$, так что для $\delta^* A^{\text{внеш}}$ получается

$$\delta^* A^{\text{внеш}} = \frac{1}{4\pi}\,E\,dD. \tag{29.1}$$

При выводе этой формулы было использовано предположение об одинаковой направленности векторов **E** и **D**, что в общем случае имеет место только для *изотропных сред.* В *анизотропных диэлектриках* (*кристаллах*) направления векторов **E** и **D**, вообще говоря, различны. Но легко видеть, что в этом случае роль величины D играет проекция вектора **D** на направление поля **E**. Поэтому формула (29.1) обобщается и принимает вид

$$\delta^* A^{\text{внеш}} = \frac{1}{4\pi}\,\mathbf{E}\,d\mathbf{D}. \tag{29.2}$$

2. Формула (29.2) справедлива для бесконечно малого объема V любой формы. Для доказательства достаточно разбить произвольный объем V бесконечно близкими параллельными плоскостями, заменить поверхность, ограничивающую объем V ступенчатой поверхностью, как это изображено на рис. 83, а затем перейти к пределу, неограниченно уменьшая расстояние между соседними плоскостями. Для каждого объемчика между такими плоскостями справедлива формула (29.2). Суммируя выражение (29.2) по всем объемчикам, мы получим выражение того же типа, в котором, однако, под V следует понимать уже полный объем выделенной бесконечно малой части диэлектрика. Существенно, что при указанном способе переноса зарядов, как это следует из теоремы Гаусса, электрическое поле меняется только внутри объема V, но остается неизменным вне этого объема.

Заметим еще, что заряды, переносимые с одной плоскости на другую, соседнюю, не обязательно должны быть одинаковы. Если они различны, то, вообще говоря, на рассматриваемых плоскостях будет происходить накопление (или убыль) электричества. При переходе к пределу, когда расстояние между соседними плоскостями беспредельно уменьшается, поверхностное распределение электричества на плоскостях перейдет в объемное. Отсюда следует, что формула (29.2) справедлива не только при отсутствии, но и при наличии в диэлектрике объемных зарядов. Впрочем, это и так очевидно, так как при выводе этой формулы никаких ограничений на распределение электричества по объему пространства не накладывалось.

Работа внешних сил, отнесенная к единице объема, найдется делением выражения (29.2) на V. Для указания на бесконечную малость этой величины мы будем пользоваться символом δ, в отличие от символа δ^*, который применялся для аналогичной работы в бесконечно малом объеме V. Таким образом, для работы, производимой внешними силами в единице объема неподвижного диэлектрика при бесконечно малом

смещении электрических зарядов, мы получаем выражение

$$\delta A^{\text{внеш}} = \frac{1}{4\pi}\,\mathbf{E}\,d\mathbf{D}. \tag{29.3}$$

Существенно отметить *универсальность* формулы (29.3), т. е. ее применимость для любых диэлектриков, поскольку никакая конкретная связь между векторами **E** и **D** при ее выводе не использовалась.

3. Допустим теперь, что кроме работы по электризации диэлектрика никаких других работ над диэлектриком не производится. При этом, как уже указывалось в предыдущем параграфе, может выделяться тепло. Но мы пока отвлечемся от этого осложняющего обстоятельства и учтем его только в следующем параграфе. Тогда формула (29.3) будет определять элементарное приращение электрической энергии в единице объема пространства W:

$$dW = \frac{1}{4\pi}\,\mathbf{E}\,d\mathbf{D}. \tag{29.4}$$

Если известна зависимость вектора **D** от вектора **E**, то сама электрическая энергия W в единице объема найдется интегрированием этого выражения по всему процессу:

$$W = \int dW = \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{E}\,d\mathbf{D}. \tag{29.5}$$

В частности, если $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ и во время процесса электризации ε остается постоянной, то

$$W = \frac{\varepsilon}{4\pi}\int \mathbf{E}\,d\mathbf{E} = \frac{\varepsilon}{8\pi}\,\mathbf{E}^2 = \frac{1}{8\pi}\,\mathbf{ED}. \tag{29.6}$$

Если при этом ε не зависит от температуры, то эта формула определяет *внутреннюю электрическую энергию*. Если же ε зависит от температуры, то при выводе формулы (29.6) надо предполагать, что температура диэлектрика постоянна. В этом случае формулой (29.6) определяется *свободная электрическая энергия* в единице объема. Все это находится в соответствии с тем, что было сказано по поводу формулы (28.5) в п. 4 предыдущего параграфа.

4. Аналогичное вычисление энергии можно провести и для кристаллов. В этом случае вместо скаляра ε надо пользоваться тензором диэлектрической проницаемости ε_{ij}: зависимость между компонентами векторов **D** и **E** определяется формулой (15.5). При этом надо воспользоваться симметрией тензора ε_{ij}, т. е. соотношением $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ $(i, j = x, y, z)$. Об этой симметрии упоминалось в § 15 без доказательства. Приведем теперь это доказательство.

В кристаллах выражение (29.4) определяет дифференциал внутренней электрической энергии (когда тензор ε_{ij} не зависит от температуры) в единице объема. Когда ε_{ij} является функцией температуры, то то же выражение есть дифференциал свободной электрической энергии. Какой из этих двух случаев осуществляется — безразлично. Существенно только то, что величина W является *функцией состояния*,

а следовательно, дифференциал dW — *полным дифференциалом.* Для него можно написать

$$4\pi\, dW = \mathbf{E}\, d\mathbf{D} = \sum_i E_i\, dD_i = \sum_i E_i\, d\sum_j \varepsilon_{ij} E_j = \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} E_i\, dE_j. \quad (29.7)$$

Чтобы это выражение было полным дифференциалом, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial(\varepsilon_{ij} E_i)}{\partial E_i} = \frac{\partial(\varepsilon_{ji} E_j)}{\partial E_j}.$$

Так как тензор ε_{ij} не зависит от напряженности поля, то отсюда получается

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}. \quad (29.8)$$

Распространим теперь формулу (29.6) на случай кристаллических сред. Для этого следует проинтегрировать выражение (29.4). Прежде всего заметим, что значение суммы не зависит от того, какими буквами обозначены индексы суммирования. Пользуясь этим, в выражении (29.7) заменим индекс i на j, а индекс j — на i:

$$4\pi\, dW = \sum_j \sum_i \varepsilon_{ij} E_j\, dE_i,$$

или в силу (29.8)

$$4\pi\, dW = \sum_j \sum_i \varepsilon_{ij} E_j\, dE_i = \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} E_j\, dE_i.$$

Сложив это с (29.7), получим

$$8\pi\, dW = \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij}(E_i\, dE_j + E_j\, dE_i) = \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij}\, d(E_i E_j).$$

Ввиду независимости тензора ε_{ij} от напряженности поля, интегрирование легко выполняется и дает

$$W = \frac{1}{8\pi} \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij}\, dE_j = \frac{1}{8\pi} \sum_i E_i D_i = \frac{1}{8\pi}\, (\mathbf{ED}).$$

Таким образом, и для кристаллов мы приходим к прежней формуле (29.6).

5. Полная электрическая энергия (внутренняя или свободная) выражается формулой

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{ED}\, dV = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon \mathbf{E}^2\, dV = \frac{1}{8\pi} \int \frac{\mathbf{D}^2}{\varepsilon}\, dV, \quad (29.9)$$

где интегрирование распространяется по всему бесконечному пространству. Для той же величины ранее была получена формула (28.5). С чисто математической точки зрения формулы (28.5) и (28.9) эквивалентны и отличаются одна от другой только по форме.

Однако за формальным различием этих формул стоит и различие в физической интерпретации электрической энергии. Уравнение (29.9)

выражает электрическую энергию в виде предела бесконечного множества слагаемых, каждое из которых равно $(\varepsilon/8\pi)\,\mathbf{E}^2\,dV$ и относится к определенному элементу объема dV. Это можно понимать в том смысле, что *носителем электрической энергии является электрическое поле*, причем энергия поля *локализована* в пространстве так, что в каждой единице объема содержится энергия W, определяемая формулой (29.8), в которой $\mathbf{E}$ означает напряженность электрического поля в данном элементе объема. Величина W называется *объемной плотностью электрической энергии.* Напротив, выражение (28.5) может быть формально истолковано как *потенциальная энергия взаимодействия электрических зарядов*, и притом *взаимодействия на расстоянии.* Такое истолкование исключает представление о локализации энергии в определенных участках пространства. В нем акцент ставится на электрические заряды, в частности на заряды проводников, находящихся в диэлектрике. При первой же интерпретации центр тяжести переносится в диэлектрики, окружающие эти проводники. Внутри проводников $\mathbf{E} = 0$, и в них совсем не локализована электрическая энергия. Она целиком локализована в диэлектриках.

Какому же из этих двух представлений об электрической энергии следует отдать предпочтение? В рамках электростатики *принципиально невозможно* указать ни одного опыта, который позволил бы сделать выбор между ними. Дело в том, что в электростатике электрическое поле неотделимо от зарядов, являющихся его источниками. Величиной и расположением зарядов *однозначно* определяется электростатическое поле. Обратно, заданием поля во всем пространстве *также однозначно* определяется плотность электрических зарядов. Не так обстоит дело в случае переменных полей. Переменные электромагнитные поля могут существовать *самостоятельно*, *независимо от возбудивших их электрических зарядов.* Заряды могут нейтрализоваться, а поле, которое они возбудили, может продолжать существовать в виде электромагнитных волн, которым присущ определенный запас энергии. Эта энергия не может быть представлена как потенциальная энергия зарядов, взаимодействующих на расстоянии, поскольку самих зарядов уже нет. Формула (28.5) теряет смысл. Но формула (29.9), а также выражения (29.6) сохраняют смысл и для переменных электромагнитных полей.

Представляют ли они в этом случае электрическую энергию и ее плотность — этот вопрос требует особого исследования. Во всяком случае нельзя выдвинуть каких-либо возражений против возможности представления электромагнитной энергии через напряженности электрического и магнитного полей. Сомнения могут относиться только к конкретным формулам, с помощью которых производится такое представление. Следовательно, если электростатику рассматривать как предельный случай электродинамики, то *даже в электростатике* следует отдать предпочтение теории поля с ее представлением о локализации электрической энергии в пространстве.

6. Заметим в заключение, что математическая эквивалентность выражений (28.5) и (29.9) для статических полей может быть использо-

вана для доказательства единственности решения электростатической задачи, сформулированной в п. 1 § 22. Действительно, предположим, что задача допускает несколько решений. Возьмем два из них: 1) $\mathbf{E}_1 = -\operatorname{grad}\varphi_i$, $\mathbf{D}_1 = \varepsilon\mathbf{E}_1$; 2) $\mathbf{E}_2 = -\operatorname{grad}\varphi_2$, $\mathbf{D}_2 = \varepsilon\mathbf{E}_2$. Оба решения могут отличаться значениями плотности связанных электрических зарядов. Но плотности свободных электрических зарядов ρ_1 и ρ_2 должны быть одинаковы, так как они заданы. Если во втором решении изменить знаки всех свободных и поляризационных зарядов, то очевидно возникшее при этом поле будет равно $\mathbf{E}_2' = -\mathbf{E}_2$, так как свободными и поляризационными зарядами электростатическое поле определяется однозначно. В силу принципа суперпозиции вектор

$$\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2' = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$$

будет представлять также какое-то электростатическое поле. Этому полю соответствует объемная плотность свободных зарядов $\rho = \rho_1 - \rho_2$ и потенциал $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Потенциал φ не может обращаться в тождественный нуль, так как по нашему предположению соответствующее поле $\mathbf{E}$ во всех точках пространства не обращается в нуль. Ввиду эквивалентности формул (28.5) и (29.9) можно написать

$$\int \frac{\varepsilon\mathbf{E}^2}{8\pi}\,dV = \frac{1}{2}\int \varphi\rho\,dV + \frac{1}{2}\int \varphi\sigma\,dS.$$

Первый интеграл в правой части равен нулю, так как $\rho = 0$. Поверхностный интеграл достаточно взять только по поверхностям проводников, так как на всякой поверхности, проходящей в диэлектрике, $\sigma \equiv \sigma_1 - \sigma_2 = 0$. Поскольку потенциал каждого проводника $\varphi^{(i)}$ постоянен, поверхностный интеграл можно представить в виде

$$\int \varphi\sigma\,dS = \sum_i \varphi_i \oint\limits_{S^{(i)}} \sigma\,dS = \sum_i \varphi^{(i)} q^{(i)},$$

где $q_i = q_1^{(i)} - q_2^{(i)}$ — полный заряд i-то проводника. Если задан потенциал i-го проводника, то $\varphi^{(i)} = 0$, а если задан заряд, то $q^{(i)} = 0$. В обоих случаях $\varphi^{(i)}q^{(i)} = 0$. Таким образом,

$$\int \frac{\varepsilon\mathbf{E}^2}{8\pi}\,dV = 0.$$

Ввиду положительности ε отсюда следует, что $\mathbf{E}^2 = 0$. Следовательно, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 = 0$, т. е. введенное нами предположение неверно. Это и доказывает единственность решения электростатической задачи.

ЗАДАЧИ

1. Вычислить электрическую энергию шара радиуса a, заряд которого q равномерно распределен по его поверхности.

Ответ. $W = q^2/(2a)$.

2. То же для шара, заряд которого равномерно распределен по его объему.

Ответ. $W = 3q^2/(5a)$.

3. Доказать математическую эквивалентность выражений (28.5) и (29.9), используя математическую теорему Гаусса–Остроградского.

Решение. Не нарушая общности, можно сначала считать, что поверхностных зарядов нет. Тогда векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ можно дифференцировать. Подставляя в формулу (29.9) $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ и воспользовавшись тождеством $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{D}) = \varphi\operatorname{div}\mathbf{D} + \mathbf{D}\operatorname{grad}\varphi$, а также соотношением (13.5), получим

$$W = -\frac{1}{8\pi}\int \operatorname{div}(\varphi\mathbf{D})\,dV + \frac{1}{2}\int \varphi\rho\,dV,$$

где интегрирование производится по всему бесконечному пространству. Первый интеграл в правой части этого равенства равен нулю. Действительно, предполагая, что все заряды находятся в конечной области пространства, окружим ее сферой S большого радиуса r и воспользуемся формулой Гаусса–Остроградского

$$\int\limits_V \operatorname{div}(\varphi\mathbf{D})\,dV = \oint\limits_S \varphi(\mathbf{D}\,d\mathbf{S}),$$

где V означает объем, ограниченный сферой S. Асимптотически при $r \to \infty$ вектор $\mathbf{D}$ на сфере S меняется с радиусом r так же, как в случае точечного заряда, т. е. пропорционально $1/r^2$, а потенциал убывает пропорционально $1/r$. Следовательно, $\varphi\mathbf{D}$ будет убывать асимптотически как $1/r^3$. Поверхность же S возрастает пропорционально r^2. Значит, поверхностный интеграл в правой части предыдущего равенства асимптотически убывает как $1/r$ и в пределе при $r \to 0$ (т. е. при переходе к бесконечному пространству) обратится в нуль. Итак,

$$W = \frac{1}{2}\int \varphi\rho\,dV.$$

Введя элемент заряда $dq = \rho\,dV$, перепишем это равенство в виде

$$W = \frac{1}{2}\int \varphi\,dq.$$

После этого отпадает необходимость в специальном исследовании поверхностных зарядов. Достаточно заметить, что заряженную поверхность можно рассматривать как предельный случай тонкого слоя, заряженного по объему. К такому слою последнее выражение применимо. Разделив элементы заряда на объемные $\rho\,dV$ и поверхностные $\sigma\,dS$, получим

$$W = \frac{1}{2}\int \varphi\rho\,dV + \frac{1}{2}\int \varphi\sigma\,dS,$$

т. е. формулу (28.5).

§ 30. Взаимная энергия точечных зарядов

1. Пусть точечные заряды q_1 и q_2 находятся в вакууме на бесконечном расстоянии друг от друга. Чтобы их сблизить до расстояния r_{12}, надо затратить работу q_1q_2/r_{12}. Потенциальная энергия взаимодействия зарядов будет

$$U = \frac{q_1q_2}{r_{12}}. \tag{30.1}$$

Для нескольких точечных зарядов

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \sum \frac{q_i q_k}{r_{ik}}. \tag{30.2}$$

Коэффициент 1/2 поставлен потому, что при суммировании потенциальная энергия каждой пары зарядов учитывается дважды: в виде слагаемого $q_i q_k / r_{ik}$ и в виде равного ему слагаемого $q_k q_i / r_{ki}$. Формулу (30.2) можно представить в виде

$$U = \frac{1}{2} \sum \varphi_i q_i, \tag{30.3}$$

где φ_i — потенциал в точке нахождения i-го заряда, создаваемый всеми остальными зарядами:

$$\varphi_i = \sum_{k \neq i} \frac{q_k}{r_{ik}}. \tag{30.4}$$

2. По внешнему виду формула (30.3) совпадает с аналогичной формулой (28.4) для электрической энергии заряженных проводников. На самом деле между обеими формулами имеется глубокое различие. Это видно уже из того, что выражение (28.4) может быть преобразовано в объемный интеграл (29.9), который всегда положителен. Выражение (30.3) не допускает такого преобразования, так как оно может быть и положительным и отрицательным. Например, оно отрицательно для двух точечных зарядов противоположных знаков. Каждый заряд q_i, взятый в отдельности, обладает электрической энергией. Она называется *собственной энергией* заряда q_i, и представляет собой энергию взаимного отталкивания бесконечно малых частей, на которые его можно мысленно разбить. Эта энергия учитывалась при выводе формулы (28.4), но не учитывалась при выводе формулы (30.3). При получении формулы (30.3) каждый заряд q_i рассматривался как нечто целое и неизменное. Учитывалась только работа, затрачиваемая на *сближение* таких неизменных зарядов, но не на их *образование.* Напротив, при выводе формулы (28.4) учитывалась также работа, затрачиваемая на *образование* зарядов q_i путем конденсации их из бесконечно малых порций электричества, переносимых из бесконечности. В соответствии с этим формула (28.4) определяет *полную электрическую энергию системы зарядов*, а формула (30.3) — только их *взаимную потенциальную энергию.* В формуле (28.4) φ_i означает потенциал проводника, создаваемый всеми зарядами, а в формуле (30.3) — всеми зарядами, за исключением i-го.

3. Для лучшего уяснения вопроса рассмотрим два бесконечно малых шарика неизменных размеров. Пусть сначала шарики не заряжены, бесконечно далеко находятся друг от друга, а электричество распределено по всему бесконечному пространству с бесконечно малой плотностью. Соберем все электричество на шариках. Так как расстояние между ними бесконечно велико, то они не будут оказывать никакого

влияния друг на друга. Вся работа пойдет на увеличение собственных энергий шариков. Эти энергии будут равны соответственно

$$W_1 = \frac{1}{8\pi}\int E_1^2\,dV, \quad W_2 = \frac{1}{8\pi}\int E_2^2\,dV.$$

Затем сблизим заряженные шарики, для чего потребуется совершить работу $U = q_1 q_2/r_{12}$ (расстояние между шариками r_{12} должно быть очень велико по сравнению с их размерами). Полная электрическая энергия шариков будет

$$W = \frac{1}{8\pi}\int E_1^2\,dV + \frac{1}{8\pi}\int E_2^2\,dV + U.$$

Но ту же энергию можно выразить иначе. Пока шарики не заряжены, сблизим их до расстояния r_{12}, а затем будем собирать на них электричество. Потребуется работа

$$W = \frac{1}{8\pi}\int(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2\,dV = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}_1^2\,dV + \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}_2^2\,dV + \frac{1}{4\pi}\int(\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2)\,dV.$$

Сравнивая оба выражения, находим

$$U = \frac{1}{4\pi}\int(\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2)\,dV. \tag{30.5}$$

§ 31. Термодинамика диэлектриков

1. Применим к процессу поляризации диэлектриков начала термодинамики. Будем предполагать, что диэлектрики *изотропны* как в отсутствие, так и при наличии электрического поля. К таким диэлектрикам относятся, например, жидкости и газы. Выделим мысленно достаточно малую часть диэлектрика, которая с достаточной точностью может считаться однородной. С той же точностью могут рассматриваться как однородные давление $\mathscr{P}$, а также напряженность электрического поля внутри этой части. Первое начало термодинамики для выделенной части запишем в виде

$$\delta A^{\text{внеш}} + \delta Q = dU, \tag{31.1}$$

где δQ — количество сообщенной теплоты, а dU — приращение внутренней энергии. Работа над диэлектриком $\delta A^{\text{внеш}}$ слагается из двух частей. Первая часть $\mathscr{P}dV$ есть работа, производимая внешним давлением. Вторая идет на электризацию диэлектрика и представляется выражением (29.3). Влияние слагаемого $\mathscr{P}dV$ было подробно исследовано во втором томе нашего курса. Поэтому в целях сокращения изложения мы его здесь опустим. Таким образом, мы предполагаем, что поляризация диэлектрика либо сопровождается незначительными изменениями его объема, либо этот объем поддерживается постоянным. Кроме того, не теряя общности, мы можем относить все величины к единице объема диэлектрика, т. е. положить $V = 1$. В результате получим

$$\delta Q = dU - \frac{1}{4\pi}E\,dD. \tag{31.2}$$

2. Введем энтропию системы S, абсолютную температуру T, а также термодинамические функции: свободную энергию

$$\Psi = U - TS, \tag{31.3}$$

термодинамический потенциал

$$\Phi = \Psi - \frac{1}{4\pi} ED \tag{31.4}$$

и энтальпию

$$I = U - \frac{1}{4\pi} ED. \tag{31.5}$$

Для квазистатических процессов $\delta Q = T\,dS$ и уравнение (31.2) запишется в виде

$$dU = T\,dS + \frac{1}{4\pi} E\,dD. \tag{31.6}$$

Используя это соотношение и взяв дифференциалы от выражений (31.3)–(31.5), найдем

$$d\Psi = -S\,dT + \frac{1}{4\pi} E\,dD, \tag{31.7}$$

$$d\Phi = -S\,dT - \frac{1}{4\pi} D\,dE, \tag{31.8}$$

$$dI = T\,dS - \frac{1}{4\pi} D\,dE. \tag{31.9}$$

Уравнения (31.6)–(31.9) являются *основными уравнениями термодинамики диэлектриков.* Для получения из них конкретных выводов их необходимо дополнить «*уравнением состояния*». Роль такого уравнения играет соотношение вида

$$D = f(E, T, \tau), \tag{31.10}$$

где τ — плотность вещества диэлектрика. Такое уравнение не может быть выведено чисто термодинамическими методами. Оно должно быть заимствовано либо из опыта, либо из молекулярной теории поляризации диэлектриков.

3. Считая, что векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ связаны уравнением состояния (31.10), и интегрируя выражение (31.7) при постоянных T и τ, получим

$$\Psi = \frac{1}{4\pi}\int E\,dD + \Psi_0(T, \tau), \tag{31.11}$$

где $\Psi_0(T, \tau)$ — постоянная интегрирования. Она, очевидно, имеет смысл свободной энергии диэлектрика при отсутствии в нем электрического поля. Таким образом, мы вновь приходим к выводу, что формула (29.5) выражает не внутреннюю, а *свободную энергию* диэлектрика, точнее, ту ее часть, которая зависит от напряженности электрического поля. Возьмем уравнение состояния в виде $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$. Величина ε зависит только от T и τ, которые при интегрировании в формуле (31.11) должны

оставаться постоянными. Поэтому интегрирование дает

$$\Psi = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} + \Psi_0 = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon} + \Psi_0. \tag{31.12}$$

Найдем теперь выражение для внутренней энергии диэлектрика U. Из формул (31.3) и (31.7) получаем

$$U = \Psi - T\left(\frac{\partial\psi}{\partial T}\right)_{D,\tau}, \tag{31.13}$$

причем мы явно отметили, что при дифференцировании плотность τ должна оставаться постоянной, так как все наше рассмотрение проведено в предположении постоянства τ. Используя выражение (31.2), из формулы (31.13) найдем

$$U = \left(1 + \frac{T}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)\frac{D^2}{8\pi\varepsilon} + U_0(T,\tau) = \left(\varepsilon + T\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)\frac{E^2}{8\pi} + U_0(T,\tau), \tag{31.14}$$

где функция $U_0(T,\tau)$ имеет смысл *внутренней энергии* диэлектрика при отсутствии в нем электрического поля. *Если диэлектрическая проницаемость ε не зависит от температуры, то электрические составляющие свободной и внутренней энергий диэлектрика равны между собой. При наличии температурной зависимости ε это равенство уже несправедливо.*

4. Если изменение поляризации диэлектрика производится *квазистатически* и *адиабатически*, то оно, вообще говоря, сопровождается изменением *температуры* диэлектрика. Такое изменение температуры называется *электрокалорическим эффектом.* При квазистатическом адиабатическом процессе энтропия S остается постоянной. Рассматривая ее как функцию E и T (τ поддерживается постоянной), можно написать для бесконечно малого процесса

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_E \Delta T + \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_T \Delta E = 0.$$

Очевидно,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_E = \frac{1}{T}\left(\frac{T\partial S}{\partial T}\right)_E = \frac{1}{T}\left(\frac{\delta Q}{\delta T}\right)_E = \frac{C_E}{T},$$

где C_E — теплоемкость единицы объема диэлектрика при постоянной напряженности электрического поля E. Далее, из формулы (31.8) получаем

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_T = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial D}{\partial T}\right)_E = \frac{E}{4\pi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}.$$

Таким образом,

$$\Delta T = -\frac{TE}{4\pi C_E}\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\Delta E. \tag{31.15}$$

Величина $\partial\varepsilon/\partial T$ обычно отрицательна. В этом случае диэлектрик, помещенный в диэлектрическое поле, охлаждается при адиабатическом уменьшении напряженности поля. Аналогично ведет себя парамагнетик в магнитном поле при адиабатическом размагничивании. Это явление используется для получения сверхнизких температур (см. § 73). При конечном изменении напряженности поля от E_1 до E_2 температура диэлектрика изменяется на

$$T_2 - T_1 = -\int\limits_{E_1}^{E_2} \frac{TE}{4\pi C_E}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\,dE. \tag{31.16}$$

5. Иногда внутреннюю энергию и прочие термодинамические функции диэлектрика определяют несколько иначе. Исключим из формулы (31.2) D, пользуясь определением (13.3). Получим

$$\delta Q = dU - \frac{1}{4\pi}\,E\,dE - E\,dP.$$

Затем введем новую функцию состояния

$$U' = U - E^2/(8\pi). \tag{31.17}$$

Тогда

$$\delta Q = dU' - E\,dP. \tag{31.18}$$

Функция U' получается вычитанием из U величины $E^2/(8\pi)$, которая может быть истолкована как *плотность электрической энергии в вакууме.* Таким образом, U' имеет смысл той части плотности внутренней энергии диэлектрика, которая связана с его *поляризацией.* Однако в применениях термодинамики такая интерпретация не обязательна. Для термодинамики важно только, что величина U' есть *функция состояния.* Она может быть использована в термодинамических соотношениях вместо внутренней энергии U, и притом с тем же успехом. Величину U' можно было бы назвать *энергией поляризации диэлектрика.* С введением этой величины соотношение (31.6) переходит в

$$dU' = T\,dS + E\,dP. \tag{31.19}$$

Свободная энергия поляризации диэлектрика должна быть определена выражением $F' = U' - TS$. Соответственно изменяются определения (31.4) и (31.5), а также термодинамические соотношения (31.7)–(31.9).

ЗАДАЧА

Вычислить теплоемкости единицы объема диэлектрика C_D и C_E при постоянных D и E соответственно. Как осуществить нагревание при постоянном D и при постоянном E?

Решение.

$$C_D = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_D = -T\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial T^2}\right)_D, \quad C_E = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_E = -T\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial T^2}\right)_E.$$

Подставив сюда

$$\Psi = \Psi_0 + \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \quad \text{и} \quad \Phi = \Psi - \frac{1}{4\pi} ED = \Psi_0 - \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}$$

и выполнив дифференцирование, получим

$$C_D = C_V - T\frac{D^2}{8\pi}\frac{d}{dt^2}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = C_V + \frac{TE^2}{8\pi}\frac{d^2\varepsilon}{dT^2} - \frac{TE^2}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{d\varepsilon}{dT}\right)^2, \tag{31.20}$$

$$C_E = C_V + \frac{TE^2}{8\pi}\frac{d^2\varepsilon}{dT^2}, \tag{31.21}$$

где C_V — теплоемкость единицы объема диэлектрика при постоянном объеме в отсутствие электрического поля. Теплоемкость C_D экспериментально можно определить, нагревая диэлектрик в плоском заряженном конденсаторе, отключенном от источника напряжения, а теплоемкость C_E — в конденсаторе, между обкладками которого поддерживается постоянное напряжение.

§ 32. Свободная энергия и силы

1. В электрическом поле на диэлектрики и проводники действуют силы. Их называют *пондеромоторными силами*, т. е. силами, действующими на *весомые тела.* Этот термин был введен в то время, когда в физике, наряду с обычными веществами, признавалось существование многих *невесомых субстанций* (теплород, эфир, электрические и магнитные жидкости и пр.). Теперь он устарел, так как невесомых субстанций не существует. Однако мы сохраняем его за неимением другого. Первопричиной возникновения пондеромоторных сил являются электрические заряды, сообщаемые телам. Однако сообщение зарядов телам осложняется появлением поляризационных зарядов и упругих деформаций в диэлектриках и проводниках. Вычисление пондеромоторных сил с одновременным исследованием механизма их возникновения в общем случае довольно затруднительно. Термодинамика дает общий метод вычисления пондеромоторных сил, отвлекаясь от такого механизма.

2. Поясним этот метод на примере плоского конденсатора, пространство между обкладками которого заполнено каким-то диэлектриком. Зарядим конденсатор, а затем отключим его от источника электричества, поддерживая тем самым заряды на пластинах постоянными. Между пластинами возникнут силы притяжения. Обозначим через $\mathbf{F}$ одну из них, например силу, действующую на положительно заряженную пластину (рис. 84). Пластину, заряженную отрицательно, закрепим, а к положительно заряженной пластине приложим внешнюю силу $\mathbf{F}'$, уравновешивающую силу $\mathbf{F}$. Если нарушить равновесие, бесконечно мало изменив силу $\mathbf{F}'$, то положительная пластина начнет бесконечно

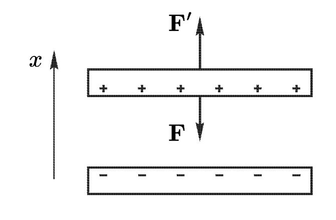


Рис. 84

медленно перемещаться. Кинетическую энергию возникшего движения можно не учитывать, так как процесс можно проводить бесконечно медленно (квазистатически) и достаточно долго. Тогда сила $\mathbf{F}'$ будет отличаться от силы $\mathbf{F}$ бесконечно мало, а потому с точностью до бесконечно малых высшего порядка работы этих сил $\delta A'$ и δA будут равны по величине и противоположны по знаку: $\delta A' = -\delta A$. Процесс может сопровождаться *выделением* или *поглощением теплоты.* Будем эту теплоту отводить, чтобы *температура системы оставалась постоянной.* Тогда работа внешней силы $\mathbf{F}'$ пойдет на приращение свободной энергии системы: $\delta A' = d\Psi$, или

$$\delta A + (d\Psi)_{q,T} = 0. \tag{32.1}$$

Значки q и T указывают, что приращение свободной энергии должно быть вычислено при постоянных q и T. Вычислив по формуле (32.1) работу δA, можно затем найти и искомую силу $\mathbf{F}$.

Формула (32.1) носит общий характер. Она применима к *любым системам*, а не только к плоскому конденсатору. Надо только под δA понимать работу *всех сил*, действующих в системе при произвольных бесконечно малых смещениях входящих в нее тел и диэлектрической среды между ними. Такие смещения называются *возможными* или *виртуальными смещениями* в отличие от *действительных смещений*, которые возникают в системе при том или ином ее движении. В связи с этим отметим, что при получении формулы (32.1) мы допустили некоторую неточность. При смещении пластины конденсатора диэлектрик может входить или выходить из конденсатора. Величина δA должна включать и работу сил при таком смещении диэлектрика.

3. Согласно формуле (28.8) полная свободная энергия Ψ слагается из электрической части $\Psi_{\text{эл}} = W$ и упругой части $\Psi_{\text{упр}}$. На такие же две части можно разделить и виртуальную работу δA, причем

$$\delta A_{\text{эл}} + (dW)_{q,T} = 0, \tag{32.2}$$

$$\delta A_{\text{упр}} + (dW_{\text{упр}})_{q,T} = 0. \tag{32.3}$$

Таким способом пондеромоторные силы, действующие на проводники и диэлектрики, можно разделить на *электрические* и *упругие.*

Электрическую часть виртуальной работы $\delta A_{\text{эл}}$ можно вычислить иначе. Формула (32.2) относится к тому случаю, когда при виртуальных смещениях *заряды тел поддерживаются постоянными.* Допустим теперь, что тела системы соединены с источниками электричества (например, гальваническими батареями), которые при виртуальных смещениях поддерживают постоянными *потенциалы всех тел.* Пондеромоторные силы, а с ними и величина виртуальной работы $\delta A_{\text{эл}}$, конечно, не зависят от того, происходят ли виртуальные смещения при постоянных зарядах, при постоянных потенциалах или как-либо иначе. Введение виртуальных смещений надо рассматривать как *искусственный прием* для вычисления действующих сил. Но виртуальные смещения к вопросу о возникновении этих сил не имеют прямого отношения.

Однако приращение свободной энергии dW при виртуальных смещениях существенно зависит от того, при каких условиях эти смещения производятся. Поясним это сначала на примере конденсатора. При виртуальных смещениях его обкладок или диэлектрической среды между ними меняется емкость конденсатора C. Если конденсатор отключен от источника электричества ($q = \text{const}$), то приращение свободной энергии $W = q^2/(2C)$ будет

$$(dW)_{q,T} = \frac{1}{2}\,q^2\,\delta\left(\frac{1}{C}\right) = -\frac{1}{2}\,\frac{q^2}{C^2}\,\delta C = -\frac{1}{2}\varphi^2\,\delta C,$$

а виртуальная работа, согласно формуле (32.2), $\delta A_{\text{эл}} = (1/2)\varphi^2\,\delta C$. Если же конденсатор подключен к гальванической батарее ($\varphi = \text{const}$), то, представив W в виде $W = (1/2)\,\varphi^2 C$, получим

$$(dW)_{\varphi,T} = \frac{1}{2}\varphi^2\,\delta C.$$

Эта величина отличается от предыдущего выражения знаком. Различие обусловлено тем, что во втором случае гальваническая батарея поставляет конденсатору дополнительный заряд $\delta q = \varphi\,\delta C$, совершая при этом работу $\delta A_{\text{бат}} = \varphi\,\delta q = \varphi^2\,\delta C$. Теперь приращение свободной энергии определяется полной внешней работой, т. е. величиной

$$\delta A_{\text{бат}} - \delta A_{\text{эл}} = \varphi^2\,\delta C - \frac{1}{2}\varphi^2\,\delta C = \frac{1}{2}\varphi^2\,\delta C.$$

Таким образом,

$$(dW)_{q,T} = -(dW)_{\varphi,T}, \tag{32.4}$$

$$\delta A_{\text{эл}} - (dW)_{\varphi,T} = 0. \tag{32.5}$$

4. Применимость полученных формул не ограничивается случаем конденсатора. Формулы (32.4) и (32.5) носят общий характер. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим произвольную систему проводников, пространство между которыми заполнено каким угодно диэлектриком. Свободная энергия такой системы определяется выражением (28.4), или

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i,j} C_{ij}\varphi_i\varphi_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}q_iq_j.$$

При виртуальных смещениях проводников или диэлектрической среды между ними меняются емкостные и потенциальные коэффициенты. Если смещения происходят при постоянных потенциалах проводников, то

$$(dW)_{\varphi,T} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\varphi_i\varphi_j\,\delta C_{ij}.$$

Если же они происходят при постоянных зарядах, то

$$(dW)_{q,T} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} q_iq_j\,\delta V_{ij}.$$

Докажем, что эти выражения удовлетворяют соотношению (32.4). Подставив в формулу (27.5) выражение для φ_j из формулы (27.4), получим

$$q_i = \sum_{j,k} C_{ij} V_{jk} q_k.$$

Отсюда

$$\sum_j C_{ij} V_{jk} = \delta_{ik}, \tag{32.6}$$

где δ_{ik} равно нулю при $i \neq k$ и единице при $i = k$. Варьируя полученное соотношение, найдем

$$\sum_j \delta C_{ij} V_{jk} + \sum_j C_{ij}\, \delta V_{jk} = 0, \tag{32.7}$$

причем здесь, ввиду симметрии потенциальных и емкостных коэффициентов, можно переставлять местами индексы i и j, а также j и k. С использованием соотношений (32.6) и (32.7) можем написать

$$(dW)_{q,T} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} q_i q_j\, \delta V_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l} C_{ik} C_{jl} \varphi_k \varphi_l\, \delta V_{ij} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j,k,l} C_{jl}\varphi_k\varphi_l \sum_i C_{ki}\, \delta V_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_{j,k,l} C_{jl}\varphi_k\varphi_l \sum_i \delta C_{ki} V_{ij} =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i,k,l} \varphi_k\varphi_l\, \delta C_{ki} \sum_j V_{ij} C_{jl} = -\frac{1}{2}\sum_{i,k,l} \varphi_k\varphi_l\, \delta C_{ki}\delta_{il} =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i,k} \varphi_k\varphi_i\, \delta C_{ki} = -(dW)_{\varphi,T}.$$

Таким образом, соотношение (32.4) доказано. При доказательстве предполагалось, что свободные заряды находятся только на проводниках. Однако доказательство может быть распространено и на тот случай, когда свободные заряды имеются и в диэлектриках. Достаточно мысленно разделить диэлектрики на малые части таким образом, чтобы потенциал каждой из таких частей с достаточной точностью можно было считать одним и тем же во всех ее точках. Для таких малых частей диэлектриков можно ввести емкостные и потенциальные коэффициенты совершенно так же, как это было сделано для проводников. Поэтому доказательство, изложенное выше, может быть распространено без всяких изменений и на случай диэлектриков.

5. Рассмотрим теперь произвольную систему заряженных проводников в вакууме. Заполним все пространство между ними однородной несжимаемой жидкостью с диэлектрической проницаемостью ε, сохраняя заряды проводников неизменными. От этого электрическое смещение поля $\mathbf{D}$ не изменится, а его напряженность $\mathbf{E}$ уменьшится в ε раз (см. § 22, п. 3). Уменьшится в ε раз и электрическая часть свободной энергии W. Так как жидкость несжимаемая, то при виртуальных смещениях упругая часть свободной энергии Ψ изменяться не будет. Поэтому силы взаимодействия между проводниками будут определяться только изменениями величины W. А так как при заполнении пространства диэлектрической жидкостью эта величина уменьшается

в ε раз, то во столько же раз уменьшатся и силы взаимодействия между проводниками.

6. Вернемся в заключение к примеру, с которого мы начали изложение в настоящем параграфе. Доведем до конца вычисление силы притяжения между пластинами плоского конденсатора, предполагая, что все пространство заполнено несжимаемой однородной жидкостью с диэлектрической проницаемостью ε (см. рис. 84). Упругую часть свободной энергии можно не принимать во внимание, так как для несжимаемой жидкости $d\Psi = dW$. Направим ось X от отрицательной пластины к положительной и сместим положительную пластину в направлении оси X на величину δx, сохраняя заряды пластин неизменными. При неизменных зарядах останется постоянным электрическое смещение $\mathbf{D}$ в конденсаторе, а с ним и объемная плотность свободной энергии

$$w = -\frac{D^2}{8\pi\varepsilon}.$$

При смещении объем конденсатора увеличится на $\delta V = S\,\delta x$, где S — площадь пластины. Часть жидкости войдет в конденсатор, а его свободная энергия увеличится на $(d\Psi)_{q,T} = w\,\delta V = Sw\,\delta x$ (влиянием краевых эффектов мы пренебрегаем). Виртуальная работа, совершенная силой $\mathbf{F}$, будет $\delta A = F\,\delta x = Sf\,\delta x$. Подставляя эти значения в формулу (32.1), получим

$$f = -w = -\frac{D^2}{8\pi\varepsilon} = -\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}. \tag{32.8}$$

Таким образом, сила f, отнесенная к единице площади, численно равна плотности свободной энергии w. Сила получилась отрицательной: она направлена в отрицательную сторону оси X, т. е. является *силой притяжения.*

7. Выражение (32.8) дает полную силу притяжения между пластинами конденсатора (отнесенную к единице площади). Она слагается из упругой силы $f_{\text{упр}}$ и электрической силы $f_{\text{эл}}$. Чтобы выделить эти составные части, надо несжимаемую жидкость рассматривать как предельный случай сжимаемой. Существенно заметить, что виртуальное смещение δx можно выбрать *каким угодно.* От этого величина полной силы f не изменится. Возьмем такое виртуальное смещение, положительно заряженной пластины δx, чтобы жидкость в конденсатор не поступала. Для этого, конечно, надо ввести добавочные уравновешивающие силы. Однако эти силы не будут совершать работы, поскольку они приложены к неподвижным частям жидкости. При неизменных зарядах электрическое смещение $\mathbf{D}$ по-прежнему меняться не будет. Но плотность жидкости в конденсаторе τ, а с ней и диэлектрическая проницаемость ε изменятся. В случае сжимаемой жидкости надо учитывать изменения и упругой части свободной энергии. Полное изменение свободной энергии будет $d\Psi = d\Psi_{\text{упр}} + dW$. Для изменения упругой свободной энергии имеем

$$d\Psi_{\text{упр}} = -(\mathcal{P} - \mathcal{P}_0)\,\delta V,$$

где $\mathscr{P}$ — гидростатическое давление жидкости в конденсаторе, а $\mathscr{P}_0$ — вне его. Изменение электрической части свободной энергии определяется выражением

$$(dW)_{q,T} = \delta\left(\frac{D^2}{8\pi\varepsilon}V\right) = \frac{D^2}{8\pi}\,\delta\left(\frac{V}{\varepsilon}\right) = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}\,\delta V - \frac{D^2}{8\pi\varepsilon^2}\,V\,\delta\varepsilon.$$

Диэлектрическая проницаемость ε является функцией только плотности жидкости τ и температуры T, так что

$$\delta\varepsilon = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)_T \delta\tau.$$

Изменение плотности можно найти из условия сохранения массы жидкости в конденсаторе: $\tau V = \text{const}$. Оно дает $V\,\delta\tau + \tau\,\delta V = 0$. Определив отсюда $\delta\tau$ и учтя соотношение $\delta V = S\delta x$, получим

$$(dW)_{q,T} = \left(\varepsilon + \tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)\frac{E^2}{8\pi}\,S\,\delta x.$$

Подстановка полученных выражений в (32.1) приводит к результату

$$f = (\mathscr{P} - \mathscr{P}_0) - \left(\varepsilon + \tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)\frac{E^2}{8\pi}. \qquad (32.9)$$

Тем самым выделена упругая часть силы $f_{\text{упр}} = \mathscr{P} - \mathscr{P}_0$. Для несжимаемых (точнее, слабо сжимаемых) жидкостей в состоянии равновесия формула (32.9) должна переходить в (32.8), т. е. должно быть

$$\mathscr{P} - \mathscr{P}_0 = \tau\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)_T \frac{E^2}{8\pi}. \qquad (32.10)$$

Таким образом, дополнительная электрическая сила

$$-\tau\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)_T \frac{E^2}{8\pi},$$

возникающая в результате зависимости диэлектрической проницаемости от плотности диэлектрика, компенсируется гидростатическим давлением. Более строгое обоснование этого утверждения будет дано в § 33 и 34. Однако такая компенсация имеет место *только в статике.* Если электрическое поле меняется во времени, то компенсации, вообще говоря, нет.

ЗАДАЧИ

1. Получить выражение для силы притяжения между пластинами плоского воздушного конденсатора, рассматривая эту силу как результат взаимодействия электрических зарядов.

Решение. Одна из пластин конденсатора создает электрическое поле $E_1 = 2\pi\sigma$. Это поле действует на вторую пластину с силой $F = S\sigma E_1 = 2\pi\sigma^2 S$. Поверхностная плотность электричества σ связана с напряженностью электрического поля в конденсаторе E соотношением $E = 4\pi\sigma$.

Исключая σ, получим

$$F = \frac{E^2}{8\pi} S. \tag{32.11}$$

2. Между пластинами плоского воздушного конденсатора введена плоскопараллельная пластинка из твердого диэлектрика, так что между ней и пластинами конденсатора остались воздушные зазоры. Как изменится при этом сила притяжения между пластинами конденсатора?

Ответ. Сила притяжения не изменится.

3. Конденсатор переменной емкости состоит из двух неподвижных металлических пластин, расположенных на расстоянии d друг от друга, и подвижной диэлектрической пластины, которая может поворачиваться и входить в зазор между металлическими пластинами (рис. 85). Все пластины имеют форму полукруга радиуса R, причем зазоры между диэлектрической пластиной и пластинами конденсатора пренебрежимо малы по сравнению с d. Пренебрегая краевыми эффектами, найти момент сил M, действующих на диэлектрическую пластину, когда она выведена из положения равновесия. Конденсатор заряжен до разности потенциалов φ, диэлектрическая проницаемость подвижной пластины равна ε.

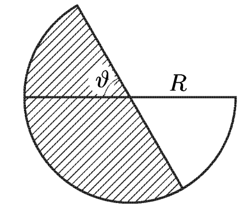


Рис. 85

Ответ. $M = (\varepsilon - 1)R^2\varphi^2/(16\pi d)$. Момент сил M стремится втянуть диэлектрическую пластину внутрь конденсатора.

4. В предыдущей задаче модуль момента M не зависит от угла поворота ϑ диэлектрической пластины. Но в положении равновесия, когда $\vartheta = 0$, момент M должен обращаться в нуль. Объяснить это расхождение.

§ 33. Максвелловские натяжения и давления

1. Найдем пондеромоторные силы, действующие на границе раздела двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. Поверхностная плотность свободных зарядов на границе раздела может быть равна нулю, но может быть и отличной от нуля. Для последующих вычислений это не имеет значения. Рассмотрим сначала случай, когда электрическое поле *однородно и перпендикулярно к границе раздела.* Примером может служить плоский конденсатор, пространство между обкладками которого заполнено двумя однородными диэлектрическими жидкостями, граничащими вдоль плоскости, параллельной пластинам конденсатора (рис. 86). Предположим, что обе жидкости несжимаемы. Тогда при виртуальных смещениях упругая часть свободной энергии изменяться не будет. Сместим изотермически границу раздела вверх на расстояние δx, сохраняя заряды пластин постоянными. При постоянных зарядах останется постоянным и электрическое смещение

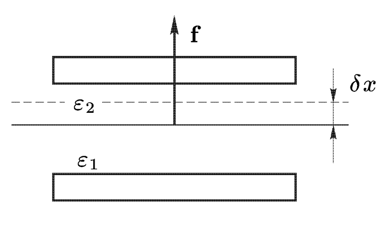


Рис. 86

в диэлектриках $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$, а с ним и плотности свободной энергии

$$w_1 = \frac{D_1^2}{8\pi\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_1 E_1^2}{8\pi} \quad \text{и} \quad w_2 = \frac{D_2^2}{8\pi\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_2 E_2^2}{8\pi}. \tag{33.1}$$

При смещении жидкость с диэлектрической проницаемостью ε_1 будет входить в конденсатор, а с диэлектрической проницаемостью ε_2 — выходить. Приращение свободной энергии будет

$$(d\Psi)_{q,T} = (dW)_{q,T} = (w_1 - w_2)S\,\delta x,$$

а работа пондеромоторных сил $\delta A = fS\,\delta x$. Подставляя эти выражения в формулу (32.1), находим силу f, действующую на единицу площади границы раздела:

$$f = w_2 - w_1, \tag{33.2}$$

причем за положительное мы приняли направление вверх.

2. Совершенно аналогично решается вопрос о пондеромоторных силах, когда *электрическое поле параллельно границе раздела диэлектриков.* Рассмотрим снова плоский конденсатор с двумя диэлектрическими жидкостями, заполняющими его, как показано на рис. 87.

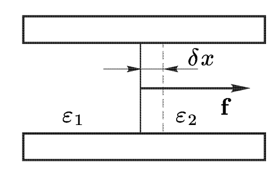


Рис. 87

В рассматриваемом случае виртуальное смещение δx границы раздела удобнее произвести при постоянной разности потенциалов между пластинами конденсатора. Плотности свободной энергии w_1 и w_2 в обоих диэлектриках при этом изменяться не будут. Свободная энергия получит приращение

$$(d\Psi)_{\varphi,T} = (dW)_{\varphi,T} = (w_1 - w_2)S_1\,\delta x,$$

где S_1 — площадь границы раздела между диэлектриками. Виртуальная работа $\delta A = S_1 f\,\delta x$. Подставив эти значения в формулу (32.5), найдем силу f, действующую на единицу площади границы раздела:

$$f = w_1 - w_2, \tag{33.3}$$

причем за положительное мы приняли направление от первого диэлектрика ко второму.

3. Рассматривая формулы (33.2) и (33.3), мы видим, что все происходит так, как если бы вдоль электрических силовых линий существовало *натяжение*, а перпендикулярно к ним — *давление.* Величины натяжения $\mathcal{T}$ и давления $\Pi = -\mathcal{T}$ численно равны плотности электрической свободной энергии w. Формула (33.2) показывает, что действующая сила определяется *разностью натяжений*, а формула (33.3) — *разностью давлений* по разные стороны границы раздела. Такая интерпретация согласуется также с формулой (11.2), определяющей силу, действующую на границе заряженного проводника. Величины $\mathcal{T}$ и Π получили название *максвелловских натяжений* и *давлений.* Фарадей и Максвелл считали эти величины вполне аналогичными упругим натяжениям и давлениям, существующим в диэлектриках и в чистом эфире.

От такой механической интерпретации наука давно отказалась. Но при вычислении пондеромоторных сил можно пользоваться наглядной картиной максвелловских натяжений и давлений, поскольку она приводит к верным результатам.

4. Если электрическое поле **E** параллельно границе раздела, то $E_1 = E_2$, так что индексы 1 и 2 можно опустить и написать

$$f = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)E^2. \tag{33.4}$$

Предположим, что $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Тогда $f > 0$, т. е. сила f направлена вправо (рис. 87) — от диэлектрика с большей к диэлектрику с меньшей диэлектрической проницаемостью. То же будет и в том случае, когда поле **E** нормально к границе раздела, если только на этой границе нет свободных электрических зарядов. Действительно, при выполнении этого условия $D_1 = D_2 = D$, и формула (33.2) принимает вид

$$f = \frac{D^2}{8\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right). \tag{33.5}$$

Если $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, то $f > 0$, т. е. сила f направлена вверх — от первого диэлектрика ко второму (см. рис. 86). Вообще, независимо от направления электрического поля, *пондеромоторные силы, действующие на незаряженной границе двух диэлектриков, направлены всегда в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью.* Существованием таких сил объясняется притяжение легких кусочков бумаги наэлектризованной палочкой.

Если две параллельные металлические пластинки частично погрузить в диэлектрическую жидкость, то она немного поднимается под действием капиллярных сил. Если между пластинками создать разность потенциалов в несколько тысяч вольт, то поднятие становится еще больше — жидкость втягивается в конденсатор.

Если диэлектрическая проницаемость тела меньше диэлектрической проницаемости окружающей среды, то тело выталкивается в область более слабого электрического поля. Демонстрацией может служить следующий опыт. Берется стеклянный сосуд, наполненный керосином или дистиллированной водой (рис. 88). Через отверстие A на загнутом конце стеклянной трубочки выдувается воздух под небольшим давлением. Если нет электрического поля, то пузырьки воздуха поднимаются вертикально вверх. Но если в жидкость опустить электрически заряженный шарик, то пузырьки воздуха отталкиваются от него и отклоняются в сторону.

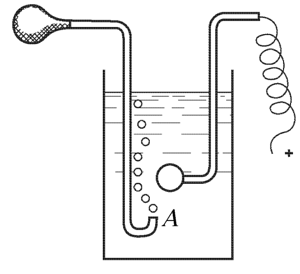


Рис. 88

5. При выводе формул (33.2) и (33.3) мы рассматривали диэлектрики как *абсолютно несжимаемые* жидкости. Таким путем нельзя

отделить упругие силы от электрических. Чтобы сделать это, надо учесть *сжимаемость жидкостей* точно так же, как мы поступали в предыдущем параграфе. Надо рассмотреть такие виртуальные смещения границы раздела диэлектриков, при которых изменялись бы плотности жидкостей. Сделаем это для случая, когда электрическое поле параллельно границе раздела диэлектриков (см. рис. 87). Виртуальное смещение границы раздела произведем так, чтобы количества обоих диэлектриков в конденсаторе оставались без изменения. Приращение упругой части свободной энергии можно не вычислять. Вместо этого, как было показано в предыдущем параграфе, можно к электрическому давлению прибавить, а из электрического натяжения вычесть гидростатическое давление $\mathscr{P}$. Поэтому мы ограничимся вычислением приращений только электрической части свободной энергии. Если V_1 — объем первого, а V_2 — второго диэлектриков, то $W = V_1 w_1 + V_2 w_2$. Виртуальное смещение границы произведем при постоянной разности потенциалов между пластинами конденсатора. Тогда напряженность электрического поля в конденсаторе $\mathbf{E}$ при смещении изменяться не будет, а потому

$$dW_{\varphi,T} = \frac{E^2}{8\pi}\left[\delta(V_1\varepsilon_1) + \delta(V_2\varepsilon_2)\right],$$

или

$$dW_{\varphi,T} = \frac{E^2}{8\pi}\left[(V_1\,\delta\varepsilon_1 + V_2\,\delta\varepsilon_2) + (\varepsilon_1\,\delta V_1 + \varepsilon_2\,\delta V_2)\right].$$

Диэлектрическая проницаемость жидкости зависит только от плотности и температуры последней. При изотермических изменениях

$$\delta\varepsilon = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)_T \delta\tau.$$

Так как масса первого диэлектрика остается неизменной, то $V_1\tau_1 = \text{const}$. Отсюда $V_1\,\delta\tau_1 = -\tau_1\,\delta V_1$, и, следовательно,

$$V_1\,\delta\varepsilon_1 = -\tau_1\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\tau_1}\,\delta V_1.$$

Аналогично для второго диэлектрика:

$$V_2\,\delta\varepsilon_2 = -\tau_2\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\tau_2}\,\delta V_2.$$

Далее, очевидно, что $\delta V_1 = -\delta V_2 = S_1\,\delta x$. Учтя все это, найдем $dW_{\varphi,T}$ и полученное выражение подставим в формулу (32.5). Учтем, кроме того, гидростатическое давление. Тогда вместо (33.3) получим формулу

$$f = \mathscr{P}_1 + \frac{E^2}{8\pi}\left(\varepsilon_1 - \tau_1\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\tau_1}\right) - \mathscr{P}_2 - \frac{E^2}{8\pi}\left(\varepsilon_2 - \tau_2\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\tau_2}\right). \qquad (33.6)$$

Если электрическое поле перпендикулярно к границе раздела диэлектриков, то рассуждения совершенно аналогичны. В этом случае

формула (33.6) заменяется на

$$f = -\mathscr{P}_2 + \frac{E^2}{8\pi}\left(\varepsilon_2 + \tau_2\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\tau_2}\right) + \mathscr{P}_1 - \frac{E^2}{8\pi}\left(\varepsilon_1 + \tau_1\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\tau_1}\right). \qquad (33.7)$$

Таким образом, и с учетом зависимости диэлектрической проницаемости от плотности жидкости пондеромоторные силы в диэлектрике сводятся к *натяжению вдоль линий поля* $\mathscr{T}$ и к *давлению* Π *в перпендикулярном направлении.* Меняются только выражения для этих величин. Именно:

$$\mathscr{T} = -\mathscr{P} + \frac{E^2}{8\pi}\left(\varepsilon + \tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right), \qquad (33.8)$$

$$\Pi = \mathscr{P} + \frac{E^2}{8\pi}\left(\varepsilon - \tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right). \qquad (33.9)$$

Различием этих величин по разные стороны границы раздела диэлектриков и определяются силы, действующие на единицу поверхности указанной границы. Дополнительные силы, возникающие в результате зависимости диэлектрической проницаемости от плотности диэлектрика, называются *электрострикционными силами*, а вызываемое ими изменение гидростатического давления и плотности диэлектрика — *электрострикцией.* Электрострикционные силы впервые были учтены Гельмгольцем (1821–1894). Максвелл их не учитывал, хотя величины $\tau\partial\varepsilon/\partial\tau$, как правило, того же порядка, что и ε. Тем не менее в электростатике для несжимаемых (точнее, слабосжимаемых) жидкостей результаты Максвелла правильны, как это следует из их вывода, приведенного нами выше. Они должны согласовываться с формулами (33.8) и (33.9). Поэтому, *если несжимаемая жидкость находится в равновесии* (*гидростатика*), *то электрострикционные силы должны уравновешиваться силами гидростатического давления.* Иными словами, во всем объеме жидкости должно выполняться соотношение

$$\mathscr{P} - \tau\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)_T \frac{E^2}{8\pi} = \text{const}. \qquad (33.10)$$

Этот результат согласуется с ранее полученной формулой (32.10). Однако *если электрическое поле быстро меняется во времени*, *то соотношение* (33.10), *вообще говоря*, *несправедливо.*

ЗАДАЧИ

1. Между пластинами плоского воздушного конденсатора введена диэлектрическая пластинка толщины l_2 с диэлектрической проницаемостью ε_2 (рис. 89). Конденсатор частично погружен в жидкость с диэлектрической проницаемостью ε_1 и плотностью τ. Найти высоту поднятия h жидкости в конденсаторе, пренебрегая капиллярными явлениями, если между его обкладками поддерживается разность потенциалов φ. Суммарная толщина столбов жидкости в конденсаторе равна l_1.

Ответ. $h = \dfrac{\varepsilon_1 - 1}{8\pi\tau g}\left(\dfrac{\varphi\varepsilon_2}{\varepsilon_1 l_2 + \varepsilon_2 l_1}\right)^2.$

2. Диэлектрическая пластинка толщины l_2 с диэлектрической проницаемостью ε введена между обкладками плоского воздушного конденсатора (рис. 90). Между поверхностью пластинки и обкладками конденсатора остались воздушные зазоры, суммарная толщина которых равна l_1. Определить силу притяжения F между обкладками, если разность потенциалов между ними равна φ, а площадь пластинки S. Во что переходит выражение для F в предельном случае $l_1 \to 0$?

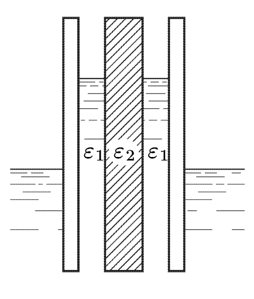


Рис. 89

Ответ. $F = \dfrac{S}{8\pi}\left(\dfrac{\varphi\varepsilon}{l_1\varepsilon + l_2}\right)^2$.

3. Капиллярный вольтметр состоит из капиллярной стеклянной трубочки с металлизированной полупрозрачной внутренней поверхностью, служащей одной из обкладок цилиндрического конденсатора. Второй обкладкой является тонкая металлическая проволока, коаксиальная с внутренней цилиндрической поверхностью трубочки. Определить поднятие мениска воды h в вольтметре при наложении на обкладки напряжения $V = 100$ В, если внутренний диаметр капилляра $D = 0{,}5$ мм, а диаметр проволоки $d = 0{,}05$ мм.

Ответ. $h = \dfrac{\varphi^2(\varepsilon - 1)}{\pi\tau g(D^2 - d^2)\ln(D/d)} \approx 5$ мм.

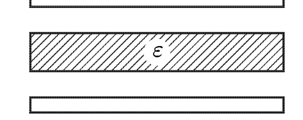


Рис. 90

4. Капля жидкости заряжена электричеством. Найти зависимость упругости насыщенного пара над поверхностью капли от ее заряда q. Используя полученный результат, объяснить принцип действия камеры Вильсона (р. 1906).

Решение. Искомая зависимость находится в точности так же, как и зависимость упругости насыщенного пара от кривизны поверхности жидкости. Можно дословно повторить все рассуждения, приведенные в § 118 тома II. Дополнительно надо только учесть влияние электрического поля на высоту поднятия жидкости в капилляре. Электрическое поле должно быть перпендикулярно к поверхности мениска жидкости в капилляре. Влияние такого поля эквивалентно уменьшению поверхностного натяжения жидкости σ. Из капиллярного давления $2\sigma/r$ надо вычесть максвелловское натяжение:

$$\frac{D^2}{8\pi}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{q^2}{8\pi r^4}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

где ε — диэлектрическая проницаемость капли, r — ее радиус. Для проводящей капли в этой формуле следует положить $\varepsilon = \infty$. То же можно делать для воды ввиду большого значения диэлектрической проницаемости последней ($\varepsilon = 81$). В результате вместо формулы (118.5) тома II получится

$$\ln\frac{P_0}{P} = \frac{\mu v_{\text{ж}}}{RT}\left(P_0 - P - \frac{2\sigma}{r} + \frac{q^2}{8\pi r^4}\right). \tag{33.11}$$

При $r = 0$ и $r = \infty$ эта формула дает соответственно $P = 0$ и $P = P_0$. В промежутке между этими значениями упругость насыщенного пара P

достигает максимума. Дифференцируя (33.11) по r и полагая $dP/dr = 0$, находим, что это происходит при

$$r = r_0 \equiv \sqrt[3]{q^2/(4\pi\sigma)}. \tag{33.12}$$

Применим полученные результаты к капле воды, полагая q равным элементарному заряду e, находящемуся в центре капли. При 20 °C для воды $\sigma = 73$ дин/см. По формуле (33.12) находим $r_0 = 6{,}3\cdot10^{-8}$ см. При таких малых размерах капель макроскопические формулы как точные количественные соотношения становятся сомнительными. Тем не менее мы воспользуемся ими, рассчитывая, что грубо качественно результаты получатся правильными. Мы не будем также смущаться тем обстоятельством, что в реальных условиях осаждающиеся ионы не попадают в центр капли, а могут находиться в ней в любом месте. Зависимость упругости насыщенного пара над заряженной каплей от ее радиуса представлена на рис. 91. Та же зависимость для незаряженной капли представляется пунктирной кривой. Заряд капли уменьшает упругость насыщенного пара, причем при $r < r_0$ упругость пара растет с увеличением радиуса капли. Этим и объясняется конденсация пара на ионах (см. т. II, § 119).

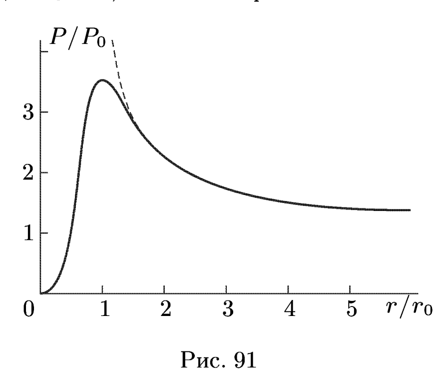


Рис. 91

§ 34. Вычисление пондеромоторных сил в общем виде

1. Без ущерба для общности будем предполагать, что вещество и электричество распределены в пространстве *непрерывно.* Электрическую часть свободной энергии представим в виде

$$W = \int \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}\, dV. \tag{34.1}$$

Пусть каждая частица диэлектрика вместе со своим электрическим зарядом претерпела бесконечно малое виртуальное смещение $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{r})$. Приращение величины W при таком виртуальном смещении будет

$$dW = \int \delta\left(\frac{D^2}{8\pi\varepsilon}\right) dV = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathbf{D}\,\delta\mathbf{D}}{\varepsilon}\, dV + \frac{1}{8\pi}\int D^2\,\delta\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) dV,$$

или

$$dW = \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{E}\,\delta\mathbf{D}\, dV - \frac{1}{8\pi}\int E^2\,\delta\varepsilon\, dV.$$

Здесь символ δ применяется для обозначения *локальных* изменений соответствующих величин, т. е. изменений в одном и том же месте пространства, обусловленных виртуальными смещениями вещества и электричества. Интегрирование производится по всему бесконечному пространству. Преобразуем первый интеграл с помощью интегральной теоремы Гаусса–Остроградского.

Интегрируя сначала по конечному объему, ограниченному замкнутой поверхностью S, имеем

$$\int \mathbf{E}\,\delta\mathbf{D}\,dV = -\int \operatorname{grad}\varphi\,\delta\mathbf{D}\,dV = -\int \operatorname{div}(\varphi\,\delta\mathbf{D})\,dV + \int \varphi \operatorname{div}\,\delta\mathbf{D}\,dV = \\ = -\oint \varphi\,\delta\mathbf{D}\,d\mathbf{S} + 4\pi\int \varphi\,\delta\rho\,dV.$$

Предполагая, что все заряды находятся в ограниченной области пространства, будем удалять в бесконечность окружающую их замкнутую поверхность S. Тогда в пределе первый интеграл обратится в нуль, и мы получим

$$dW = \int \varphi\,\delta\rho\,dV - \frac{1}{8\pi}\int E^2\,\delta\varepsilon\,dV. \qquad (34.2)$$

2. Для упрощения последующих рассуждений предположим, что виртуальное смещение претерпевают только частицы вещества, находящиеся внутри бесконечно тонкого цилиндра, параллельного оси X. Пусть это бесконечно малое смещение происходит параллельно той же оси и является произвольной функцией координаты x: $q = x - x' = q(x)$ (рис. 92). Найдем *локальные* изменения плотности электричества $\delta\rho$ и диэлектрической прони-

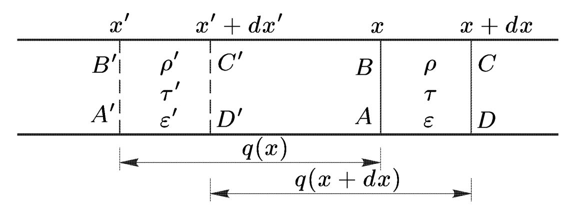


Рис. 92

цаемости $\delta\varepsilon$ в бесконечно малом элементе объема $ABCD$. Через сечение AB внутрь объема $ABCD$ входит заряд $q(x)\rho(x)\,dS$, через сечение CD выходит заряд $q(x+dx)\rho(x+dx)\,dS$, где dS — площадь поперечного сечения. Избыток входящего заряда над выходящим составляет

$$[q(x)\rho(x) - q(x+dx)\rho(x+dx)]\,dS = -\frac{\partial(\rho q)}{\partial x}\,dV,$$

где $dV = dS\,dx$ — величина рассматриваемого объема. Тот же избыток можно представить выражением $\delta\rho\,dV$, а потому

$$\delta\rho = -\frac{\partial(\rho q)}{\partial x}. \qquad (34.3)$$

Найдем теперь *локальное* приращение диэлектрической проницаемости $\delta\varepsilon$. Оно обусловлено, во-первых, тем, что в результате смещения в объем $ABCD$ поступает вещество из других областей пространства, где ε имеет другие значения. Во-вторых, тем, что при смещении каждого элемента среды меняется плотность вещества τ, а с ней и диэлектрическая проницаемость. После смещения из элемента объема $A'B'C'D'$ в элемент $ABCD$ плотность вещества $\tau' \equiv \tau(x')$ получает приращение $\Delta\tau$ и становится равной $\tau' + \Delta\tau$. Так как при этом масса смещенного вещества не меняется, то

$$dx'\tau' = dx(\tau' + \Delta\tau),$$

откуда

$$\Delta\tau = \frac{dx' - dx}{dx}\,\tau' = \frac{d(x' - x)}{dx}\,\tau',$$

или с точностью до бесконечно малых высшего порядка

$$\Delta\tau = -\frac{\partial q}{\partial x}\,\tau.$$

Поэтому в объем $ABCD$ вещество вступает, имея диэлектрическую проницаемость

$$\varepsilon' + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\Delta\tau = \varepsilon' - \tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\frac{\partial q}{\partial x}.$$

Вычитая отсюда значение ε в объеме $ABCD$ до смещения, получим

$$\delta\varepsilon = \varepsilon' - \varepsilon - \tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\frac{\partial q}{\partial x}.$$

А так как $\varepsilon' - \varepsilon = \varepsilon(x') - \varepsilon(x) = (x' - x)\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial x} = -q\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial x}$, то

$$\delta\varepsilon = -q\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} - \tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\frac{\partial q}{\partial x}. \qquad (34.4)$$

3. Поскольку электричество смещается вместе с веществом, электрический заряд каждого смещающегося элемента среды при смещении не изменяется. Поэтому, подставив выражения (34.3) и (34.4) в формулу (34.2), получим приращение величины W при постоянном заряде:

$$(dW)_{q,T} = -dS\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi\frac{\partial(\rho q)}{\partial x}\,dx + \frac{dS}{8\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}E^2\left(q\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + \tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\frac{\partial q}{\partial x}\right)dx.$$

Интегрируя по частям и имея в виду, что на пределах интеграла все величины обращаются в нуль, найдем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi\frac{\partial(\rho q)}{\partial x}\,dx = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho q\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}q\rho E_x\,dx.$$

Таким же путем преобразуется в (34.2) и второй интеграл. В результате получится

$$(dW)_{q,T} = -dS\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\rho E_x - \frac{E^2}{8\pi}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{8\pi}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,E^2\right)\right]q\,dx.$$

Если $f^{\text{эл}}$ — объемная плотность электрических пондеромоторных сил, действующих в диэлектрике, то работа их при рассматриваемом виртуальном смещении будет

$$\delta A_{\text{эл}} = \int f_x^{\text{эл}} q\,dV = dS\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_x^{\text{эл}} q\,dx.$$

Подставив эти выражения в формулу (32.2) и имея в виду, что функция $q = q(x)$ может быть выбрана какой угодно, найдем $f_x^{\text{эл}}$. К этой силе надо еще

добавить силу гидростатического давления $-\partial\mathscr{P}/dx$. В результате для x-составляющей объемной плотности полной пондеромоторной силы получится

$$f_x = \rho E_x - \frac{E^2}{8\pi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}E^2\right) - \frac{\partial\mathscr{P}}{\partial x}.$$

Такие же выражения можно написать для y- и z-составляющих силы $\mathbf{f}$. Объединяя их в одну векторную формулу, получим

$$\mathbf{f} = -\operatorname{grad}\mathscr{P} + \rho E - \frac{E^2}{8\pi}\operatorname{grad}\varepsilon + \frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left(\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}E^2\right). \tag{34.5}$$

4. Повторим теперь приведенный вывод, предполагая, что жидкость является «несжимаемой». Тогда при перемещении любого элемента жидкости из одного места пространства в другое величина τ, а с ней ε меняться не будут. Не будет изменяться и упругая часть свободной энергии. В результате в выражении (34.5) выпадут первый и последний члены, и мы получим

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} - \frac{E^2}{8\pi}\operatorname{grad}\varepsilon. \tag{34.6}$$

В таком виде выражение для пондеромоторной силы было получено Максвеллом. Добавочный член $\frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left(\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}E^2\right)$ был введен Гельмгольцем. По величине он того же порядка, что и член $\frac{E^2}{8\pi}\operatorname{grad}\varepsilon$, учтенный Максвеллом. Однако в случае «несжимаемых» жидкостей применимы оба способа рассуждения, приведенные выше. Поэтому в статических электрических полях должно соблюдаться соотношение

$$\operatorname{grad}\mathscr{P} = \frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left(\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}E^2\right), \tag{34.7}$$

или после интегрирования

$$\mathscr{P} = \frac{1}{8\pi}\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}E^2 + \text{const}. \tag{34.8}$$

Это означает, что *добавочная часть пондеромоторной силы, возникающая в результате зависимости диэлектрической проницаемости от плотности жидкости, компенсируется гидростатическим давлением, появляющимся в жидкости при наложении электрического поля. Но в быстропеременных полях такой компенсации нет. Там соотношение* (34.8) *не соблюдается.* Действительно, допустим, что электрическое поле было включено мгновенно. Электрические возмущения распространяются в диэлектриках со скоростями порядка скорости света, упругие — со скоростью звука. Поэтому в быстропеременных полях гидростатическое давление $\mathscr{P}$ не успеет прийти в равновесие с «электрическим давлением» $\frac{1}{8\pi}\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}E^2$. В этом случае формула (34.7) неприменима.

ЗАДАЧА

Показать, что пондеромоторная сила (34.5) сводится к натяжению вдоль силовых линий (33.8) и давлению (33.9) в перпендикулярном направлении.

Решение. Докажем обратное: считая натяжения и давления известными, найдем результирующую силу $\mathbf{f}$, действующую на единицу объема

диэлектрика Убедимся, что она совпадает с (34.5). Вырежем мысленно в диэлектрике бесконечно малый прямоугольный параллелепипед со сторонами dx, dy, dz, параллельными координатным осям (рис. 93). На основание *1* этого параллелепипеда действует сила гидростатического давления $\mathscr{P}(x)\,dy\,dz$, на основание *2* — противоположно направленная сила — $\mathscr{P}(x+dx)\,dy\,dz$. Их результирующая, действующая в положительном направлении оси X, равна

$$[\mathscr{P}(x) - \mathscr{P}(x+dx)]\,dy\,dz = -\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

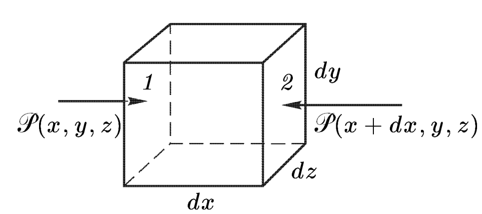


Рис. 93

Аналогично находятся выражения для сил, действующих вдоль двух других координатных осей. Объединяя их и разделив на объем параллелепипеда $dx\,dy\,dz$, получим полную силу гидростатического давления, отнесенную к единице объема диэлектрика:

$$\mathbf{f}_1 = -\left(\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial\mathscr{P}}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial\mathscr{P}}{\partial z}\,\mathbf{k}\right) = -\operatorname{grad}\mathscr{P}.$$

К ней надо добавить силу всестороннего изотропного натяжения в электрическом поле:

$$\mathbf{f}_2 = \operatorname{grad}\left(\frac{\tau}{8\pi}\,\frac{d\varepsilon}{d\tau}\,E^2\right),$$

которая вычисляется так же. Остается найти силу $\mathbf{f}_3$, вызываемую натяжением $\varepsilon E^2/(8\pi)$ вдоль поля и равным ему давлением поперек поля. При вычислении этой силы координатную ось X удобно направить вдоль вектора $\mathbf{E}$. Тогда

$$\mathbf{f}_3 = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x}\,(\varepsilon E^2)\mathbf{i} - \frac{\partial}{\partial y}\,(\varepsilon E^2)\mathbf{j} - \frac{\partial}{\partial z}\,(\varepsilon E^2)\mathbf{k}\right],$$

или

$$\mathbf{f}_3 = -\frac{1}{8\pi}\,\operatorname{grad}(\varepsilon E^2) + \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial}{\partial x}\,(\varepsilon E^2)\mathbf{i}.$$

Преобразуем это выражение. Прежде всего пишем

$$\operatorname{grad}(\varepsilon E^2) = E^2 \operatorname{grad}\varepsilon + 2\varepsilon E \operatorname{grad} E.$$

Так как вектор $\mathbf{E}$ содержит только x-составляющую, то

$$\varepsilon E \operatorname{grad} E = D \operatorname{grad} E_x = D\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial E_x}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial E_x}{\partial z}\,\mathbf{k}\right).$$

Но

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0.$$

Аналогично, $\partial E_x/\partial z = 0$. Таким образом,

$$\varepsilon E \operatorname{grad} E = D\frac{\partial E}{\partial x}\,\mathbf{i}.$$

Далее,

$$-D\frac{\partial E}{\partial x}\,\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial x}\,(\varepsilon E^2)\mathbf{i}=\mathbf{E}\frac{\partial D}{\partial x}=\mathbf{E}\,\mathrm{div}\,\mathbf{D}=4\pi\rho\mathbf{E}.$$

В результате сложения $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ и $\mathbf{f}_3$ получается выражение (34.5).

§ 35. Электронная теория поляризации неполярных диэлектриков

1. В § 12 был качественно рассмотрен электронный механизм возникновения поляризации в диэлектриках. Поляризация диэлектриков во всех случаях возникает в результате *смещений* электронов и атомных ядер, которые они испытывают при внесении диэлектрика в электрическое поле. Остановимся теперь на количественной стороне теории.

Начнем с *неполярных диэлектриков.* Так называются диэлектрики, молекулы которых в отсутствие внешнего электрического поля не имеют дипольных моментов. Неполярными являются все атомы. Согласно полуклассической теории Бора простейший из всех атомов — атом водорода — состоит из ядра и электрона, вращающегося вокруг него по круговой или эллиптической орбите. Электрон смещен относительно ядра, а потому в любой момент времени такая модель атома обладает *дипольным моментом.* Однако из-за быстрого вращения электрона ориентация этого дипольного момента очень быстро меняется, так что в среднем дипольный момент атома равен нулю. В квантовой механике такое усреднение по положениям электрона на боровской орбите становится ненужным. Принцип неопределенности Гейзенберга делает невозможным сохранение представления о движении электрона в атоме по классическим орбитам (см. т. I, § 5). Классическая картина движения заменяется вероятностным описанием его. Можно говорить лишь о *вероятности* нахождения электрона в том или ином месте пространства. Электрон в атоме ведет себя подобно электронному облаку с непрерывным распределением электричества в нем. В стационарных состояниях распределение заряда в таком облаке с течением времени не меняется. Если атом находится в *нормальном состоянии*, т. е. не возбужден, то распределение заряда в облаке сферически симметрично относительно ядра. Поэтому дипольный момент атома точно равен нулю. Это справедливо не только для атома водорода, но и для любого атома или атомного иона в невозбужденном состоянии. Если же атом *возбужден*, то сферическая симметрия распределения заряда в облаке нарушается. Однако ядро по-прежнему остается центром симметрии атома, а в этом случае дипольный момент также должен равняться нулю. Неполярными будут и симметричные молекулы, построенные из нейтральных атомов. Такова, например, молекула водорода H_2.

2. Допустим теперь, что неполярная молекула внесена во внешнее однородное электрическое поле $\mathbf{E}$. Отрицательные заряды молекулы немного сместятся относительно положительных. В результате у молекулы появится *электрический дипольный момент* $\mathbf{p}$, величина которого зависит от напряженности внешнего поля $\mathbf{E}$. Для определения

вида этой зависимости надо принять во внимание, что при поляризации диэлектриков мы имеем дело с внешними электрическими полями, напряженность которых *очень мала* по сравнению с напряженностью внутренних полей, действующих в атомах и молекулах. Например, в нормальном состоянии среднее расстояние электрона от ядра в атоме водорода составляет $r = r_{\text{B}} = 0{,}53 \cdot 10^{-8}$ см (боровский радиус). Электрическое поле, создаваемое ядром на таком расстоянии, будет

$$\frac{e}{r^2} \approx 1{,}7 \cdot 10^7 \text{ СГСЭ-ед.} \approx 5 \cdot 10^9 \text{ В/см}.$$

Чтобы составить представление о таком поле, заметим, что для получения электрической искры между двумя металлическими шариками с радиусами 2,5 см каждый, находящимися на расстоянии 1 см друг от друга, в сухом воздухе требуется разность потенциалов порядка 30 000 В, т. е. напряженность поля $E \sim 3 \cdot 10^4$ В/см. Это поле в сто тысяч раз слабее внутреннего поля в атоме водорода. Понятно, что при таких условиях смещения зарядов внутри молекулы при поляризации ничтожны, и можно считать, что индуцированный дипольный момент $\mathbf{p}$ зависит от напряженности поля $\mathbf{E}$ *линейно.* Если молекула *сферически симметрична*, то можно написать

$$\mathbf{p} = \beta \mathbf{E}. \tag{35.1}$$

Величина β постоянна для данной молекулы и зависит от ее строения. Она называется *поляризуемостью молекулы.*

3. Величину β можно оценить, рассматривая молекулу как проводящий шарик радиуса a. В § 16, а также в § 23 было показано, что во внешнем электрическом поле $\mathbf{E}$ такой шарик приобретает дипольный момент $\mathbf{p} = a^3\mathbf{E}$. Поэтому для рассматриваемой модели

$$\beta = a^3. \tag{35.2}$$

В квантовой механике классическим аналогом молекулы является *электронное облако*, в центре которого находится положительный точечный заряд. Поляризация такого облака во внешнем однородном поле аналогична поляризации проводящего шарика. Однако облако не имеет резкой границы, и надо решить, что следует понимать под a. Это можно сделать, пользуясь вычислительными методами квантовой механики. Для атома водорода в невозбужденном состоянии квантовая механика приводит к результату

$$\beta = \frac{9}{2} r_{\text{B}}^3, \tag{35.3}$$

где r_{B} — боровский радиус, числовое значение которого было приведено выше. Таким образом, для атома водорода теория дает $\beta = 0{,}67 \cdot 10^{-24}$ см^3.

4. Если молекула не обладает сферической симметрией, то направления векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{p}$, вообще говоря, не совпадают. Однако линейная связь между компонентами этих векторов сохраняется. Вместо соотношения (35.1) теперь

следует писать

$$p_i = \sum_j \beta_{ij} E_j \quad (i, j = x, y, z). \tag{35.4}$$

Девять величин β_{ij} образуют так называемый *тензор поляризуемости молекулы.* Он зависит от строения молекулы и от ее ориентации относительно координатных осей.

Тензор поляризуемости молекулы *симметричен*, т. е. $\beta_{ij} = \beta_{ji}$. Это утверждение получается из энергетических соображений. При изменении электрического поля на dE заряды внутри молекулы претерпевают смещения dr_a и над молекулой совершается работа

$$\delta A = \sum_a e_a \mathbf{E}\, d\mathbf{r}_a = \mathbf{E}\, d\mathbf{p}.$$

Эта работа идет на приращение потенциальной энергии деформации молекулы:

$$dU_д = \mathbf{E}\, d\mathbf{p}. \tag{35.5}$$

Интегрируя это выражение, заметим, что величина $U_д$ не может зависеть от способа приведения молекулы в конечное состояние. Будем наращивать поле $\mathbf{E}$ так, чтобы его направление сохранялось неизменным. Пусть $\mathbf{E}$ и $\mathbf{p}$ означают теперь напряженность электрического поля и дипольный момент молекулы в конечном состоянии. Если поле увеличить в λ раз, то, ввиду линейности соотношения между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{p}$, во столько же раз увеличится вектор $\mathbf{p}$, причем направление его останется неизменным. Таким образом, промежуточное состояние молекулы может быть охарактеризовано векторами $\mathbf{E}' = \lambda\mathbf{E}$, $\mathbf{p}' = \lambda\mathbf{p}$, а величина $dU_д$ представлена выражением $dU_д = \mathbf{E}\mathbf{p}\lambda\, d\lambda$. Интегрируя это выражение в пределах от $\lambda = 0$ (начальное состояние) до $\lambda = 1$ (конечное состояние), получим

$$U_д = \frac{1}{2}\,\mathbf{p}\mathbf{E}. \tag{35.6}$$

Возьмем отсюда дифференциал $dU_д$ и приравняем его выражению (35.5). Тогда найдем

$$\mathbf{p}\, d\mathbf{E} = \mathbf{E}\, d\mathbf{p}. \tag{35.7}$$

Записанное в координатах, последнее соотношение имеет вид

$$\sum\sum \beta_{ij} E_j\, dE_i = \sum\sum E_i \beta_{ij}\, dE_j,$$

или после перестановки индексов суммирования

$$\sum\sum \beta_{ij} E_j\, dE_i = \sum \beta_{ij} E_j\, dE_i.$$

Ввиду произвольности dE_i отсюда следует $\beta_{ij} = \beta_{ji}$.

5. От рассмотрения отдельных молекул обратимся к исследованию *макроскопических тел*, построенных из множества молекул. Для простоты будем предполагать, что молекулы *сферически симметричны.* Пусть $\mathbf{E}$ — среднее макроскопическое электрическое поле, как оно было определено в § 10. Примем, что это поле совпадает с полем $\mathbf{E}'$, действующим на каждую молекулу диэлектрика. Равенство этих полей может быть только приближенным. Поле, действующее на молекулу, создается внешними зарядами и всеми молекулами, за исключением рассматриваемой. Если соседние молекулы расположены близко одна к другой, то действующее поле $\mathbf{E}'$ неоднородно, т. е. заметно меняется

на протяжении молекулы. В этом случае наше предположение $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$ не оправдывается. С таким положением мы сталкиваемся в жидкостях и твердых телах. К этому случаю наши результаты не относятся. Равенство полей $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{E}$ может выполняться *в газах*, где средние расстояния между соседними молекулами велики по сравнению с размерами последних. Этот случай мы и имеем в виду. При выполнении условия $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$ индуцированный дипольный момент молекулы определяется выражением (35.1), а вектор поляризации среды $\mathbf{P} = n\mathbf{p}$ — выражением

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}, \tag{35.8}$$

где α — поляризуемость единицы объема диэлектрика:

$$\alpha = n\beta \tag{35.9}$$

(n — число молекул в единице объема). Для диэлектрической проницаемости получаем по формуле (15.3)

$$\varepsilon = 1 + 4\pi n\beta. \tag{35.10}$$

Как указывалось выше, поляризуемость молекулы β является *молекулярной константой*, зависящей только от внутреннего строения молекулы. Поэтому величина $\varepsilon - 1$ должна быть пропорциональна плотности газа:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\tau} = \text{const}. \tag{35.11}$$

По той же причине диэлектрическая проницаемость газов, состоящих из неполярных молекул, *не зависит от температуры.* Действительно, молекула является *квантовой системой*, внутренняя энергия которой может принимать лишь *дискретные значения.* При обычных температурах молекулы находятся в невозбужденных состояниях, т. е. на самых низших энергетических уровнях. Энергии теплового движения бывает недостаточно, чтобы перевести молекулы в возбужденные состояния. Поэтому с повышением температуры внутреннее строение молекулы, а с ним и диэлектрическая проницаемость газа (при постоянной плотности) остаются *неизменными.* Лишь при высоких температурах заметная доля молекул переходит в *возбужденные состояния*, или *диссоциирует.* Тогда появляется и зависимость величины ε от температуры.

Из независимости ε от температуры следует, что в газах с неполярными молекулами внутренняя энергия U совпадает со свободной энергией, т. е. дается выражением (29.9). Это непосредственно видно из формулы (31.14). Влияние диэлектрика на внутреннюю энергию имеет в этом случае простое физическое объяснение. Плотность внутренней энергии U слагается из двух частей: 1) из плотности энергии поля в вакууме $\mathbf{E}^2/(8\pi)$ и 2) из плотности энергии деформации молекул $n\mathbf{pE}/2 = \mathbf{PE}/2$. Действительно, сумма этих двух частей равна $\mathbf{E}^2/(8\pi) + (\mathbf{PE})/2 = (\mathbf{ED})/(8\pi)$, что совпадает с (29.6).

6. Распространение изложенной теории на случай *плотных сред* (жидкостей и твердых тел) встречает большие трудности. Простейший способ, каким это может быть сделано, состоит в следующем. Пренебрежем размерами молекул и будем считать их «точечными», т. е. такими, линейные размеры которых очень малы по сравнению со средними расстояниями между ними. Тогда можно будет пренебречь и изменениями действующего поля в пределах молекулы, т. е. считать, что поле $\mathbf{E}'$ относится к *центру молекулы*, на которую оно действует. Для нахождения дипольного момента молекулы надо в формуле (35.1) поле $\mathbf{E}$ заменить на $\mathbf{E}'$, т. е. написать

$$\mathbf{p} = \beta\mathbf{E}'. \tag{35.12}$$

Задача сводится к вычислению действующего поля $\mathbf{E}'$. Для этого возьмем в диэлектрике произвольную молекулу A и опишем вокруг нее вспомогательную физически бесконечно малую сферу S с центром O, совпадающим с центром этой молекулы. Интересующее нас поле $\mathbf{E}'$ в точке O возбуждается всеми источниками, за исключением зарядов самой молекулы A. Электрическое поле $\mathbf{E}_{\text{внеш}}$ внутри сферы S, создаваемое зарядами, расположенными вне ее, можно вычислить, предполагая, что эти заряды распределены в пространстве непрерывно. А так как сфера S физически бесконечно мала, то поляризацию диэлектрика в ее окрестности можно считать однородной. Поэтому можно воспользоваться формулой (16.7) и написать

$$\mathbf{E}_{\text{внеш}} = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\,\mathbf{P}.$$

В частности, такое поле будут создавать внешние источники в центре O сферы S. Чтобы получить действующее поле, к вектору $\mathbf{E}_{\text{внеш}}$ надо добавить поле $\mathbf{E}_1$, которое создается в точке O всеми зарядами, находящимися внутри сферы S (за исключением зарядов молекулы A). При выполнении определенных условий можно утверждать, что $\mathbf{E}_1 = 0$. Это применимо для кубических кристаллов, построенных из электрически нейтральных и изотропных точечных молекул. Такие молекулы возбуждают электрические поля, как точечные диполи с индуцированными дипольными моментами $\mathbf{p}$, ориентированными вдоль среднего поля $\mathbf{E}$. Если $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из центра O к одному из диполей, то поле $\mathbf{E}_1$ в точке O представится суммой

$$\mathbf{E}_1 = \sum\left(\frac{3(pr)\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}\right),$$

где суммирование ведется по всем диполям сферы S, за исключением диполя, находящегося в ее центре. Поскольку сфера S физически бесконечно мала, индуцированные дипольные моменты $\mathbf{p}$ всех молекул внутри нее одинаковы, и их можно вынести из-под знака суммы. Имея это в виду и воспользовавшись соотношением $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, для

x-составляющей вектора $\mathbf{E}_1$ получим

$$E_{1x} = p_x \sum \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{r^5} + 3p_y \sum \frac{xy}{r^5} + 3p_z \sum \frac{xz}{r^5}.$$

Последние две суммы обращаются в нуль в силу кубической симметрии кристаллической решетки. В силу той же симметрии

$$\sum \frac{x^2}{r^5} = \sum \frac{y^2}{r^5} = \sum \frac{z^2}{r^5},$$

так что $E_{1x} = 0$. То же справедливо для y- и z-составляющих вектора $\mathbf{E}_1$, а потому $\mathbf{E}_1 = 0$. Таким образом, все действующее поле сводится к $\mathbf{E}_{\text{внеш}}$, т. е.

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P}. \tag{35.13}$$

Эта формула была получена голландским физиком Х.А. Лоренцем. Ее можно применять не только для кристаллов кубической системы, но и для плотных газов, построенных из точечных неполярных молекул, если под $\mathbf{E}'$ понимать действующее поле, усредненное по времени. Действительно, молекулы газа распределены в пространстве хаотически, причем положение каждой из них практически не зависит от положения других. Поэтому рассуждения, с помощью которых мы убедились в равенстве нулю вектора $\mathbf{E}_1$, сохраняют силу и в этом случае (после усреднения вектора $\mathbf{E}_1$ по времени). Однако формула (35.13) неприменима для диэлектриков, построенных из полярных молекул. В таких диэлектриках дипольные молекулы испытывают сильное ориентирующее действие со стороны соседних дипольных молекул. Конечно, в отсутствие внешнего электрического поля все направления осей дипольных молекул в пространстве равновероятны. Однако между направлениями дипольных моментов соседних молекул существует определенная корреляция, мало изменяющаяся и при наложении внешнего электрического поля. Это обстоятельство и является причиной неприменимости формулы (35.13) к диэлектрикам с полярными молекулами.

7. Применим теперь формулу (35.13) для расчета поляризации диэлектрика $\mathbf{P} = n\mathbf{p} = n\beta\mathbf{E}'$. Получаем

$$\mathbf{P} = n\beta\left(\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P}\right),$$

откуда

$$\mathbf{P} = \frac{n\beta}{1 - (4/3)\pi n\beta}\mathbf{E}.$$

Далее,

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \frac{1 + (8/3)\pi n\beta}{1 - (4/3)\pi n\beta}\mathbf{E}.$$

Следовательно,

$$\varepsilon = \frac{1 + (8/3)\pi n\beta}{1 - (4/3)\pi n\beta}. \tag{35.14}$$

Разрешая это уравнение относительно $(4/3)\pi n\beta$, получим

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} = \frac{4\pi}{3}\,n\beta. \tag{35.15}$$

Так как величина $n\beta$ пропорциональна плотности диэлектрика τ, то при изменении плотности должно соблюдаться соотношение

$$\frac{1}{\tau}\,\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} = \text{const}. \tag{35.16}$$

Это соотношение называется *формулой Мосотти* (1791–1863)–*Клаузиуса* (1822–1888). Приведенный вывод ее принадлежит Х. А. Лоренцу. Для диэлектриков, подчиняющихся формуле Мосотти–Клаузиуса, диэлектрическая проницаемость ε зависит только от плотности, но не зависит от температуры. Следовательно, для таких диэлектриков свободная энергия (точнее, ее электрическая часть) совпадает с внутренней. При малых ε, близких к единице, формула (35.16) переходит в (35.11).

Формула Мосотти–Клаузиуса находится в удовлетворительном согласии с опытом для жидких и газообразных диэлектриков с неполярными молекулами, хотя в случае жидкостей и не выполняется условие точечности молекул, использованное при выводе соотношения (35.16). Так, для газообразного сероуглерода CS_2 при температуре 0 °C и нормальном атмосферном давлении измеренное значение ε равно 1,0029. Пользуясь им, по формуле (35.10) находим $4\pi n\beta = 0{,}0029$. Плотность жидкого сероуглерода в 381 раз больше плотности газообразного. Если верно предположение, что поляризуемость молекулы β не меняется при переходе из газообразного состояния в жидкое, то для жидкого сероуглерода величина $4\pi n\beta$ должна быть больше также в 381 раз, т. е. должна составлять 1,11. Этому значению по формуле (35.14) соответствует $\varepsilon = 2{,}76$, что достаточно хорошо согласуется с экспериментально найденной величиной $\varepsilon = 2{,}64$.

Для диэлектриков с полярными молекулами (вода, спирты, эфиры и пр.) формула Мосотти–Клаузиуса не подтверждается опытом. Например, если бы для воды провести такие же вычисления, какие выше были проведены для сероуглерода, то получилось бы $4\pi n\beta = 13{,}2$. Подставив это значение в формулу (35.14), мы пришли бы к отрицательному значению ε. Между тем для воды опыт дает $\varepsilon = 81$.

§ 36. Электронная теория поляризации полярных газообразных диэлектриков

1. При изложении теории поляризуемости диэлектриков, состоящих из полярных молекул, мы ограничимся *случаем газов.* Тогда действующее поле $\mathbf{E}'$ можно отождествить со средним максвелловским полем $\mathbf{E}$. Для типичных полярных молекул (H_2O, HCl, HBr, HI, CO, спирты, эфиры и пр.) дипольные моменты $\mathbf{p}_0$ порядка 10^{-18} СГСЭ-ед. По сравнению с ними индуцированные дипольные моменты на несколько порядков меньше. Действительно, пользуясь оценочной формулой (35.2),

получаем $\beta \sim 10^{-24}$ см^3. В довольно сильном электрическом поле $E \sim 100$ СГСЭ-ед. (30 000 В/см) молекула приобретает дипольный момент всего порядка 10^{-22} СГСЭ-ед. Поэтому индуцированным моментом по сравнению с $\mathbf{p}_0$ можно в первом приближении полностью пренебречь. В этом приближении поляризация диэлектрика обусловлена *только поворотами* осей дипольных молекул в электрическом поле. Введем функцию распределения $f(\mathbf{b})$ для описания распределения осей диполей по направлениям в пространстве. По определению величина $dn = nf(\mathbf{b})\,d\Omega$ дает среднее число диполей в единице объема, оси которых лежат в пределах телесного угла $d\Omega$. Единичный вектор $\mathbf{b}$ указывает направление оси элементарного телесного угла $d\Omega$. В отсутствие электрического поля все направления дипольных осей равновероятны, т. е. функция $f(\mathbf{b})$ постоянна. При наличии электрического поля функция $f(\mathbf{b})$ определяется формулой Больцмана (1844–1906)

$$f = Ce^{-u/kt}, \tag{36.1}$$

где C — постоянная, а $u = -(\mathbf{p}_0\mathbf{E})$ — потенциальная энергия диполя $\mathbf{p}_0$ во внешнем поле $\mathbf{E}$. Поля обычно бывают «слабыми», т. е. удовлетворяют условию

$$\frac{p_0E}{kT} \ll 1. \tag{36.2}$$

В этих случаях функцию (36.1) можно разложить в степенной ряд и оборвать разложение на первых двух членах. Предполагая, что поле $\mathbf{E}$ направлено параллельно оси Z, получим

$$f(\mathbf{b}) = C\left(1 + \frac{p_0E}{kT}\right) = C\left(1 + \frac{p_0E}{kT}\,b_z\right).$$

Постоянная C определяется условием нормировки

$$\int f(\mathbf{b})\,d\Omega = 1, \tag{36.3}$$

в котором предполагается, что интегрирование производится по всем направлениям в пространстве. В разбираемом нами случае это условие принимает вид

$$C\int d\Omega + C\frac{p_0E}{kT}\int b_z\,d\Omega = 1.$$

Первый интеграл равен 4π, а второй обращается в нуль, поскольку проекция b_z одинаково часто принимает положительные и равные им по модулю отрицательные значения. Следовательно, $C = 1/4\pi$, а потому

$$f(\mathbf{b}) = \frac{1}{4\pi}\left(1 + \frac{p_0E}{kT}\,b_z\right). \tag{36.4}$$

2. Вектор поляризации среды, очевидно, будет направлен вдоль $\mathbf{E}$, т. е. параллельно оси Z. Его величина равна

$$P = n\int p_{0z}f(\mathbf{b})\,d\Omega = np_0\int b_zf(\mathbf{b})\,d\Omega = \frac{np_0}{4\pi}\int b_z\,d\Omega + \frac{np_0^2E}{4\pi kT}\int b_z^2\,d\Omega.$$

Первый интеграл в правой части, как мы видели, равен нулю. Для вычисления последнего интеграла используем соотношение $b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 = 1$, интегрирование которого дает

$$\int b_x^2 \, d\Omega + \int b_y^2 \, d\Omega + \int b_z^2 \, d\Omega = 4\pi.$$

Все три интеграла здесь равны между собой ввиду симметрии, а потому для каждого из них получаем $4\pi/3$. Таким образом,

$$\mathbf{P} = \frac{np_0^2}{3kT}\,\mathbf{E}, \tag{36.5}$$

$$\alpha = \frac{np_0^2}{3kT}, \tag{36.6}$$

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi np_0^2}{3kT}. \tag{36.7}$$

Отметим, что полученные результаты полностью, включая и числовой множитель $1/3$, остаются справедливыми и в квантовой механике (пока справедлива статистика Больцмана). В этом существенное отличие формул (36.5)–(36.7) от соответствующих формул теории парамагнетизма (см. § 77).

Отметим еще, что все результаты (36.5)–(36.7) верны *во втором порядке* по параметру $p_0E/(kT)$, а не только в первом, как можно было бы думать на основании их вывода. Действительно, если в разложении функции распределения $f(\mathbf{b})$ сохранить члены, квадратичные относительно указанного параметра, то при вычислении вектора поляризации $\mathbf{P}$ добавятся интегралы первой и третьей степени относительно проекции b_z. Все эти интегралы, в силу симметрии, обращаются в нуль и не влияют на окончательные результаты. Это замечание надо иметь в виду при решении задачи 4.

3. В действительности полярные молекулы в электрическом поле не только поворачиваются, но и *деформируются*, т. е. приобретают индуцированные дипольные моменты. Поляризуемость диэлектрика α в общем случае слагается из *ориентационной части* $np_0^2/(3kT)$ и *деформационной части* $n\beta$. Поэтому

$$\varepsilon = 1 + 4\pi n\beta + 4\pi\frac{np_0^2}{3kT}. \tag{36.8}$$

Деформационная часть поляризуемости *не зависит от температуры*, а ориентационная — *обратно пропорциональна* термодинамической *температуре*. Исследуя температурный ход диэлектрической проницаемости, можно поэтому отделить деформационную часть поляризуемости от ориентационной. Если по оси абсцисс откладывать величину, обратную температуре, а по оси ординат — разность $\varepsilon - 1$, то соответствующий график будет прямолинейным (рис. 94). Экстраполируем его в область высоких температур. Тогда он отсечет на оси ординат отрезок

$OA = 4\pi n\beta$. По длине этого отрезка можно вычислить поляризуемость молекулы β, а по наклону графика — ее постоянный дипольный момент p_0. Именно таким методом чаще всего измеряют дипольные моменты полярных молекул.

Посмотрим, наконец, что конкретно означает условие (36.2). Пусть $p_0 = 10^{-18}$ СГСЭ-ед. При комнатной температуре ($T \approx 300$ К) теория применима при выполнении условия

$$E \ll \frac{kT}{p_0} \approx 4 \cdot 10^4 \text{ СГСЭ-ед.} \approx 10^7 \text{ В/см}.$$

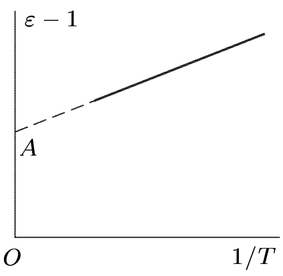


Рис. 94

При $E \gg kT/p_0$ дипольные моменты всех молекул должны были бы ориентироваться вдоль поля $\mathbf{E}$. Наступило бы *состояние насыщения*, при котором поляризация $\mathbf{P}$ уже не изменялась бы при дальнейшем возрастании напряженности электрического поля. Однако такое состояние в газах не достигается, так как значительно раньше наступает *электрический пробой.*

4. Внутреннюю энергию газообразного диэлектрика с полярными молекулами можно вычислить по формуле (31.14). Подставляя в нее значение ε из (36.7), получим

$$U = \frac{E^2}{8\pi}. \tag{36.9}$$

Таким образом, внутренняя энергия U в рассматриваемом случае зависит *только от напряженности электрического поля* $\mathbf{E}$. Вещество само по себе не оказывает непосредственного влияния на величину внутренней энергии. Его влияние сказывается лишь постольку, поскольку оно изменяет напряженность электрического поля $\mathbf{E}$. Этот результат нетрудно понять. Внутренняя энергия слагается из энергии электрического поля $E^2/8\pi$ и энергии вещества в нем. Последняя в свою очередь состоит из кинетической и потенциальной. При возрастании электрического поля потенциальная энергия диполя — $(\mathbf{p}_0\mathbf{E})$ убывает, а кинетическая возрастает на такую же величину. Сумма кинетической и потенциальной энергий диполей остается неизменной, если только не подводится тепло и не совершается дополнительная макроскопическая работа.

ЗАДАЧИ

1. Вычислить плотность пондеромоторной силы $\mathbf{f}$, действующей в однородном незаряженном газообразном диэлектрике.

Решение. Согласно формулам (35.11) и (36.8) для газообразных диэлектриков величина $\varepsilon - 1$ пропорциональна плотности диэлектрика τ. Имея это в виду, по формуле (34.5) находим

$$\mathbf{f} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \operatorname{grad} E^2 - \operatorname{grad} \mathscr{P}. \tag{36.10}$$

В электростатическом поле при равновесии сила $\mathbf{f}$ обращается в нуль, т. е. стрикционные силы $\dfrac{\varepsilon-1}{8\pi}\operatorname{grad}E^2$ уравновешиваются силами электростатического давления.

Результат (36.10) легко понять с точки зрения атомистической теории поляризации диэлектриков. В газах молекулы можно считать независимыми. На каждый диполь в электрическом поле действует сила $(\mathbf{p}\nabla)\mathbf{E}$, а на диполи единицы объема — сила $(\mathbf{P}\nabla)\mathbf{E} = \dfrac{\varepsilon-1}{4\pi}(\mathbf{E}\nabla)\mathbf{E}$. Используя потенциальность вектора $\mathbf{E}$, нетрудно показать, что $(\mathbf{E}\nabla)\mathbf{E} = (1/2)\operatorname{grad}E^2$. Таким образом, становится понятным смысл первого слагаемого в формуле (36.10).

2. Ту же задачу решить для диэлектриков, подчиняющихся формуле Мосотти–Клаузиуса (35.16).

Ответ.

$$\mathbf{f} = \frac{(\varepsilon-1)(\varepsilon+2)}{24\pi}\operatorname{grad}E^2 - \operatorname{grad}\mathscr{P}. \tag{36.11}$$

3. Вычислить функцию распределения $f(\mathbf{b})$ с точностью до членов второго порядка включительно относительно параметра $(p_0E)/kT$.

Ответ.

$$f = \frac{1}{4\pi}\left(1 + \frac{p_0E}{kT}\,b_z + \frac{p_0^2E^2}{2k^2T^2}\,b_z - \frac{p_0^2E^2}{6k^2T^2}\right). \tag{36.12}$$

4. С помощью формулы Больцмана о связи энтропии с вероятностью найти ту часть энтропии газообразного диэлектрика, состоящего из полярных молекул, которая зависит от электрического поля.

Решение. Энтропия единицы объема диэлектрика определяется так:

$$S = -kn\int f\ln f\,d\Omega + \text{const} \tag{36.13}$$

(см. т. II, § 81). Поскольку нас интересует только электрическая часть энтропии, мы можем не принимать во внимание зависимость функции распределения f от кинетической энергии поступательного и вращательного движения молекул и интегрировать только по направлениям осей этих молекул. Если опустить несущественную аддитивную постоянную, то из (36.12) находим во втором порядке

$$\ln f = \frac{p_0E}{kT}\,b_z - \frac{p_0^2E^2}{6k^2T^2} + \frac{p_0^2E^2}{2k^2T^2}\,b_z.$$

Подставляя это значение в формулу (36.13) и отбрасывая все интегралы, обращающиеся в нуль из-за симметрии, получим

$$S = -\frac{kn}{4\pi}\int\left(1 + \frac{p_0E}{kT}\,b_z\right)\left(\frac{p_0E}{kT}\,b_z - \frac{p_0^2E^2}{6k^2T^2}\right)d\Omega =$$

$$= -\frac{np_0^2E^2}{4\pi kT^2}\int\left(b_z^2 - \frac{1}{6}\right)d\Omega = -\frac{np_0^2}{3kT}\,\frac{E^2}{2T},$$

или на основании формул (36.6) и (36.7)

$$S = -\alpha\frac{E^2}{2T} = -\frac{\varepsilon-1}{8\pi}\,\frac{E^2}{T}. \tag{36.14}$$

Используя формулу $U = \Psi + TS$, получаем плотность внутренней энергии $U = E^2/8\pi$. Как и следовало ожидать, результат совпадает с результатом (36.9), полученным ранее термодинамическим путем.

5. Определить изменение температуры газообразного диэлектрика с полярными молекулами при адиабатическом выключении электрического поля, если объем газа во время процесса выключения поддерживается постоянным (электрокалорический эффект).

Решение. Как показывает формула (36.7), для таких диэлектриков справедливо соотношение

$$\frac{(\varepsilon-1)T}{\tau} = \text{const}, \qquad (36.15)$$

откуда

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\tau = -\frac{\varepsilon-1}{T}.$$

Подставив это значение в формулу (31.16) и выполнив интегрирование по E, получим

$$T_2 - T_1 = \frac{\varepsilon-1}{8\pi C_E}\,E^2,$$

где E — начальное значение напряженности электрического поля. (При интегрировании изменением ε с температурой мы пренебрегли.) Здесь C_E означает теплоемкость единицы объема диэлектрика при постоянных объеме и напряженности электрического поля. Зависимостью теплоемкости от напряженности поля можно пренебречь. Тогда

$$C_E = \frac{C_V\mathscr{P}}{RT},$$

где C_V — теплоемкость моля газа при постоянном объеме. С помощью соотношения $C_P - C_V = R$ величину C_E можно выразить через адиабатическую постоянную $\gamma = C_P/C_V$. Сделав это и подставив результат в формулу для $T_2 - T_1$, получим

$$T_2 - T_1 = -\frac{(\varepsilon-1)(\gamma-1)}{8\pi\mathscr{P}}\,E^2 T. \qquad (36.16)$$

Используя формулу (36.7), а также соотношение $\mathscr{P} = nkT$, преобразуем эту формулу к виду

$$T_2 - T_1 = -\frac{(\gamma-1)p_0^2}{24\pi k^2 T}\,E^2. \qquad (36.17)$$

Таким образом, при адиабатическом выключении электрического поля диэлектрик охлаждается. Понижение температуры $T_2 - T_1$ обратно пропорционально абсолютной температуре T. Для примера возьмем $\gamma = 1{,}4$, $p_0 = 10^{-18}$ СГСЭ-ед., $E = 100$ СГСЭ-ед., $T = 100$ К. Тогда по формуле (36.17) найдем $T_2 - T_1 \approx 3\cdot 10^{-5}$ К.

§ 37. Пьезоэлектричество

1. Во многих кристаллах при растяжении и сжатии в определенных направлениях возникает электрическая поляризация. В результате этого на их поверхностях появляются электрические заряды обоих знаков. Это явление, получившее название *прямого пьезоэлектрического эффекта*, было открыто в 1880 г. братьями Пьером и Жаком Кюри. Оно наблюдалось затем на

кристаллах турмалина, цинковой обманки, хлората натрия, винной кислоты, тростникового сахара, сегнетовой соли, титаната бария и многих других веществ. Пьезоэлектрическими свойствами могут обладать только *ионные кристаллы.* Если кристаллические решетки положительных и отрицательных ионов, из которых построены такие кристаллы, под действием внешних сил деформируются по-разному, то в противоположных местах на поверхности кристалла выступают электрические заряды разных знаков. Это и есть пьезоэлектрический эффект. При однородной деформации пьезоэлектрический эффект наблюдается при наличии в кристалле одной или нескольких *полярных осей* (направлений). Под полярной осью (направлением) кристалла понимают всякую прямую, проведенную через кристалл, оба конца которой неравноценны, т. е. невзаимозаменяемы. Иными словами, при повороте кристалла на 180° вокруг любой оси, перпендикулярной к полярной, он не совмещается сам с собою. Вообще, для существования пьезоэлектрическою эффекта при однородной деформации необходимо *отсутствие у кристалла центра симметрии.* Действительно, если бы недеформированный кристалл имел центр симметрии, то последний сохранился бы и при однородной деформации кристалла. С другой стороны, в электрически поляризованном кристалле есть особое направление, а именно направление вектора поляризации. При наличии такового кристалл не может иметь центр симметрии. Получившееся противоречие и доказывает наше утверждение. Из 32 кристаллических классов не имеет центра симметрии 21 класс. У одного из них, однако, сочетание других элементов симметрии делает пьезоэлектрический эффект также невозможным. Таким образом, пьезоэлектрические свойства наблюдаются у 20 кристаллических классов.

2. Рассмотрим пьезоэлектрический эффект на примере кристалла кварца — важнейшего пьезоэлектрического кристалла, нашедшего широкие научно-технические применения благодаря своим превосходным механическим и электрическим свойствам. При обычных температурах и давлениях кварц встречается в так называемой α-модификации. Кристалл α-кварца (рис. 95) относится к тригональной системе и имеет три оси симметрии второго порядка, обозначенные на рис. 95 через X_1, X_2, X_3. Они и являются полярными осями кристалла. Каждая из них соединяет противоположные, но неравнозначные ребра шестигранной призмы. Неравнозначность этих ребер видна из того, что к краям одного из них примыкают маленькие грани, обозначенные на рисунке буквами *а* и *б*, тогда как у краев другого ребра таких граней нет. Четвертая ось Z является осью симметрии третьего порядка. Ее называют *оптической осью*, так как поворот кристалла вокруг этой оси на любой угол не оказывает никакого влияния на распространение света в кристалле.

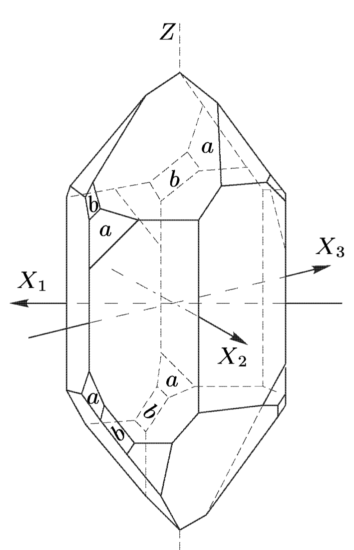


Рис. 95

При механических воздействиях на кристалл кварца на концах полярной оси (точнее, на перпендикулярных к ней гранях) появляются противоположные электрические заряды. Не обязательно, чтобы приложенные внешние силы дей-

ствовали в направлении рассматриваемой полярной оси. Необходимо лишь, чтобы в результате действия внешних сил возникало растяжение или сжатие вдоль этой оси.

При температуре до 200 °C пьезоэлектрические свойства кварца практически не зависят от температуры. С дальнейшим повышением температуры пьезоэлектрический эффект медленно убывает. При 576 °C α-кварц претерпевает фазовое превращение и переходит в β-модификацию. Кристаллы β-кварца относятся к гексагональной системе, а потому пьезоэлектрические явления в них не наблюдаются в согласии с тем, что было сказано выше. При обратном понижении температуры первоначальная структура кварца восстанавливается, причем это восстановление происходит при температуре, несколько более низкой, чем исходная (гистерезис). Ниже всюду речь идет об α-кварце.

3. Возникновение пьезоэлектрического эффекта легко понять с помощью модельного рассмотрения, предложенного Мейсснером. Химическая формула кварца имеет вид SiO_2. Его кристаллическая решетка состоит из положительных ионов кремния и отрицательных ионов кислорода. Каждый ион кремния несет четыре, а каждый ион кислорода — два элементарных заряда. В первом приближении можно представить, что ионы кремния и кислорода расположены в шестигранных ячейках, одна из которых изображена на рис. 96, если смотреть на кристалл вдоль оптической оси (перпендикулярной к плоскости рисунка). Ионы кремния изображены большими шариками *1*, *2*, *3*, ионы кислорода — маленькими. Те и другие ионы расположены по спирали, направление вращения которой определяется тем, какой взят кварц: левый или правый (рис. 95 и 96 относятся к левому кварцу). Ион кремния *3* лежит несколько глубже иона *2*, а ион *2* — глубже иона *1*. Расположение ионов кислорода не требует дополнительных разъяснений. В целом ячейка электрически нейтральна и не имеет дипольного электрического момента.

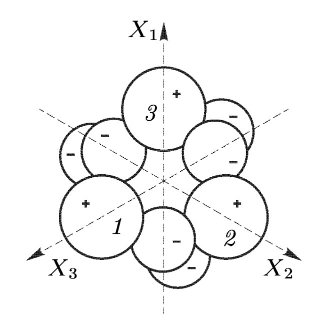


Рис. 96

Для упрощения рассуждений заменим каждую пару соседних ионов кислорода одним отрицательным ионом с удвоенным зарядом. Мы придем к упрощенной модели ячейки, изображенной на рис. 97 *а*. Если подвергнуть такую ячейку сжатию вдоль полярной оси X_1 (рис. 97 *б*), то ион кремния *3* и ион кислорода *4* вклинятся между окружающими их боковыми ионами. В результате на плоскости A пластинки появится отрицательный, а на плоскости B — положительный заряды (*продольный пьезоэлектрический эффект*).

При сжатии в боковом направлении, т. е. перпендикулярно к полярной и оптической осям (рис. 97 *в*), ионы кремния *1* и *2* получают одинаковые, но противоположно направленные смещения внутрь ячейки. Так же ведут себя ионы кислорода *5* и *6*. При этом сохраняется симметрия ячейки относительно плоскости, проходящей посередине между плоскостями C и D, и на этих плоскостях не возникает никаких зарядов. Однако ион кремния *3* и ион кислорода *4* смещаются наружу. Благодаря этому возникает дипольный момент, направленный в положительную сторону полярной оси X_1. На плоскости A появляется положительный, а на плоскости B — отрицательный заряды (*поперечный пьезоэлектрический эффект*). Знаки зарядов в продольном и поперечном эффектах, таким образом, противоположны.

Из рассматриваемой модели видно также, что замена сжатия растяжением приводит к изменению знаков электрических зарядов при пьезо-

электрическом эффекте и что поляризация пропорциональна деформации кристалла (когда деформации малы). А так как между деформацией и силой согласно закону Гука (1635–1703) существует прямая пропорциональность, то поляризация кристалла при пьезоэлектрическом эффекте должна быть

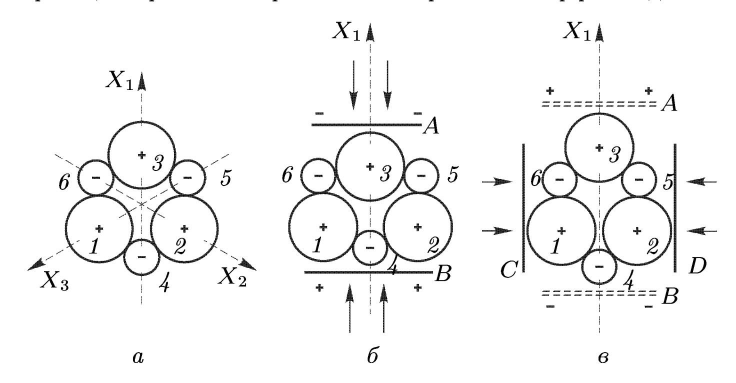


Рис. 97

пропорциональна также приложенной силе. Наконец, из модели видно, что сжатие или растяжение кристалла в направлении оптической оси никакими пьезоэлектрическими эффектами не сопровождается. Все эти заключения подтверждаются опытом.

4. Согласно изложенному для получения максимальных электрических зарядов кристалл кварца надо растягивать или сжимать в направлении одной из полярных осей. В соответствии с этим кварцевые пластинки и стержни, применяемые в пьезоэлектрических опытах и приборах, вырезаются обычно так, чтобы пара плоскостей, образовавшихся при срезе, была перпендикулярна к одной из полярных осей. Такая ось называется также *электрической осью* или *пьезоосью* и обозначается обычно через X. Оптическая ось принимается за ось Z соответствующей правой системы координат. Ось Y такой системы координат называют *механической осью кристалла*. На рис. 98 изображена пластинка, вырезанная указанным образом. Длины ребер пластинки обозначены через l (длина), b (ширина), h (толщина).

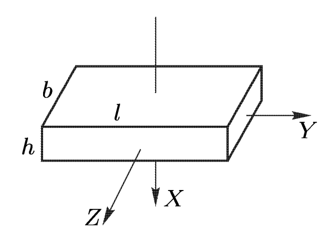


Рис. 98

В соответствии с приведенным выше наглядным объяснением при растяжении или сжатии пластинки в направлении оптической оси Z пьезоэлектрический эффект не возникает. При растяжении вдоль электрической оси X нижняя поверхность пластинки электризуется положительно, а верхняя — отрицательно. То же самое наблюдается при сжатии пластинки в направлении механической оси Y. При замене сжатия растяжением и наоборот знаки зарядов меняются на противоположные. Если нет касательных напряжений, то поляризация кварцевой пластинки при растяжении или сжатии определяется выражением

$$P_x = d_{11}(\tau_x - \tau_y), \tag{37.1}$$

где τ_x и τ_y — механические натяжения, действующие параллельно осям X и Y, а d_{11} — постоянная, называемая *пьезоэлектрическим модулем* (смысл

двойного индекса при d выяснится в п. 9). Для кварца

$$d_{11} = 6{,}99 \cdot 10^{-8} \text{ дин}^{-1/2} \cdot \text{см}.$$

Допустим, например, что $\tau_x = 10^6$ дин/см^2, $\tau_y = 0$. Тогда на нижней поверхности пластинки появится положительный заряд с плотностью $\sigma = P_x = 6{,}99 \cdot 10^{-2}$ СГСЭ-ед. $= 2{,}33 \cdot 10^{-7}$ Кл/м^2. Ему соответствует внутри пластинки электрическое поле $E_x = 4\pi\sigma \approx 0{,}88$ СГСЭ-ед. ≈ 240 В/см. При толщине пластинки $h = 0{,}5$ см она заряжается до разности потенциалов $\varphi \approx 120$ В.

Для того чтобы использовать поляризационные заряды, появляющиеся на противоположных гранях кварцевой пластинки при ее деформации, эти грани снабжают металлическими обкладками. На таких обкладках индуцируются заряды, равные и противоположные по знаку поляризационным, а во внешних проводах, соединяющих обкладки, возникает электрический ток.

5. Значительно сильнее, чем у кварца, пьезоэлектрические свойства выражены у кристаллов сегнетовой соли. Благодаря этому она применяется во многих пьезоэлектрических приборах. Однако сегнетова соль очень хрупка и имеет низкую температуру плавления (+63 °C), что сильно ограничивает возможности ее практического использования. Она удобна для демонстрации прямого пьезоэлектрического эффекта. Пластинка сегнетовой соли слегка зажимается между двумя обкладками из листовой латуни (рис. 99). Обкладки соединены проводами с неоновой лампочкой. Последняя представляет собою стеклянный баллончик, наполненный разреженным неоном. Внутрь баллончика введены два металлических электрода. Когда разность потенциалов между электродами превосходит определенную величину (потенциал зажигания), в лампочке возникает газовый разряд, сопровождающийся свечением неона. Если резко ударять резиновым молотком по пластинке сегнетовой соли, то при каждом ударе появляется кратковременная вспышка неоновой лампочки. Вместо сегнетовой соли в описанной демонстрации можно пользоваться пластинкой из титаната бария.

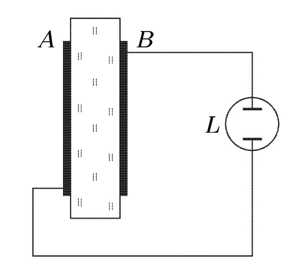


Рис. 99

6. В 1881 г. Липпман (1845–1921), исходя из термодинамических соображений, предсказал *обратный пьезоэлектрический эффект*, который в том же году и был обнаружен братьями Кюри на кристаллах кварца. Обратный пьезоэлектрический эффект состоит в том, что при внесении пьезоэлектрического кристалла в электрическое поле в кристалле возникают механические напряжения, под действием которых кристалл деформируется.

Допустим, что кварцевая пластинка (см. рис. 98) внесена в электрическое поле, направленное параллельно оси X. Пусть она в направлениях X и Y подвержена также действию механических натяжений τ_x и τ_y соответственно. Если $V = hbl$ — объем пластинки, то элементарная работа, которую надо затратить на ее поляризацию при квазистатическом процессе, определяется выражением $\delta A_{\text{пол}} = V E\, dP + V E_x\, dP_x$. Элементарная же механическая работа, совершаемая квазистатически силами натяжения при удлинении ребер h и l, будет $\delta A_{\text{мех}} = bl\tau_x\, dh + hb\tau_y\, dl$. Применим к рассматриваемому процессу термодинамическое соотношение $dU = T\, dS + \delta A$. Разделив его на V и обозначив через s и u значения удельной энтропии и внутренней

энергии, получим

$$du = T\,ds + E_x\,dP_x + \tau_x \frac{dh}{h} + \tau_y \frac{dl}{l},$$

или

$$du = T\,ds + E_x\,dP_x + \tau_x\,d\ln h + \tau_y\,d\ln l.$$

Введя функцию $g = u - Ts - E_x P_x - \tau_x \ln h - \tau_y \ln l$, преобразуем это соотношение к виду

$$dg = -s\,dT - P_x\,dE_x - \ln h\,d\tau_x - \ln l\,d\tau_y.$$

Так как выражение справа есть полный дифференциал функции g, то должно быть

$$\left(\frac{\partial P_x}{\partial \tau_x}\right)_T = \left(\frac{\partial \ln h}{\partial E_x}\right)_T = \frac{1}{h}\,\frac{\partial h}{\partial E_x},$$

$$\left(\frac{\partial P_x}{\partial \tau_y}\right)_T = \left(\frac{\partial \ln l}{\partial E_x}\right)_T = \frac{1}{l}\,\frac{\partial l}{\partial E_x},$$

или с учетом соотношения (37.1)

$$\frac{\partial h}{\partial E_x} = hd_{11}, \quad \frac{\partial l}{\partial E_x} = -ld_{11}. \tag{37.2}$$

Эти формулы и описывают обратный пьезоэлектрический эффект в кварце. В линейном приближении, в котором только и верна излагаемая теория, формулы (37.2) записываются в виде

$$\delta h = d_{11} h E_x = d_{11}\varphi, \tag{37.3}$$

$$\delta l = -d_{11} l E_x = -(l/h) d_{11}\varphi, \tag{37.4}$$

где δh и δl — абсолютные приращения размеров пластинки при наложении электрического поля E_x, а $\varphi = hE_x$ — разность потенциалов между гранью bl и гранью, ей противоположной (рис. 98).

Формула (37.3) выражает *продольный обратный пьезоэлектрический эффект*, а формула (37.4) — *поперечный.* При наложении электрического поля параллельно электрической оси меняется толщина пластинки (продольный эффект) и ее длина (поперечный эффект). Если толщина h увеличивается, то длина l уменьшается, и наоборот, причем относительные изменения этих размеров по абсолютной величине одинаковы, так что объем пластинки остается неизменным. Абсолютное значение δh не зависит от толщины пластинки, а только от приложенной разности потенциалов φ. При φ = 3000 В = 10 СГСЭ-ед. из формулы (37.3) находим $\delta h = 6{,}99 \cdot 10^{-7}$ см $= 6{,}99 \cdot 10^{-3}$ мкм. Если $l = 10h$, то поперечный эффект при той же разности потенциалов будет в 10 раз больше. Модуль Юнга (1773–1829) кварца в направлении электрической оси $\mathscr{E} = 7{,}87 \cdot 10^{11}$ дин/см^2. При толщине пластинки $h = 0{,}5$ см в ней в случае продольного эффекта в приведенном выше примере возникают натяжения или давления $\mathscr{P} = \mathscr{E}\delta h/h \approx 1{,}1 \cdot 10^6$ дин/см$^2 \approx 1{,}1$ атм.

Термодинамические рассуждения, изложенные выше, проведены в предположении, что температура остается постоянной. Поэтому пьезоэлектрический модуль d_{11} может быть охарактеризован как *изотермический модуль.* Нетрудно видеть, как следует изменить эти рассуждения применительно к адиабатическим процессам. Формулы (37.1), (37.3) и (37.4) остаются верными и для таких процессов. Только изотермический пьезоэлектрический модуль d_{11} надо заменить адиабатическим.

7. Что касается связи между направлениями происходящих изменений в прямом и обратном пьезоэлектрических эффектах, то здесь применим общий принцип Ле Шателье (см. т. II, § 51), как в этом нетрудно убедиться с помощью формул (37.1), (37.3) и (37.4). Например, при растяжении пластинки вдоль оси X (см. рис. 98) или сжатии вдоль оси Y на ее нижней поверхности, как мы видели, возбуждается положительный заряд, а на верхней — отрицательный ($P_x > 0$). Иными словами, в пластинке появляется электрическое поле, направленное вверх ($E_x < 0$). Согласно принципу Ле Шателье появление такого поля можно рассматривать как противодействие системы приложенным растягивающим и сжимающим силам. Это противодействие проявляется в том, что возникают силы, стремящиеся сжать пластинку в направлении оси X и растянуть в направлении оси Y. Если поле E_x усилить, то увеличатся и противодействующие силы. Они появятся и в недеформированной пластинке при внесении ее в электрическое поле. Если электрическое поле направлено вверх ($E_x < 0$), то в направлении оси X пластинка сожмется, а в направлении оси Y — удлинится. Это находится в согласии с формулами (37.3) и (37.4). Так же можно рассуждать и в остальных случаях.

8. Физический механизм обратного пьезоэлектрического эффекта можно разъяснить на той же модели, которая применялась при рассмотрении прямого эффекта. Если, например, на поверхности A и B (см. рис. 97 *б*) нанести электрические заряды указанных знаков, то ион кремния *3* притянется к поверхности A, а ион кислорода *4* — к поверхности B, в результате чего ячейка вытянется в направлении оси X. Ионы кремния *1* и *2* будут отталкиваться от поверхности B, а ионы кислорода — от поверхности A, смещаясь при этом внутрь увеличившегося зазора между ионами *3* и *4*. Это приведет к сжатию ячейки в поперечном направлении (вдоль механической оси Y).

Обратный пьезоэлектрический эффект имеет внешнее сходство с *электрострикцией* (§ 33). Однако между этими двумя явлениями имеется и существенное различие. Электрострикция имеет место *во всех* диэлектриках при помещении их в *неоднородное* электрическое поле. Обратный пьезоэлектрический эффект наблюдается *только в кристаллах*, да и то не во всех. Он существует *и в однородных* электрических полях. Силы электрострикции возникают в результате действия электрического поля на поляризованный диэлектрик, поляризация которого обусловлена тем же полем. Поэтому электрострикционные силы *квадратичны по полю.* Они не меняются при изменении направления электрического поля на противоположное. Напротив, обратный пьезоэлектрический эффект возникает в результате действия *внешнего электрического поля* на уже имеющиеся противоположно заряженные ионные решетки кристалла. Возникающие здесь силы *линейны по полю.* Они меняют свои направления на противоположные при изменении знака электрического поля.

9. В различных кристаллах пьезоэлектрический эффект может возникать не только под действием нормальных сил давления или натяжения, но и под действием *касательных сил.* Внутреннее состояние упругих напряжений кристалла характеризуется симметричным тензором упругих натяжений (см. т. I, § 74):

$$\tau_{xx}, \ \tau_{yy}, \ \tau_{zz}, \ \tau_{yz} = \tau_{zy}, \ \tau_{zx} = \tau_{xz}, \ \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

(первый индекс указывает направление внешней нормали площадки, к которой приложена сила натяжения, а второй — направление координатной оси, на которую проецируется эта сила). Для сокращения записи компоненты тензора натяжений принято нумеровать одним индексом, полагая

$$\tau_1 \equiv \tau_{xx}, \quad \tau_2 \equiv \tau_{yy}, \quad \tau_3 \equiv \tau_{zz},$$

$$\tau_4 \equiv \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_5 \equiv \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_6 \equiv \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Опыт показывает, что в случае малых деформаций между компонентами вектора поляризации **P** и компонентами тензора натяжений существует *линейная связь.* Такая зависимость аналогична известному закону Гука и имеет примерно ту же область применимости. Таким образом, в общем случае можно написать

$$\begin{aligned} P_x &= d_{11}\tau_1 + d_{12}\tau_2 + d_{13}\tau_3 + d_{14}\tau_4 + d_{15}\tau_5 + d_{16}\tau_6, \\ P_y &= d_{21}\tau_1 + d_{22}\tau_2 + d_{23}\tau_3 + d_{24}\tau_4 + d_{25}\tau_5 + d_{26}\tau_6, \\ P_z &= d_{31}\tau_1 + d_{32}\tau_2 + d_{33}\tau_3 + d_{34}\tau_4 + d_{35}\tau_5 + d_{36}\tau_6. \end{aligned} \tag{37.5}$$

Отсюда видно, что в общем случае пьезоэлектрические свойства кристалла характеризуются *восемнадцатью постоянными.* Эти постоянные называются *пьезоэлектрическими модулями.* Впрочем, число независимых пьезоэлектрических модулей уменьшается из-за симметрии кристалла. Чем выше симметрия кристалла, тем меньше число независимых пьезоэлектрических модулей, которыми он характеризуется. Так, в случае кварца $d_{12} = -d_{11}$, $d_{25} = -d_{14}$, $d_{26} = -2d_{11}$, а все остальные пьезоэлектрические модули обращаются в нуль. Таким образом, пьезоэлектрические свойства кварца характеризуются только двумя модулями, за которые можно принять d_{11} и d_{14}. Тогда

$$\begin{aligned} P_x &= d_{11}\tau_1 - d_{11}\tau_2 + d_{14}\tau_4, \\ P_y &= -d_{14}\tau_5 - 2d_{11}\tau_6, \\ P_z &= 0. \end{aligned} \tag{37.6}$$

При этом $d_{14} = -2{,}0 \cdot 10^{-8}$ дин$^{-1/2}\cdot$ см. Числовое значение модуля d_{11} было приведено выше.

10. Известны сотни веществ, которые в принципе могли бы быть использованы для практического применения пьезоэлектричества. Однако дополнительные требования (большая величина пьезоэффекта, механическая и электрическая прочность, устойчивость к влаге и пр.) резко ограничивают список практически пригодных кристаллов. Из них на первом месте стоит *кварц.* Он превосходный изолятор, поэтому в нем можно возбуждать сильные поля, порядка 30 000 В/см. Научно-технические применения пьезоэлектрического эффекта (прямого и обратного) весьма многочисленны и разнообразны. Не имея возможности останавливаться на этой стороне вопроса, укажем на *пьезоэлектрический манометр*, широко применяющийся для измерения быстропеременных давлений. В этом приборе кварцевая пластинка, вырезанная определенным образом, помещается внутри исследуемого газа. О давлении газа судят по величине пьезоэлектрических зарядов, появляющихся на пластинке. Укажем далее на разнообразнейшие *пьезоэлектрические преобразователи*: *пьезоэлектрические стабилизаторы* и *фильтры* в радиотехнике, *пьезоэлектрические датчики* в автоматике и телемеханике, *виброметры*, *звукосниматели* в технике звукозаписи, *микрофоны*, *телефоны*, *гидрофоны* в акустике и т. д. Особо важное значение имеют *кварцевые излучатели ультразвука*, предложенные во время первой мировой войны французским физиком Ланжевеном (1872–1946). Смещения, возникающие в кварцевой пластинке при наложении на нее статического электрического поля, ничтожны. Однако их можно увеличить в тысячи, а энергию колебаний — в миллионы раз, если воспользоваться переменным электрическим полем. Для этого следует использовать явление резонанса, т. е. подобрать частоту наложенного электрического поля равной одной из собственных частот механических колебаний кварца. Собственные частоты кварца определяются

соотношением

$$h = \frac{\lambda}{2}\,n,$$

где λ — длина ультразвуковой волны в кварце, а n — целое число. При $n = 1$ получается основное колебание пластинки, при $n = 2, 3, 4, \ldots$ — соответствующие ему обертоны. При резонансной частоте электрического поля кварцевая пластинка, как показал Ланжевен, является мощным источником ультразвука. Такие источники ультразвука и были предложены Ланжевеном для измерения морских глубин и подводной сигнализации. С этого времени началось бурное развитие практических применений пьезоэлектричества.

§ 38. Пироэлектричество

1. У некоторых пьезоэлектрических кристаллов решетка положительных ионов в состоянии термодинамического равновесия смещена относительно решетки отрицательных ионов таким образом, что кристаллы оказываются *электрически поляризованными* даже в отсутствие электрического поля. Такая поляризация называется *спонтанной*, а кристаллы, у которых она наблюдается, — *пироэлектрическими.* Обычно эффект спонтанной поляризации замаскирован свободными поверхностными зарядами, появляющимися в результате оседания ионов из воздуха и их последующего распространения по поверхности кристалла, обладающего хотя и ничтожной, но все же конечной электропроводностью. Однако при нагревании ионные решетки, из которых построен кристалл, смещаются одна относительно другой, вследствие чего на поверхности кристалла появляются электрические заряды противоположных знаков. Возникновение таких зарядов называется *прямым пироэлектрическим эффектом.* Вещества, в которых наблюдается этот эффект, называются *пироэлектриками* («пир» — огонь).

К наиболее известным пироэлектрикам относится турмалин. Кристалл турмалина, помещенный в горячий пепел, сначала притягивает, а затем отталкивает его. В Индии и на Цейлоне это явление, по-видимому, было известно с незапамятных времен. В Европе о нем узнали впервые около 1703 г., когда голландские купцы привезли с Цейлона турмалин.

Для обнаружения пироэлектрического эффекта Август Кундт (1839–1894) предложил погружать кристалл турмалина в смесь порошков сурика и серы. В результате трения друг о друга при перемешивании сурик электризуется положительно, а сера — отрицательно. Поэтому красный сурик притягивается к тем плоскостям кристалла турмалина, которые при нагревании зарядились отрицательно, а желтая сера — к плоскостям, зарядившимся положительно. Заряженные участки располагаются на противоположных концах кристалла. Заряды обнаруживаются также всюду, где на гранях кристалла имеются трещины, происходящие от местных напряжений. В том, что турмалин поляризован спонтанно и при обычной температуре, можно убедиться, разломив кристалл, — окажется, что плоскости излома всегда заряжены электричеством. Фохт (1850–1919) погружал два куска, на которые только что был разломан кристалл турмалина, в ртутные чашки, соединенные с гальванометром. По количеству электричества, прошедшего через гальванометр, можно было оценить спонтанную поляризацию P кристалла. Фохт нашел, что нижний предел P при 24 °C составляет 33 СГСЭ-ед. Внешнее электрическое поле лишь очень слабо меняет поляризацию пироэлектрического кристалла. Последний уже в отсутствие электрического поля поляризован практически до насыщения.

Длительные колебания температуры комнатного воздуха, даже если они небольшие, могут повести к появлению пыльных фигур вблизи лежащего

кристалла турмалина. Так, если кристалл турмалина положить на лист белой бумаги в том месте комнаты, где воздух застаивается, подвергаясь, однако, небольшим колебаниям температуры, то через несколько месяцев на бумаге у концов кристалла появляются тусклые грязные пятна. Дело в том, что под действием электрических сил частицы пыли устремляются к тем концам кристалла турмалина, где поле наиболее сильное, и оседают на бумагу вблизи этих концов.

При изменении температуры меняется объем кристалла, т. е. возникает его деформация. Такая деформация обычно сопровождается появлением пьезоэлектрических зарядов. Поэтому для наблюдения пироэлектричества в чистом виде надо производить нагревание при постоянном объеме и неизменной форме кристалла. Если при этом нет градиента температуры, то возникающая при таком нагревании поляризация кристалла называется *первичным* (или *истинным*) *пироэлектрическим эффектом.* Электризация же, возникающая при деформации кристалла в результате его нагревания, называется *вторичным пироэлектрическим эффектом.* Обычно вторичный эффект превосходит первичный. В некоторых кристаллах первичный эффект настолько мал, что его не удается даже обнаружить. Наконец, заряды могут возникать при неоднородном нагревании, т. е. при наличии в кристалле градиента температуры. Это явление называют *третичным* (или *ложным*) *пироэлектрическим эффектом.* Дело в том, что неравномерное нагревание кристалла создает градиент температуры, который из-за теплового расширения вызывает появление неоднородных напряжений и деформаций. В результате этого появляются пьезоэлектрические заряды, которые (если опыт выполнен недостаточно тщательно) можно ошибочно принять за первичное или вторичное пироэлектричество.

2. Для возможности пироэлектрического эффекта, т. е. спонтанной поляризации кристалла, отсутствия одного только центра симметрии недостаточно. Действительно, в пироэлектрическом кристалле уже в отсутствие электрического поля должно существовать какое-то одно особенное направление, вдоль которого и устанавливается спонтанная поляризация. Такого особенного направления нет, например, в кристалле кварца. Все три электрических оси кварца X_1, X_2, X_3 (см. рис. 95) совершенно равноправны, и поэтому ни одна из них не выделяет особенное направление. Таким образом, *не всякий пьезоэлектрический кристалл является пироэлектрическим. Однако всякий пироэлектрический кристалл является также и пьезоэлектрическим.* Пироэлектрическими свойствами обладают *десять* из тридцати двух кристаллографических классов.

3. Помимо прямого существует *обратный пироэлектрический эффект.* Он состоит в том, что изменение электрического поля в отсутствие подвода или отвода тепла (адиабатический процесс) сопровождается изменением температуры пироэлектрического кристалла. Необходимость этого эффекта является следствием прямого пироэлектрического эффекта и законов термодинамики. Действительно, напишем термодинамическое соотношение $du = T\,ds + E\,dP$ для единицы объема кристалла, предполагая, что во время процесса объем v сохраняется неизменным. Из этого соотношения следует

$$d(u - Ts - EP) = -s\,dT - P\,dE.$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial s}{\partial E}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_E.$$

Между величинами s, E, T при постоянном объеме имеется функциональная связь, а потому

$$\left(\frac{\partial s}{\partial E}\right)_T = -\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_E \left(\frac{\partial T}{\partial E}\right)_s.$$

Введем далее удельную теплоемкость вещества при постоянных объеме и напряженности электрического поля:

$$c_{v,E} = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{v,E}.$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial T}{\partial E}\right)_{v,s} = -\frac{T}{c_{v,E}}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{v,E}. \qquad (38.1)$$

Эта формула и устанавливает связь между прямым и обратным пироэлектрическими эффектами.

§ 39. Сегнетоэлектричество

1. Некоторые диэлектрические кристаллы в определенной области температур, называемой *полярной областью*, являются пироэлектриками, т. е. спонтанно поляризованы уже в отсутствие электрического поля. Однако на границах этой температурной области они испытывают фазовые превращения, переходя в новые кристаллические модификации, в которых спонтанная поляризация не наблюдается. Такие диэлектрики называются *сегнетоэлектриками.* От обычных пироэлектриков сегнетоэлектрики отличаются еще тем, что направление спонтанной поляризации в сегнетоэлектрике может быть изменено на противоположное уже сравнительно слабым электрическим полем, тогда как у обычных пироэлектриков этого не происходит даже в сильных полях. Прямая, параллельная вектору спонтанной поляризации сегнетоэлектрика, называется его *полярной осью.* Существуют сегнетоэлектрики с одной полярной осью (например, *сегнетова соль*) и с несколькими полярными осями (например, *титанат бария*).

Кристаллическая модификация, в которой сегнетоэлектрик спонтанно поляризован, называется *полярной фазой*, а модификация, в которой спонтанной поляризации нет, — *неполярной фазой.* Температура $T_{\text{К}}$, при которой сегнетоэлектрик переходит из полярной фазы в неполярную (или обратно), называется *диэлектрической точкой Кюри* в честь Пьера Кюри, который ввел аналогичное понятие в учение о ферромагнетизме (см. § 74 и 79). Как правило, сегнетоэлектрик имеет только одну точку Кюри, ниже которой он находится в полярной, а выше — в неполярной фазе. Исключение составляют сегнетова соль и изоморфные с ней соединения, а также соли $Ag_2H_3IO_6$ и $Ag_2D_3IO_6$. Они имеют две точки Кюри: *нижнюю* $T_{\text{н}}$ и *верхнюю* $T_{\text{в}}$. Спонтанная поляризация наблюдается в температурной области, ограниченной этими точками, и не наблюдается при других температурах.

Сегнетоэлектрики характеризуются рядом аномальных диэлектрических и других физических свойств (пьезоэлектрических, электрооптических и пр.), связанных между собой термодинамическими соотношениями. Ранее всего эти аномальные свойства были обнаружены на кристаллах сегнетовой соли. От названия этой соли и происходят термины *сегнетоэлектрик* и *сегнетоэлектричество.* Диэлектрические свойства сегнетоэлектриков во многих отношениях аналогичны магнитным свойствам ферромагнетиков (см. § 74 и 79). Поэтому в иностранной литературе их называют также *ферроэлектриками.* Сегнетова соль $NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$ представляет собой двойную натриевокалиевую соль винной кислоты, содержащую четыре молекулы кристаллизационной воды. У нее две точки Кюри: $T_н = 255$ K (-18 °C) и $T_в = 297$ K ($+24$ °C). Сегнетоэлектрическими свойствами обладают и другие соли винной кислоты (тартраты), например $NaNH_4C_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$ (аммониевая сегнетова соль), $NaRbC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$, $NaTlC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$. Аномально большой пьезоэлектрический эффект в сегнетовой соли был обнаружен братьями Кюри еще в 1880 г. Затем Поккельс (1865–1913) в 1894 г. количественно исследовал этот эффект (а также электрооптический эффект, т. е. зависимость показателей преломления от напряженности электрического поля). Аномальные диэлектрические свойства сегнетовой соли были открыты Валашеком в 1921 г., а затем в начале 30-х годов подробно исследованы И. В. Курчатовым (1903–1960) и П. П. Кобеко (1897–1954). В 1944 г. Б. М. Вул (р. 1903) и И. М. Гольдман (р. 1910) в Советском Союзе и независимо от них Вейнер и Соломон в США и Огава в Японии открыли на керамических образцах аномальные диэлектрические свойства титаната бария ($BaTiO_3$) — важнейшего сегнетоэлектрика, обладающего высокой механической прочностью, большой химической устойчивостью и нашедшего благодаря этому широкое научно-техническое применение (температура Кюри $T_K = 393$ K $= 120$ °C). С этого момента началось быстрое развитие учения о сегнетоэлектричестве и его применения. Оказалось, что сегнетоэлектричество — более распространенное явление, чем предполагалось раньше. В настоящее время известно более сотни сегнетоэлектриков, не считая огромного количества сегнетоэлектрических твердых растворов. Учение о сегнетоэлектрических явлениях представляет обширный, быстро развивающийся раздел физики твердого тела. В общем курсе о сегнетоэлектричестве можно дать лишь весьма краткие сведения.

2. Будем иллюстрировать поведение сегнетоэлектриков на примере сегнетовой соли и титаната бария. В неполярной фазе (при $T < T_н$ и $T > T_в$) кристаллы сегнетовой соли относятся к *ромбической системе* и являются пьезоэлектриками. Форма ромбического кристалла изображена на схематическом рис. 100. Наиболее развиты и типичны грани (001), а также призматические грани (110). Менее развиты грани (210), (120), (010). Грани (100) в большинстве случаев очень малы или совсем отсутствуют. В полярной фазе сегнетова соль принадлежит к

моноклинной системе, причем полярная ось a [100] направлена параллельно исходной оси a ромбического кристалла. (Вообще, полярная фаза сегнетоэлектрика всегда характеризуется меньшей степенью симметрии, чем неполярная.) Аномальные диэлектрические свойства сегнетовой соли выражены максимально, когда поле **E** направлено по оси a. Аномалии не наблюдаются, когда направление **E** параллельно осям b и c.

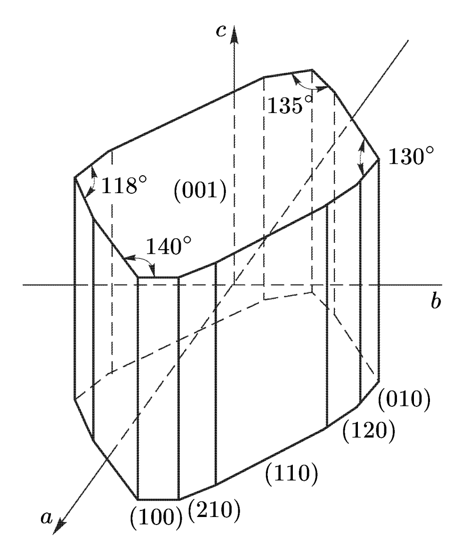


Рис. 100

3. Титанат бария имеет наиболее простую кристаллическую структуру по сравнению со всеми известными сегнетоэлектриками. В неполярной фазе выше 120 °C это есть так называемая *кубическая структура типа перовскита*, приведенная на рис. 101 (такой структурой обладает минерал перовскит $CaTiO_3$, откуда и произошло название). Ввиду наличия центра симметрии титанат бария в неполярной фазе не обладает пьезоэлектрическими свойствами. В полярной области температур между точкой Кюри (120 °C) и температурой 5 °C кристаллы $BaTiO_3$ имеют *тетрагональную симметрию* и становятся пьезоэлектрическими. Фазовый переход при температуре 120 °C сводится к тому, что одно из ребер кубической ячейки удлиняется и становится *полярной тетрагональной осью симметрии*, обозначаемой через c, два других ребра одинаково укорачиваются, переходя в *тетрагональные оси*, обозначаемые через a. Какое из ребер исходной кубической ячейки удлинится и перейдет в полярную ось c — это дело случая. Однако если в результате флуктуации возникнет какое-то случайное удлинение, то оно определит *выделенное направление*, вдоль которого и будет происходить дальнейшее удлинение. Поскольку все три ребра кубической ячейки эквивалентны, каждое из них может перейти в полярную ось. В тетрагональной фазе существует, следовательно, *шесть* возможных направлений спонтанной поляризации — по два взаимно противоположных направления вдоль ребер

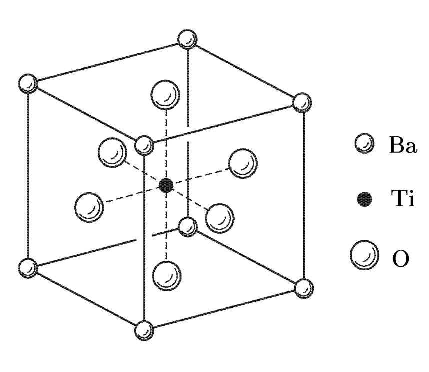


Рис. 101

кубической ячейки. Ниже 5 °C титанат бария испытывает второе *фазовое превращение.* Получается новая сегнетоэлектрическая фаза, устойчивая между 5 и −90 °C и обладающая *орторомбической симметрией.* Элементарная ячейка может быть получена из исходной кубической ячейки, если ее растянуть вдоль диагонали одной из граней куба и сжать вдоль другой диагонали той же грани. Растянутая диагональ служит полярной осью кристалла. Число граней — шесть, число их диагоналей — двенадцать. Однако эти диагонали попарно параллельны. Поэтому в орторомбической фазе существует *двенадцать направлений*, вдоль которых может ориентироваться вектор спонтанной поляризации кристалла. При −90 °C происходит третий фазовый переход. Кристалл становится *ромбоэдрическим* с полярной осью вдоль одной из пространственных диагоналей куба, т. е. диагоналей, соединяющих его противоположные вершины. Так как исходная кубическая ячейка содержит четыре эквивалентных пространственных диагонали и каждой диагонали соответствуют два взаимно противоположных направления спонтанной поляризации, то в ромбоэдрической фазе существует *восемь направлений*, в которых может ориентироваться вектор спонтанной поляризации.

4. Спонтанная поляризация сегнетоэлектрика $P_\text{с}$ меняется с температурой, обращаясь в нуль на границах полярной области. Для сегнетовой соли $P_\text{с}$ достигает максимума при 5 °C и составляет $P_\text{с} = 7{,}5 \cdot 10^2$ СГСЭ-ед. $= 2{,}5 \cdot 10^{-7}$ Кл/см^2. Для титаната бария спонтанная поляризация вдоль полярной оси на два порядка больше, при комнатной температуре она составляет $P_\text{с} = 7{,}8 \cdot 10^4$ СГСЭ-ед. $= 2{,}6 \cdot 10^{-5}$ Кл/см^2.

При наложении электрического поля поляризация сегнетоэлектрика меняется. В полярной фазе она складывается из спонтанной поляризации $\mathbf{P}_\text{с}$, не зависящей от поля $\mathbf{E}$, и индуцированной поляризации $\mathbf{P}_\text{и}$, вызванной этим полем. Связь между $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$ нелинейна, так что обычное определение поляризуемости α и диэлектрической проницаемости ε к сегнетоэлектрику в полярной фазе неприменимо. Только в слабых полях можно ограничиться линейным приближением, полагая $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\text{с} + \alpha\mathbf{E}$ или $\mathbf{P}_\text{и} = \alpha\mathbf{E}$. Таким образом, обычная связь между поляризацией и полем $\mathbf{P} = \alpha\mathbf{E}$ в случае сегнетоэлектриков в слабых полях относится не к полной, а к *индуцированной поляризации.* Коэффициент α и называется *поляризуемостью* (или *диэлектрической восприимчивостью*) сегнетоэлектрика. Из-за анизотропии кристалла поляризуемость α есть *тензор.* Для простоты мы будем пренебрегать анизотропией. Это можно делать, когда поле $\mathbf{E}$ параллельно одной из трех главных осей тензора α. В этом случае тензорные свойства величины α не проявляются и ее можно считать *скаляром.* В сильных полях поляризуемость α определяется производной $\alpha = \partial P_\text{и}/\partial E$ и зависит от напряженности поля. Диэлектрическая проницаемость, как всегда, связана с α соотношением $\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha$. Ниже, когда приводятся числовые значения ε и α, всегда предполагается, что эти величины измерены в слабых полях.

5. Одна из характерных особенностей сегнетоэлектриков состоит в том, что значения диэлектрической проницаемости в полярной фазе *аномально велики.* Для сегнетовой соли в максимуме $\varepsilon \approx 10\,000$, для титаната бария $\varepsilon_{\text{макс}} \approx 6000$–$7000$.

В неполярной фазе сегнетоэлектрик ведет себя как обычный *линейный диэлектрик*, в котором поляризация пропорциональна электрическому полю. Однако поляризуемость α и диэлектрическая проницаемость ε меняются с температурой. Вблизи точки Кюри имеет место *закон Кюри–Вейсса* (1865–1940), т. е. соотношение

$$\alpha = \frac{C}{T - T_0}, \tag{39.1}$$

где C и T_0 — постоянные, из которых T_0 называется *температурой Кюри–Вейсса.* Она очень мало отличается от температуры Кюри $T_К$, при которой происходит фазовый переход из полярной фазы в неполярную (или обратно); этим различием обычно пренебрегают. Если точек Кюри две, то в окрестности каждой из них в неполярной фазе выполняется *закон Кюри–Вейсса*: вблизи верхней точки — в прежней форме (39.1), вблизи нижней — в форме

$$\alpha = \frac{C'}{T_0 - T} \tag{39.2}$$

(конечно, с другими постоянными C' и T_0). Мы видим, что и в неполярной фазе в окрестности точки Кюри величины ε и α также аномально велики.

На рис. 102 представлена температурная зависимость диэлектрической проницаемости ε_a монокристалла сегнетовой соли вдоль полярной

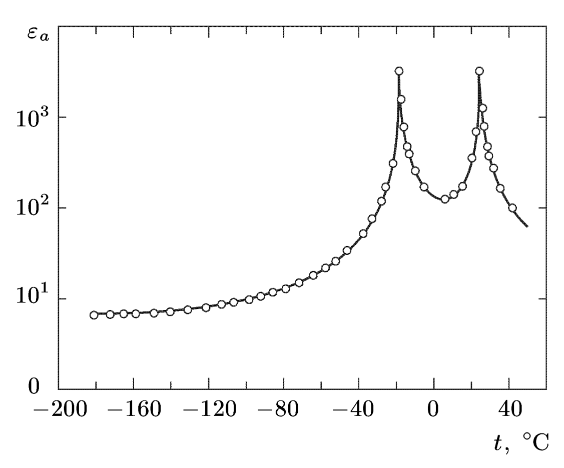


Рис. 102

оси a (по измерениям Хаблютцеля). Аналогичная кривая для титаната бария (по измерениям Мерца) представлена на рис. 103. У титаната

бария в тетрагональной фазе два главных значения диэлектрической проницаемости: ε_c вдоль полярной оси и ε_a вдоль перпендикулярной к ней оси. Они и приведены на графике для однодоменного кристалла

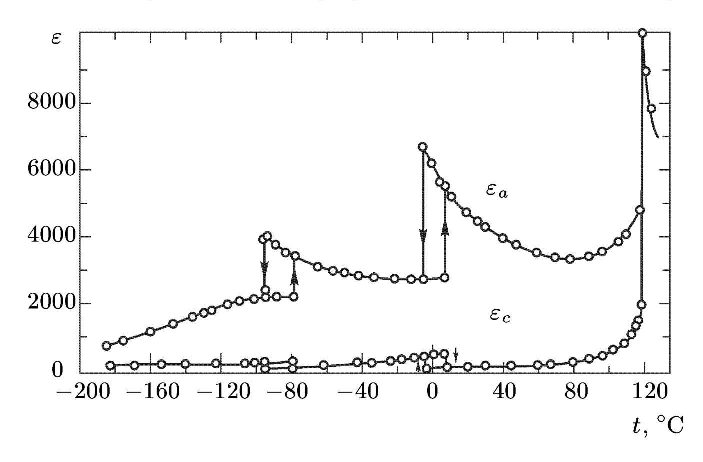


Рис. 103

(см. ниже). В орторомбической и тетрагональной фазах ε измерена в тех же направлениях. В этих фазах кристалл разделяется на *домены* (см. ниже). С разделением на домены связано то обстоятельство, что кривые, снятые при возрастании и убывании электрического поля, в окрестности точек фазовых превращений не совпадают между собой.

6. Спонтанно поляризованный сегнетоэлектрик в полярной области температур должен обладать *большей устойчивостью*, чем тот же сегнетоэлектрик в неполяризованном состоянии. В противном случае в этой области температур должен был бы происходить самопроизвольный переход сегнетоэлектрика в неполяризованную фазу, чего на самом деле не происходит. Поэтому к проблеме сегнетоэлектричества применимы *общие принципы термодинамического равновесия* — условия минимума энергии или какой-либо другой термодинамической функции в зависимости от того, какие термодинамические параметры поддерживаются постоянными. Из этих принципов следует, что уже в отсутствие внешнего электрического поля сегнетоэлектрик, если только размеры его достаточно велики, должен *самопроизвольно* делиться на области с различными направлениями вектора поляризации, называемые *доменами* (точнее, *диэлектрическими доменами*). Действительно, поляризованный кристалл создает электрическое поле не только внутри, но и во внешнем пространстве. Внешнему полю соответствует определенная электрическая энергия. Полная энергия кристалла складывается из трех частей: 1) суммы внутренних энергий всех доменов; 2) энергии внешнего электрического поля; 3) поверхностной энергии на границах раздела доменов. Энергия внешнего электрического поля максимальна, когда кристалл по всему объему поляризован *однородно*. Поэтому

деление на домены может оказаться «энергетически выгодным», т. е. сопровождаться уменьшением полной энергии. Однако процесс деления сопровождается увеличением поверхностной энергии. Он прекратится, когда полная энергия достигнет минимума.

Если сегнетоэлектрик имеет *одну полярную ось*, то возможны только два взаимно противоположных направления поляризации доменов, параллельные этой оси. Такие сегнетоэлектрики имеют *слоистую доменную структуру.* В сегнетоэлектриках с *несколькими полярными осями* доменная структура более разнообразна. Число возможных направлений поляризации доменов в таких кристаллах вдвое больше числа полярных осей.

Экспериментальные доказательства доменной структуры сегнетоэлектриков сначала были косвенными. Прямое доказательство дали наблюдения кристаллов сегнетоэлектрика в *поляризованном свете.* Другой метод основан на *травлении* поверхности сегнетоэлектрика. Например, положительный край домена $BaTiO_3$ при травлении кислотой разрушается сильнее, чем отрицательный.

7. Благодаря доменной структуре дипольный момент кристалла сегнетоэлектрика в отсутствие внешнего электрического поля равен нулю, так как поляризация одних доменов компенсируется противоположно направленной поляризацией других. В этом смысле такой кристалл не поляризован. При наложении электрического поля происходит частичная переориентация доменов, а также рост одних доменов за счет других. Это ведет к появлению в кристалле поляризации $\mathbf{P}$. Зависимость P от напряженности электрического поля E представлена на рис. 104. Сначала рост P происходит вдоль кривой OA. В точке A поляризация всех доменов оказывается ориентированной вдоль поля $\mathbf{E}$. Начиная с этой точки, дальнейшее возрастание P происходит за счет индуцированной поляризации $\mathbf{P}_и = \alpha\mathbf{E}$, и кривая OA переходит в прямолинейный участок AD. Если этот участок продолжить влево, то он отсечет на оси ординат отрезок OC, длина которого равна спонтанной поляризации $P_с$.

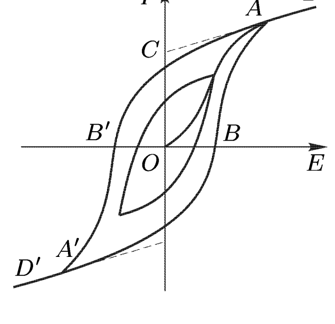


Рис. 104

Будем теперь уменьшать напряженность электрического поля. Оказывается, что изменение поляризации P пойдет не по прежней кривой DAO, а по новой кривой $DAB'A'D'$, расположенной выше. Это явление называется *диэлектрическим гистерезисом* и связано с *доменной структурой диэлектрика*: процесс переориентации и роста доменов в электрическом поле задерживается, напоминая известное явление застоя, обусловленное силами сухого трения (см. т. I, § 17). Таким образом, поляризация $\mathbf{P}$ не определяется однозначно полем $\mathbf{E}$, а зависит также

от *предшествующей истории* сегнетоэлектрика. Если менять электрическое поле в обратном порядке, то зависимость P от E изобразится нижней кривой $D'A'BAD$, симметричной с кривой $D'A'B'AD$ относительно начала координат O. Таким образом, получается замкнутая кривая $AB'A'BA$, называемая *диэлектрической петлей гистерезиса.* Можно получить петли гистерезиса меньших размеров, одна из которых изображена на рис. 104. Совершенно аналогичные петли гистерезиса получатся, если по оси ординат откладывать индукцию $D = E + 4\pi P$. Они практически не отличаются (точнее, отличаются только масштабом) от кривых $P = P(E)$, так как в сегнетоэлектриках $E \ll D$ и слагаемым E можно пренебречь.

8. Петлю гистерезиса легко воспроизвести на осциллографе. С этой целью два конденсатора C_0 и C_x соединяются последовательно и питаются переменным током от одного и того же генератора (рис. 105).

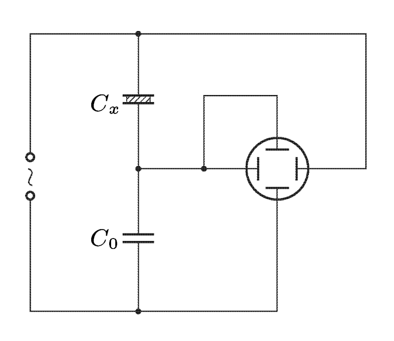


Рис. 105

Конденсатор C_0 заполнен обычным «линейным» диэлектриком с постоянной диэлектрической проницаемостью ε_0, а конденсатор C_x — сегнетоэлектриком. Ясно, что напряжение на конденсаторе C_x пропорционально полю E в сегнетоэлектрике. Поскольку конденсаторы соединены последовательно, они имеют одинаковые заряды, а следовательно, и одинаковые индукции: $D_0 = D$. А так как величина ε_0 постоянна, то напряжение на конденсаторе C_0 будет пропорционально индукции $D_0 = D$. Если подать на горизонтально отклоняющие пластины осциллографа напряжение с конденсатора C_x, а на вертикально отклоняющие — с конденсатора C_0, то на экране осциллографа будет воспроизведена зависимость $D = D(E)$, т. е. петля гистерезиса.

9. Мы не будем излагать микроскопические теории явления сегнетоэлектричества, которые еще далеки до окончательного завершения. Ограничимся только следующим замечанием. Предположим, что к диэлектрику с индуцированными диполями применимо выражение для действующего поля $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + a\mathbf{P}$, где a — постоянная. (Для кубических кристаллов, построенных из точечных изотропных атомов, согласно Лоренцу, $a = 4\pi/3$, см. § 35.) Пусть β — поляризуемость молекулы, а N — число молекул в единице объема. Тогда $N\beta\mathbf{E}' = \mathbf{P} = N\beta\mathbf{E} + Na\beta\mathbf{P}$, или

$$(1 - Na\beta)\mathbf{P} = N\beta\mathbf{E}.$$

Если $Na\beta = 1$, то при $\mathbf{E} = 0$ это уравнение имеет два решения: 1) $P = 0$; 2) $P \neq 0$. Из соответствующих им двух состояний в действительности реализуется то, которое термодинамически более устойчиво. Пусть таковым является второе состояние. Тогда диэлектрик будет

поляризован спонтанно: если сначала $\mathbf{P} = 0$, то всякая флуктуация поляризации $\mathbf{P}$ переведет диэлектрик в более устойчивое состояние, в котором $\mathbf{P} \neq 0$. Величина $Na\beta$ зависит от температуры (хотя бы из-за теплового расширения диэлектрика). Условие $Na\beta = 1$ определяет положение точки Кюри. В окрестности этой точки поляризуемость диэлектрика $\alpha = N\beta/(1 - Na\beta)$ будет аномально велика. Разлагая знаменатель $1 - Na\beta$ в ряд по степеням $T - T_\text{K}$ и ограничиваясь при этом линейным членом, придем к соотношению $\alpha = \text{const}/(T - T_\text{K})$, т. е. к закону Кюри–Вейсса. На этот пример нельзя смотреть как на «теорию сегнетоэлектричества». Он указывает лишь на *принципиальную возможность* объяснения спонтанной поляризации и связанной с ней аномально большой величины ε в окрестности точки Кюри.

10. Более определенными по сравнению с молекулярными теориями сегнетоэлектричества являются *термодинамические теории.* Точнее их следовало бы назвать *феноменологическими теориями*, поскольку наряду с термодинамикой в их основе лежат некоторые предположения феноменологического характера. Феноменологические теории, разумеется, не разъясняют физическую природу явления сегнетоэлектричества. Они позволяют только установить связь между различными физическими величинами, характеризующими сегнетоэлектрики. Одним из пионеров в создании термодинамической теории сегнетоэлектричества был В.Л. Гинзбург (р. 1916). Ниже приводится краткое изложение теории Гинзбурга.

Термодинамическое соотношение для равновесных процессов в диэлектрике при наличии электрического поля E запишем в виде

$$dU = T\,dS - \mathscr{P} dV + E\,dP. \tag{39.3}$$

(Мы пренебрегаем анизотропией диэлектрика и предполагаем, что механических напряжений нет. Вместо $E\,dP$ можно было бы писать $E\,dD/4\pi$, как это подробно было разъяснено в § 31.) Если ввести термодинамический потенциал $\Phi = U - TS + PV - EP$, то это соотношение перейдет в

$$d\Phi = -S\,dT + V\,d\mathscr{P} - P\,dE. \tag{39.4}$$

Независимыми переменными, от которых зависит функция Φ, являются температура T, давление $\mathscr{P}$ и напряженность электрического поля E. Заданием этих величин определяются все прочие внутренние параметры, характеризующие диэлектрик в состоянии термодинамического равновесия. Однако для наших целей необходимо ввести некоторые отклонения от термодинамического равновесия и принять, что поляризация P может меняться *независимо.* Тогда процесс становится *неравновесным* и в соотношении (39.3) вместо знака равенства надо поставить знак $\leqslant 0$. Равенство (39.4) при этом перейдет в неравенство

$$d\Phi \leqslant -S\,dT + V\,d\mathscr{P} - P\,dE.$$

Если величины T, $\mathscr{P}$, E постоянны, то $d\Phi \leqslant 0$. Отсюда следует, что *в состоянии термодинамического равновесия термодинамический потенциал минимален (при условии, что T, $\mathscr{P}$, E поддерживаются постоянными).* Из условия минимума Φ и найдется равновесное значение поляризации P.

11. После этого термодинамического отступления перейдем к изложению теории Гинзбурга. Основным в теории Гинзбурга является предположение, что *переход из полярной фазы сегнетоэлектрика в неполярную (или обратно) есть фазовый переход второго рода или близкий к нему переход первого*

рода (см. т. II, § 120). Гинзбург применил к сегнетоэлектрикам основные положения теории фазовых переходов второго рода, развитой Л.Д. Ландау (1908–1968). Допустим сначала, что электрического поля нет ($E = 0$). В полярной фазе $P \neq 0$, в неполярной $P = 0$. Допустим, что в точке Кюри поляризация P меняется непрерывно с температурой и что в окрестности этой точки термодинамический потенциал Φ можно разложить в степенной ряд по P. Это допущение является слабым пунктом теории Гинзбурга, как и аналогичное допущение в общей теории фазовых переходов второго рода Ландау. Но если разложение возможно, то оно должно содержать только четные степени P, так как при изменении направления вектора $\mathbf{P}$ на противоположное в отсутствие электрического поля потенциал Φ не должен меняться. Имея это в виду и оборвав разложение на четных степенях, напишем

$$\Phi = \Phi_0 + AP^2 + \frac{1}{2}BP^4, \tag{39.5}$$

где Φ_0, A, B — функции температуры и давления. Равновесная поляризация P найдется из условия минимума Φ. Это приводит к соотношениям

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P} = 2(AP + BP^3) = 0, \tag{39.6}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial P^2} = 2(A + 3BP^2) > 0. \tag{39.7}$$

Уравнение (39.6) имеет два решения:

1-е решение

$$P = 0 \quad (T \geqslant T_{\text{К}}); \tag{39.8}$$

2-е решение

$$P^2 = -A/B \quad (T < T_{\text{К}}). \tag{39.9}$$

Первое решение относится к неполярной фазе ($T \geqslant T_{\text{К}}$), второе — к полярной ($T \leqslant T_{\text{К}}$). В точке Кюри $P = 0$, а потому коэффициент A должен обращаться в нуль: $A(T_{\text{К}}) = 0$. В неполярной фазе ($T \geqslant T_{\text{К}}$) решение $P = 0$ должно удовлетворять условию (39.7), а потому при $T > T_{\text{К}}$ должно быть $A > 0$. В полярной фазе ($T < T_{\text{К}}$) то же решение ($P = 0$) условию минимума не удовлетворяет, и $A < 0$, а $B > 0$, как это следует из условия (39.7), в котором P^2 — существенно положительная величина. Таким образом, в окрестности точки Кюри A является возрастающей функцией температуры: $(\partial A/\partial T)_{T-T_{\text{К}}} > 0$. В близкой окрестности точки Кюри величину A можно аппроксимировать выражением $A = (\partial A/\partial T)_{T_{\text{К}}}(T - T_{\text{К}})$, а зависимостью B от температуры — пренебречь. Тогда (39.9) приводит к соотношению

$$P^2 = \text{const}\left(\frac{\partial A/\partial T}{B}\right)_{T_{\text{К}}}(T_{\text{К}} - T) \quad (T \leqslant T_{\text{К}}). \tag{39.10}$$

12. Энтропия сегнетоэлектрика согласно формуле (39.4) определяется выражением

$$S = -\frac{\partial \Phi}{\partial T} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial T} - P^2\frac{\partial A}{\partial T} - A\frac{\partial P^2}{\partial T} - \frac{P^4}{2}\frac{\partial B}{\partial T} - \frac{B}{2}\frac{\partial P^4}{\partial T}.$$

В точке Кюри все слагаемые, за исключением $\partial \Phi_0/\partial T$, обращаются в нуль. Значит, при фазовом переходе изменения энтропии не происходит, а следовательно, не выделяется скрытая теплота, как это и должно быть для фазовых переходов второго рода. Зато имеет место скачок теплоемкости.

Действительно, теплоемкость в точке Кюри в неполярной фазе

$$c_{\mathscr{P}}^{\text{непол}} = T\frac{\partial S}{\partial T} = -T\left(\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial T^2}\right)_{\text{К}},$$

а в полярной

$$c_{\mathscr{P}}^{\text{пол}} = -T\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial T^2} - 2T\frac{\partial P^2}{\partial T}\,\frac{\partial A}{\partial T} = -\left(T\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial T^2}\right)_{\text{К}} + 2\left[\frac{T}{B}\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)^2\right]_{\text{К}}.$$

Отсюда

$$\Delta c_{\mathscr{P}} = c_{\mathscr{P}}^{\text{пол}} - c_{\mathscr{P}}^{\text{непол}} = 2\left[\frac{T}{B}\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{\mathscr{P}}^2\right]_{\text{К}}. \tag{39.11}$$

Исключая из формул (39.10) и (39.11) величину B, для спонтанной поляризации $P_{\text{сп}}$ получаем

$$P_{\text{сп}}^2 = \frac{\Delta c_{\mathscr{P}}}{2\left[T\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{\mathscr{P}}\right]_{\text{К}}}(T - T_{\text{К}}). \tag{39.12}$$

Это соотношение допускает экспериментальную проверку, так как все входящие в него величины могут быть независимо измерены на опыте: $\Delta c_{\mathscr{P}}$ определяется калориметрически, $P_{\text{сп}}$ находим по заряду конденсатора с сегнетоэлектриком, $(\partial A/\partial T)_{\mathscr{P}}$ — по значению диэлектрической проницаемости ε.

13. Перейдем теперь к вычислению поляризуемости α (или диэлектрической проницаемости $\varepsilon = 1+4\pi\alpha$ в слабых электрических полях. С этой целью прежде всего введем новую термодинамическую функцию $\Omega = \Phi + EP$. Для нее, как это непосредственно следует из (39.4),

$$d\Omega = -S\,dT + V\,d\mathscr{P} + E\,dP. \tag{39.13}$$

Принимая за независимые переменные T, $\mathscr{P}$ и P, отсюда получаем

$$E = \frac{\partial \Omega}{\partial P} \equiv \left(\frac{\partial \Omega}{\partial P}\right)_{T,\mathscr{P}}. \tag{39.14}$$

Вблизи точки Кюри, как это видно из (39.5),

$$\Omega = \Phi_0 + AP^2 + \frac{1}{2}BP^4. \tag{39.15}$$

Так как Φ_0, A, B — функции только температуры и давления, то

$$E = 2(AP + BP^3).$$

Выше точки Кюри ($T > T_{\text{К}}$) членом BP^3 можно пренебречь. Тогда получается линейная связь между P и E с поляризуемостью $\alpha = 1/(2A)$, или после замены A на $(\partial A/\partial T)_{\text{К}}(T - T_{\text{К}})$

$$\alpha^{\text{непол}} = \frac{1}{2(\partial A/\partial T)_{\text{К}}(T - T_{\text{К}})} \qquad (T > T_{\text{К}}). \tag{39.16}$$

Ниже точки Кюри поляризуемость α определяется производной:

$$\alpha = \frac{\partial P}{\partial E} = \frac{1}{2(A + 3BP^2)}.$$

В этом выражении можно пренебречь индуцированной поляризацией, полагая $P = P_c$. Тогда, ввиду формулы (39.10), получится

$$\alpha^{\text{пол}} = \frac{1}{4(\partial A/\partial T)_{\text{К}}(T_{\text{К}} - T)} \qquad (T < T_{\text{К}}). \tag{39.17}$$

Мы видим, что на одинаковых расстояниях от точки Кюри $\alpha^{\text{непол}} = 2\alpha^{\text{пол}}$.

14. В заключение скажем несколько слов об *антисегнетоэлектричестве.* Это явление имеет ту же физическую природу, что и сегнетоэлектричество, и состоит в следующем. В некоторых кристаллах в определенной области температур рядом стоящие ионы одинакового типа самопроизвольно ориентируются не параллельно друг другу, а *антипараллельно.* Такие кристаллы называются *антисегнетоэлектрическими.* Антисегнетоэлектрик можно представить себе в виде вставленных друг в друга подрешеток, причем в одной подрешетке все дипольные моменты ионов параллельно ориентированы в одном, а в другой — в противоположном направлениях, так что дипольный момент всего кристалла равен нулю. Переход от упорядоченного расположения ионов к неупорядоченному происходит в *антисегнетоэлектрической точке Кюри*: упорядоченная ориентация наблюдается обычно ниже, а неупорядоченная — выше этой точки. В самой точке Кюри наблюдается максимум диэлектрической проницаемости, величина которого меньше, чем у многих сегнетоэлектриков. При наложении электрического поля возникает электрическая поляризация $\mathbf{P}$. Поскольку в отсутствие поля $\mathbf{P} = 0$, в слабых полях зависимость $\mathbf{P}$ от $\mathbf{E}$ практически линейна. Однако, если поле достаточно сильное, антисегнетоэлектрик может перейти в *сегнетоэлектрическое состояние.* При таких «вынужденных» фазовых переходах в сильных полях наблюдаются *двойные петли гистерезиса* (рис. 106).

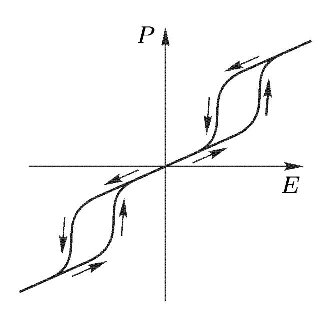


Рис. 106

Глава II
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

§ 40. Плотность тока. Закон сохранения электрического заряда

1. Электрический ток есть *упорядоченное движение электрических зарядов.* Эти заряды в учении о токах называются *носителями тока.* В металлах и полупроводниках носителями тока являются *электроны*, в электролитах и ионизационных газах — *положительные* и *отрицательные ионы.*

Рассмотрим сначала простейший случай, когда все носители тока одинаковы (например, электроны в металлах). Выделим мысленно в среде, по которой течет ток, произвольный физически бесконечно малый объем и обозначим через $\mathbf{u}$ средний вектор скорости рассматриваемых носителей в этом объеме. Его называют *средней*, *дрейфовой* или *упорядоченной* скоростью движения носителей тока. Обозначим, далее, через n *концентрацию носителей тока*, т. е. число их в единице объема. Проведем бесконечно малую площадку dS, перпендикулярную к скорости $\mathbf{u}$. Построим на ней бесконечно короткий прямой цилиндр с высотой $u\,dt$, как указано на рис. 107 *а*. Все частицы, заключенные внутри этого цилиндра, за время dt пройдут через площадку dS, перенеся через нее в направлении скорости $\mathbf{u}$ электрический заряд $dq = neu\,dS\,dt$, где e —

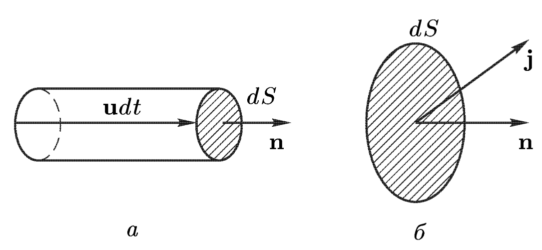


Рис. 107

заряд отдельной частицы. Таким образом, через единицу площади за единицу времени переносится электрический заряд $j = neu$. Вектор

$$\mathbf{j} = ne\mathbf{u} \tag{40.1}$$

называется *плотностью электрического тока.*

Скаляр j есть заряд, переносимый в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к току. Направление же вектора $\mathbf{j}$ совпадает с направлением упорядоченного течения положительного электричества.

В случае нескольких типов зарядов, создающих ток, плотность тока определяется выражением

$$\mathbf{j} = \sum_i n_i e_i \mathbf{u}_i, \tag{40.2}$$

где суммирование ведется по всем типам носителей тока (n_i, e_i, $\mathbf{u}_i$ означают концентрацию, заряд и упорядоченную скорость i-го носителя).

Установим произвольно положительное направление нормали к площадке dS и проведем в этом направлении единичный вектор $\mathbf{n}$. Если частицы положительные, то переносимый заряд в направлении нормали $\mathbf{n}$ будет положительным или отрицательным в зависимости от того, движутся ли частицы в направлении вектора $\mathbf{n}$ или в противоположном направлении. Для отрицательных частиц соотношение будет обратным. Вообще, количество переносимого в единицу времени электричества можно записать в виде

$$dq = (\mathbf{j}\,\mathbf{n})\,dS = j_n\,dS. \tag{40.3}$$

Последняя формула остается верной и в том случае, когда площадка dS не перпендикулярна к вектору $\mathbf{j}$ (рис. 107 *б*). Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что составляющая вектора $\mathbf{j}$, перпендикулярная к вектору $\mathbf{n}$, через площадку dS электричества не переносит.

2. Одним из фундаментальных физических законов является *закон сохранения электрического заряда* (см. § 2). Выразим его математически через макроскопические величины: плотность заряда ρ и плотность электрического тока $\mathbf{j}$. Возьмем в среде произвольную замкнутую поверхность S, ограничивающую объем V (рис. 108). Количество электричества, ежесекундно вытекающее из объема V через поверхность S, представляется интегралом $\oint j_n\,dS$. Ту же величину можно представить в виде $-\partial q/\partial t$, где q — заряд, содержащийся в объеме V. Приравнивая оба выражения, получим

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\oint_S j_n\,dS. \tag{40.4}$$

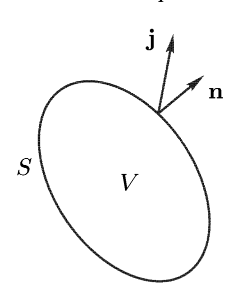


Рис. 108

(Мы употребляем символ частной производной $\partial/\partial t$, чтобы подчеркнуть, что поверхность S должна оставаться неподвижной.) Представив q в виде $q = \int \rho\,dV$ и преобразовав поверхностный интеграл в объемный $\int \operatorname{div}\mathbf{j}\,dV$, придем к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\,dV = -\int \operatorname{div}\mathbf{j}\,dV.$$

Это соотношение должно выполняться для произвольного объема V, а потому

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0. \tag{40.5}$$

Формулы (40.4), (40.5) и выражают *закон сохранения заряда в макроскопической электродинамике.* Последняя формула называется также *уравнением непрерывности* или *уравнением неразрывности.* Эти формулы входят в систему основных уравнений Максвелла, хотя и в неявном виде.

Если токи *стационарны*, т. е. не зависят от времени, то формулы (40.4) и (40.5) переходят в

$$\oint j_n \, dS = 0, \tag{40.6}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \tag{40.7}$$

В настоящей главе рассматриваются в основном стационарные (постоянные) токи.

§ 41. Закон Ома

1. Одним из главных способов возбуждения электрического тока в телах является создание и поддержание в них электрического поля. Как показывает опыт, для многих тел (например, металлов) в широких пределах плотность электрического тока $\mathbf{j}$ пропорциональна напряженности электрического поля $\mathbf{E}$. Это — один из важнейших, хотя и не фундаментальных, законов электродинамики. Он называется *законом Ома* (1787–1854). Математически закон Ома выражается формулой

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}, \tag{41.1}$$

где λ — постоянная для данного материала величина, называемая его *удельной электрической проводимостью.* Она зависит от физического состояния тела (температуры, давления и пр.). Строго говоря, закон Ома справедлив лишь для *физически однородных* тел. Величина, обратная электрической проводимости, называется *удельным сопротивлением материала*:

$$\rho = 1/\lambda. \tag{41.2}$$

В гауссовой (а следовательно, и в электростатической) системе единиц электрическая проводимость λ имеет размерность, обратную времени. Ее единица есть *обратная секунда* (с^{-1}). Удельное сопротивление ρ измеряется в *секундах* (с). Разумеется, совпадение размерностей удельного сопротивления и времени не означает, что эти величины по своей физической природе тождественны. Такое совпадение имеет место только в гауссовой и СГСЭ-системах единиц. В других системах эти величины имеют разные размерности (см. § 44).

2. Если ток стационарный, то объемная плотность электричества в однородном проводнике равна нулю. Действительно, для стационарных токов справедливо уравнение (40.7). Перепишем его в виде $\operatorname{div} \lambda \mathbf{E} = 0$ или $\operatorname{div} \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \mathbf{D}\right) = 0$. Так как среда по предположению однородна, то $\lambda = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const}$ и рассматриваемое уравнение

сводится к виду $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$. Отсюда с учетом теоремы Гаусса (13.5) находим $\rho = 0$.

Таким образом, *в случае стационарных токов макроскопические электрические заряды могут находиться только на поверхности или в местах неоднородности проводящей среды.* В этом отношении электрическое поле стационарных токов аналогично электростатическому. Аналогия между этими полями идет еще дальше. Если точки стационарны, то плотность электрических зарядов в каждой точке пространства не меняется во времени, хотя и происходит движение электричества: на место уходящих электрических зарядов непрерывно поступают новые. Такие заряды, как показывает опыт (а также уравнения Максвелла), создают в окружающем пространстве такое же кулоновское электрическое поле, что и неподвижные заряды той же плотности. Отсюда следует, что *электрическое поле стационарных токов есть поле потенциальное.*

Тем не менее электрическое поле стационарных токов существенно отличается от электростатического. Электростатическое поле есть кулоновское поле неподвижных зарядов. Внутри проводников при равновесии зарядов оно равно нулю. Электрическое поле стационарных токов есть также *кулоновское поле*, однако заряды, его возбуждающие, находятся в движении. Поэтому поле стационарных токов существует и внутри проводников. Если бы это было не так, то в проводниках не было бы и электрических токов, как это следует из закона Ома (41.1). Силовые линии электростатического поля всегда нормальны к поверхности проводника. Для электрического поля стационарных токов это не обязательно (см. задачу 1 к этому параграфу).

ЗАДАЧИ

1. Параллельные длинные однородные пластинки AB и CD (рис. 109) сделаны из материала, плохо проводящего электричество (например, из дерева). Боковые края их A и C накоротко соединены хорошим проводником (например, металлом), а между краями B и D поддерживается постоянное напряжение V. Найти напряженность электрического поля и форму электрических силовых линий между пластинками, пренебрегая краевыми эффектами. Расстояние между пластинками равно d, а ширина каждой из них $AB = CD = h$.

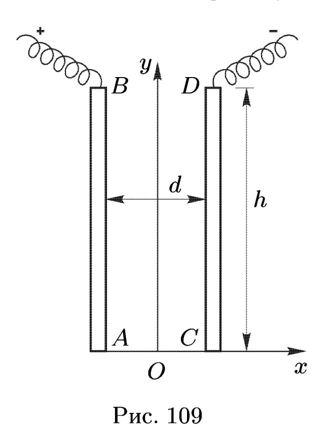


Рис. 109

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рис. 109 (ось z перпендикулярна к плоскости рисунка и параллельна длинным сторонам пластинок). Искомое поле потенциально и удовлетворяет уравнению Лапласа $\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 = 0$. На проводнике AC (т. е. при $y = 0$) потенциал должен обращаться в постоянную, которую мы примем равной нулю. Искомое решение будет $\varphi = \alpha xy + \beta y$, где α и β — постоянные. В силу симметрии потенциал φ должен менять знак при замене x на $-x$, а потому $\beta = 0$.

Для напряженности поля получаем

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\alpha y, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\alpha x.$$

Постоянная α найдется по разности потенциалов между точками A и B (или между точками C и D). Потенциалы точек B и D равны соответственно $\varphi_B = +V/2$, $\varphi_D = -V/2$. Напряженность поля E_y на поверхности пластины AB (т. е. при $x = -d/2$) будет $E_y = -V/(2h) = \alpha d/2$, откуда $\alpha = -V/(hd)$. Окончательно

$$E_x = \frac{Vy}{hd}, \quad E_y = \frac{Vx}{hd}.$$

Уравнение силовой линии $dx/E_x = dy/E_y$ имеет вид

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x},$$

откуда $y^2 - x^2 = K$, т. е. силовыми линиями являются равносторонние гиперболы. При $K > 0$ оси гипербол совпадают с осью y, при $K < 0$ — с осью x. Для выяснения смысла постоянной K обозначим через a расстояние от вершины гиперболы до начала координат. При $K > 0$ координатами вершины гиперболы будут $(0, a)$. Они должны удовлетворять уравнению $a^2 - 0^2 = K$, откуда $K = a^2$. Аналогично, для второго случая $(K < 0)$ $K = -a^2$. Таким образом, получаются два семейства гипербол: $y^2 - x^2 = a^2$ и $x^2 - y^2 = a^2$, асимптотами которых являются биссектрисы соответствующих координатных углов (рис. 110). Гиперболические силовые линии первого семейства легко воспроизводятся экспериментально обычным методом, описанным в § 3. Силовые линии второго семейства экспериментально получить трудно из-за малости составляющей поля E_x.

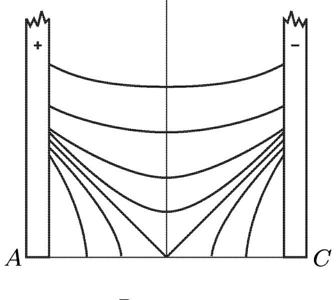


Рис. 110

2. Пространство между пластинами слоистого плоского конденсатора заполнено многослойным диэлектриком, обладающим слабой электрической проводимостью. Диэлектрическая проницаемость и электропроводность изменяются от $\varepsilon_1 = 4$, $\lambda_1 = 10^{-9}$ Ом$^{-1}$ · см$^{-1}$ на одной поверхности диэлектрика до $\varepsilon_2 = 3$, $\lambda_2 = 10^{-12}$ Ом$^{-1}$ · см$^{-1}$ на другой его поверхности. Конденсатор включен в цепь батареи постоянной электродвижущей силы. Определить величину и знак суммарного свободного заряда q, который возникает в диэлектрике, когда в цепи установится постоянный электрический ток $I = 10^{-7}$ А, текущий через диэлектрик в направлении от стороны *1* к стороне *2*.

Ответ. $q = \dfrac{I}{4\pi}\left(\dfrac{\varepsilon_2}{\lambda_2} - \dfrac{\varepsilon_1}{\lambda_1}\right) = 78$ СГСЭ-ед. $= 2{,}6 \cdot 10^{-8}$ Кл.

3. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено двумя однородными слабо проводящими слоями диэлектрика с толщинами h_1 и h_2. Диэлектрическая проницаемость и электрическая проводимость первого диэлектрика равны соответственно ε_1 и λ_1, второго — ε_2 и λ_2. Найти

плотность поверхностных свободных зарядов σ на границе между диэлектриками, которая установится при наложении на конденсатор постоянного напряжения V.

Ответ. $\sigma = \dfrac{V}{4\pi} \dfrac{\varepsilon_2 \lambda_1 - \varepsilon_1 \lambda_2}{h_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_1}$.

§ 42. Вывод законов Ома и Джоуля–Ленца

1. Будем предполагать в этом параграфе, что электрическое поле $\mathbf{E}$ может меняться во времени. Рассмотрим сначала металлы, хотя наши рассуждения в основном справедливы и в случае других проводящих сред (электролитов, ионизованных газов и пр.). В металлах носителями тока служат *«свободные электроны»*, т. е. электроны, сравнительно слабо связанные с ионами кристаллической решетки, внутри которой они могут свободно перемещаться. Прямое доказательство этого утверждения дают классические опыты Р. Толмена (1881–1948) и Б. Стюарта (1828–1887) (см. § 97). В отсутствие электрического поля или других регулярных сил, действующих на электроны, все направления движения последних равновероятны. В этом отношении движение электронов в металле напоминает тепловое движение молекул газа. Назовем такое движение *беспорядочным*, а соответствующую ему скорость электронов будем обозначать через $\mathbf{v}_б$. Для последующих рассуждений не имеет значения, является ли беспорядочное движение электронов тепловым или нетепловым (см. т. II, § 4, п. 3).

2. При наличии регулярной силы на беспорядочное движение электронов накладывается систематическое — *дрейфовое* — движение. Если поле регулярных сил однородно, то все свободные электроны движутся с одной и той же *дрейфовой скоростью*, обозначаемой ниже через $\mathbf{w}_д$ или $\mathbf{u}$. Полная скорость электрона $\mathbf{v}$ складывается из беспорядочной $\mathbf{v}_б$ и дрейфовой $\mathbf{u}$: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_б + \mathbf{u}$. Движение электрона в классической механике описывается уравнением

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv m\frac{d}{dt}\,(\mathbf{v}_б + \mathbf{u}) = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{ст}, \tag{42.1}$$

где $\mathbf{F}$ — регулярная сила, действующая на электрон со стороны внешнего силового поля, а $\mathbf{F}_{ст}$ — сила, которую он испытывает при столкновениях с ионами или другими электронами. Если уравнение (42.1) усреднить по всем электронам, то производная $d\mathbf{v}_б/dt$ обратится в нуль, а сила $\mathbf{F}_{ст}$ заменится ее средним значением $\langle \mathbf{F}_{ст} \rangle$. Заметим, что при таком усреднении столкновения между электронами можно не принимать во внимание, так как они (столкновения) не влияют на импульс $\sum m\mathbf{v} \equiv \sum m(\mathbf{v}_б + \mathbf{u})$ всей системы электронов, который только и входит в вычисление среднего значения скорости $\mathbf{v}$. Таким образом, под $\mathbf{F}_{ст}$ следует понимать силы, действующие на электроны при их столкновениях только с ионами кристаллической решетки. При отсутствии дрейфового движения средняя сила $\mathbf{F}_{ст}$ обращается в нуль. При наличии дрейфового движения этого происходить не будет. При малых дрейфовых скоростях величину $\mathbf{F}_{ст}$ можно разложить по степеням u

и ограничиться при этом линейным членом:

$$\mathbf{F}_{\text{ст}} = -m\frac{\mathbf{u}}{\tau_{\text{ин}}}, \qquad (42.2)$$

где $\tau_{\text{ин}}$ — постоянная, имеющая размерность времени. В этом приближении уравнение для дрейфового движения электрона принимает вид

$$m\frac{d\mathbf{u}}{dt} + m\frac{\mathbf{u}}{\tau_{\text{ин}}} = \mathbf{F}. \qquad (42.3)$$

Сила $\mathbf{F}_{\text{ст}}$, а с ней и время $\tau_{\text{ин}}$ обусловлены инерцией электронов. Поэтому величину $\tau_{\text{ин}}$ можно назвать *инерционным временем* электрона в металле. Конкретное представление о времени $\tau_{\text{ин}}$ дает следующий пример. Предположим, что $\mathbf{F} = 0$ и что в начальный момент времени $t = 0$ электроны совершают дрейфовое движение со скоростью $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$. Тогда из уравнения (42.3) получаем

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{-t/\tau_{\text{ин}}}, \qquad (42.4)$$

т. е. в отсутствие внешних регулярных сил дрейфовое движение экспоненциально затухает во времени таким образом, что за время $\tau_{\text{ин}}$ скорость u убывает в e раз.

Воспользовавшись соотношением $\mathbf{j} = ne\mathbf{u}$ и введя обозначение

$$\lambda = \frac{ne^2\tau_{\text{ин}}}{m}, \qquad (42.5)$$

преобразуем уравнение (42.3) к виду

$$\mathbf{j} + \tau_{\text{ин}}\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \lambda\frac{\mathbf{F}}{e}. \qquad (42.6)$$

Если регулярная сила $\mathbf{F}$ и коэффициент λ постоянны, то из (42.6) получаем

$$\mathbf{j} = \lambda\frac{\mathbf{F}}{e} + \mathbf{j}_0 e^{-t/\tau_{\text{ин}}}.$$

При $t \gg \tau_{\text{ин}}$

$$\mathbf{j} = \lambda\frac{\mathbf{F}}{e}. \qquad (42.7)$$

Все полученные соотношения верны независимо от природы регулярной силы $\mathbf{F}$, возбуждающей электрический ток. Если ток возбуждается электрическим полем $\mathbf{E}$, то $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$. Тогда соотношение (42.6) переходит в

$$\mathbf{j} + \tau_{\text{ин}}\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \lambda\mathbf{E}, \qquad (42.8)$$

а при $\mathbf{E} = \text{const}$ и $\mathbf{j} = \text{const}$ — в

$$\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}. \qquad (42.9)$$

Это — *закон Ома* при условии, что концентрация свободных электронов n и инерционное время $\tau_{\text{ин}}$ постоянны, т. е. не зависят от напряженности электрического поля $\mathbf{E}$, причем электрическая проводимость λ

определяется выражением (42.5). Закон Ома (42.9) верен и для переменных полей, как это непосредственно следует из формулы (42.8). Требуется только, чтобы за время $\tau_{\text{ин}}$ ток менялся пренебрежимо мало, т. е. выполнялось условие

$$\left|\tau_{\text{ин}}\frac{d\mathbf{j}}{dt}\right| \ll |\mathbf{j}|. \tag{42.10}$$

3. *Инерционное время электрона в металле можно выразить через среднее время свободного пробега электрона между двумя последовательными столкновениями его с ионами решетки.* Так как масса электрона пренебрежимо мала по сравнению с массой иона, то можно принять, что при каждом столкновении с ионом электрон полностью утрачивает свое упорядоченное движение. От беспорядочного движения можно отвлечься, так как оно на величину тока не влияет. Иначе говоря, можно принять, что при каждом столкновении скорость электрона обращается в нуль. Проведем сначала упрощенный расчет в предположении, что время свободного пробега между двумя последовательными столкновениями τ одно и то же для всех электронов и для всех столкновений. Будем предполагать, что электрон движется в постоянном электрическом поле $\mathbf{E}$. Претерпев столкновение, электрон начинает двигаться с постоянным ускорением $\mathbf{a} = e\mathbf{E}/m$. К следующему столкновению он приходит со скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{a}\tau$, так что его средняя скорость между двумя последовательными столкновениями будет $\mathbf{u} = \mathbf{a}\tau/2$, а плотность тока $\mathbf{j} = ne\mathbf{u} = \dfrac{ne^2\tau}{2m}\mathbf{E}$. Следовательно,

$$\lambda = \frac{ne^2\tau}{2m}. \tag{42.11}$$

В этих упрощающих предположениях $\tau_{\text{ин}} = \tau/2$.

Приведенный расчет не вполне точен, даже если сохранить идеализацию, что при каждом столкновении электрон полностью утрачивает упорядоченную скорость. Расчет не принимает во внимание, что время свободного пробега τ меняется от столкновения к столкновению. Для учета этого обстоятельства рассмотрим какой-либо один электрон, претерпевший много столкновений. Обозначим через $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ времена свободного пробега электрона между последовательными столкновениями, а через $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_N$ — средние упорядоченные скорости на этих временах. Тогда средняя упорядоченная скорость за все время движения представится выражением

$$\overline{\mathbf{u}} = \frac{\sum \tau_i \mathbf{u}_i}{\sum \tau_i} = \frac{\mathbf{a}}{2}\,\frac{\sum \tau_i^2}{\sum \tau_i}.$$

Разделив числитель и знаменатель на N и перейдя к пределу $N \to \infty$, запишем это выражение в виде $\mathbf{u} = a\overline{\tau^2}/(2\overline{\tau})$, где $\overline{\tau}$ и $\overline{\tau^2}$ — средние

значения времени свободного пробега электрона и его квадрата:

$$\overline{\tau} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum \tau_i, \quad \overline{\tau^2} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum \tau_i^2.$$

Те же средние значения τ и τ^2 будут характеризовать не только какой-либо определенный электрон, но и всю совокупность электронов. Таким образом, для электрической проводимости λ теперь получается

$$\lambda = \frac{ne^2}{2m}\frac{\overline{\tau^2}}{\overline{\tau}}.$$

В частном случае, когда все времена τ_1, τ_2, ... одинаковы, получится прежний результат (42.11).

Выразим теперь отношение $\overline{\tau^2}/\overline{\tau}$ через среднее время свободного пробега электрона $\overline{\tau}$. Возьмем пучок электронов, состоящий из n_0 частиц, находящихся в момент времени $t = 0$ в одинаковых условиях. При дальнейшем движении эти частицы будут сталкиваться с ионами решетки и выбывать из пучка. Пусть $n(t)$ — число частиц, оставшихся в пучке ко времени t. Среднее число частиц $-dn$, выбывших из пучка вследствие столкновений между t и $t + dt$, пропорционально n и может быть представлено выражением $-dn = \alpha n\, dt$, где α — положительная постоянная. Отсюда $n = n_0 e^{-\alpha t}$. Каждая из этих $(-dn)$ частиц двигалась без столкновений в течение времени t. Поэтому

$$\overline{\tau} = -\frac{1}{n_0}\int t\, dn, \quad \overline{\tau^2} = -\frac{1}{n_0}\int t^2\, dn.$$

Интегрируя по частям, преобразуем второй интеграл:

$$\overline{\tau^2} = \int\limits_0^\infty t^2\, de^{-\alpha t} = -2\int\limits_0^\infty te^{-\alpha t}\, dt = -\frac{2}{n_0}\int t\, dn = 2(\overline{\tau})^2.$$

Таким образом, $\overline{\tau^2}/(2\overline{\tau}) = \overline{\tau}$, и, следовательно, $\tau_{\text{ин}} = \overline{\tau}$,

$$\lambda = \frac{ne^2}{m}\overline{\tau}. \tag{42.12}$$

Тем не менее мы будем пользоваться иногда и упрощенной формулой (42.11). Дело в том, что в кинетической теории газов при изучении явлений переноса мы вводили те же упрощения, что и при выводе формулы (42.11), т. е. предполагали, что длины и времена свободного пробега одинаковы для всех молекул и всех столкновений. Было бы непоследовательно при сопоставлении кинетической теории газов с теорией электрической проводимости вводить различные упрощающие предположения и производить вычисления с различной точностью.

Отметим еще физический смысл постоянной α. Для этого выразим ее через время $\overline{\tau}$:

$$\overline{\tau} = -\frac{1}{n_0}\int t\, dn = \int\limits_0^\infty t\, de^{-\alpha t} = \frac{1}{\alpha}.$$

Таким образом,

$$n = n_0 e^{-t/\overline{\tau}}. \quad (42.13)$$

Эта формула вполне аналогична формуле (88.3) из второго тома нашего курса.

4. Вместо инерционного времени $\tau_{\text{ин}}$ или среднего времени свободного пробега $\overline{\tau}$ можно ввести другие параметры, связанные с этими временами. Часто используют *подвижность частицы* (электрона). Подвижностью частицы называют дрейфовую скорость, приобретаемую частицей либо под действием постоянной силы $\mathbf{F}$, равной единицы, либо под действием постоянного электрического поля $\mathbf{E}$, также равного единице. Первую подвижность будем обозначать большой буквой B, вторую — малой b (см. также т. II, § 64). Таким образом,

$$\mathbf{u} = B\mathbf{F} = b\mathbf{E}. \quad (42.14)$$

Так как $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$, то обе подвижности связаны соотношением

$$b = |e|B. \quad (42.15)$$

Через подвижность электрическая проводимость λ выражается формулой

$$\lambda = Be^2 n = b|e|n. \quad (42.16)$$

Понятием подвижности всегда пользуются при рассмотрении электрических токов в электролитах и ионизованных газах. В этих случаях имеется несколько типов носителей тока — положительных и отрицательных ионов. Для получения электропроводности λ выражение (42.16) надо просуммировать по всем типам носителей. Например, в растворах электролитов имеются два типа ионов, и вместо формулы (42.16) следует писать

$$\lambda = B^- e_-^2 n^- + B^+ e_+^2 n^+ = b^-|e_-|n^- + b^+|e_+|n^+, \quad (42.17)$$

где индекс «$-$» относится к отрицательным, а индекс «$+$» к положительным ионам.

Выражение (42.17) можно упростить, использовав то обстоятельство, что для возбуждения электрических полей, встречающихся в действительности, требуется ничтожное разделение положительных и отрицательных зарядов, которым при вычислении можно полностью пренебречь (см. § 10). Иными словами, можно считать, что электролит (или газ) *электрически нейтрален* (точнее, *квазинейтрален*), т. е. для него с большой точностью выполняется соотношение

$$\sum n_i e_i = 0. \quad (42.18)$$

В частности, если заряды положительных и отрицательных ионов одинаковы по абсолютной величине, это соотношение переходит в $n^- = n^+$, т. е. в равенство концентраций обоих ионов. В этом случае, если опустить индексы при n и e, получим

$$\lambda = (B^- + B^+)e^2 n = (b^- + b^+)\,|e|n. \quad (42.19)$$

5. Приведенные рассуждения (в согласии с опытом) приводят к заключению, что при определенных условиях возможны отклонения от закона Ома и даже полное несоблюдение этого закона. Для справедливости закона Ома необходимо, чтобы концентрации носителей тока и инерционные времена $\tau_{\text{ин}}$ (или соответствующие им подвижности) при прохождении тока оставались постоянными. Необходимо также, чтобы в переменных полях инерция носителей тока не играла роли; количественно это условие, как уже отмечалось выше, сводится к требованию, чтобы изменения тока за времена порядка $\tau_{\text{ин}}$ были пренебрежимо малы. В случае периодических переменных электрических полей это означает, что период изменения поля T должен быть очень велик по сравнению с $\tau_{\text{ин}}$.

Закон Ома может нарушаться в *сильных полях*, где могут проявляться нелинейные эффекты. В таких случаях при разложении средней силы $\langle \mathbf{F}_{\text{ст}} \rangle$ по степеням $\mathbf{u}$ линейное приближение (42.2) уже недостаточно. *Сильными* мы называем такие поля, в которых на протяжении среднего свободного пробега носитель тока приобретает скорость, сравнимую со скоростью беспорядочного движения. Количественно условие слабости поля записывается в виде

$$F\tau \ll mv_{\text{б}} \quad \text{или} \quad eE\tau \ll mv_{\text{б}}. \tag{42.20}$$

Посмотрим, соблюдается ли условие (42.20) при прохождении электрического тока в металлах. В качестве примера возьмем медь. Ее проводимость $\lambda = 5{,}3 \cdot 10^{17}$ с$^{-1}$ (при 20 °C), плотность $\rho = 8{,}9$ г/см^3, атомная масса $A = 63$. Если ввести правдоподобное предположение, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон, то концентрация свободных электронов будет

$$n = \frac{N}{A} \approx 8{,}5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$$

(N — число Авогадро). Инерционное время электрона вычислим по проводимости λ:

$$\tau_{\text{ин}} = \frac{m\lambda}{ne^2} \approx 2{,}5 \cdot 10^{-14} \text{ с}.$$

(Подвижность электрона $b = e\tau_{\text{ин}}/m = 1{,}3 \cdot 10^4$ СГСЭ-ед. $= 44$ см^2/(с · В). Средняя беспорядочная скорость электронов, если ее оценить по формулам классической кинетической теории газов, будет $v_{\text{б}} \approx \sqrt{3kT/m} \approx 10^7$ см/с. В действительности она примерно на порядок больше, так как для свободных электронов в металлах надо пользоваться не классической статистикой Больцмана, а квантовой статистикой Ферми (1901–1954) (см. т. II, § 82). С учетом этого обстоятельства берем $v_{\text{б}} \sim 10^8$ см/с. Тогда для промежуточных значений между слабыми и сильными полями получаем $E \sim mv_{\text{б}}/(e\tau) \sim 0{,}75 \cdot 10^4$ СГСЭ-ед. $\sim 2 \cdot 10^8$ В/м. Только начиная с таких полей

могли бы проявиться *нелинейные эффекты* при прохождении электрического тока через металл. На самом деле такие поля в металлах невозможны: они мгновенно превратили бы металл в пар. Наибольшая технически допустимая плотность тока в медных проводах принимается равной $j = 10^3$ А/см$^2 = 3 \cdot 10^{12}$ СГСЭ-ед. Ей соответствует напряженность электрического поля $E = j/\lambda \approx 0{,}5 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ-ед. $\approx 0{,}15$ В/м, что в 10^9 раз меньше вычисленной выше величины. С этим обстоятельством и связана применимость закона Ома к металлам.

В ионизованных газах закон Ома не соблюдается. При низких давлениях кинетическая энергия, приобретаемая электроном за время свободного пробега, даже в слабых электрических полях становится сравнимой с энергией теплового движения kT. Поэтому уже в таких полях линейное приближение (42.2) становится недействительным и наблюдаются *отступления* от закона Ома. При возрастании напряженности поля энергия электронов становится достаточной, чтобы ионизовать атомы и молекулы газа. Концентрации ионов, а потому и ток в газе сильно возрастают. При дальнейшем увеличении напряженности поля наступает *электрический пробой* газа (искра).

В местах контакта между полупроводниками или между полупроводниками и металлами могут происходить резкие нарушения закона Ома. Эти места являются типичными *«нелинейными»*, или *«неомическими»* проводниками тока, т. е. такими проводниками, в которых связь между $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ нелинейна. Их проводимость может быть даже *односторонней*, т. е. ток через них может проходить практически только в одном направлении. Практическое значение нелинейных проводников трудно переоценить. Современная радиотехника и электроника были бы невозможны, если бы все тела, проводящие электричество, подчинялись закону Ома.

6. Над электроном, движущимся со скоростью $\mathbf{v}$ в однородном силовом поле, ежесекундно совершается работа $\mathbf{vF} = (\mathbf{u}+\mathbf{v}_б)\mathbf{F}$. При суммировании по всем электронам члены $\mathbf{v}_б\mathbf{F}$ дают нуль. Остается только регулярная работа, связанная с дрейфовым движением электронов. Эта работа, совершаемая над электронами единицы объема металла, равна $n\mathbf{uF} = \mathbf{jF}/e$. В металлах она идет на приращение *внутренней* (*тепловой*) энергии, поскольку прохождение электрического тока не сопровождается изменениями внутренней структуры металла. Таким образом, *мощность тепла*, выделяемого током в единице объема проводника, дается выражениями

$$Q = \frac{1}{e}\,(\mathbf{jF}) = \frac{\lambda}{e^2}\,\mathbf{F}^2 \tag{42.21}$$

или

$$Q = \frac{1}{\lambda}\,\mathbf{j}^2. \tag{42.22}$$

Последняя формула выражает *закон Джоуля* (1819–1889)–*Ленца* (1804–1865) *в локальной* (*дифференциальной*) *форме*: мощность тепла в единице объема Q пропорциональна квадрату плотности

электрического тока и обратно пропорциональна проводимости среды. В такой форме закон Джоуля–Ленца носит *общий характер*, т. е. *не зависит от природы сил*, возбуждающих электрический ток. Если сила $\mathbf{F}$ чисто электрическая ($\mathbf{F} = e\mathbf{E}$), то

$$Q = (\mathbf{jE}) = \lambda \mathbf{E}^2. \tag{42.23}$$

Из изложенного ясно, что выражение (42.23) носит менее общий характер, чем (42.22).

Закон Джоуля–Ленца, как показывает опыт, справедлив и для электролитов. Отсюда следует, что работа электрического поля в электролитах не тратится на образование ионов. Ионы в растворе образуются в результате *диссоциации молекул* при растворении (электролитическая диссоциация). Приложенное электрическое поле к этому процессу не имеет отношения.

7. Изложенная классическая теория без существенных изменений сохраняется и в квантовой физике. Однако классическая теория носит *кинематический характер*, поскольку она не определяет подвижности и концентрации носителей тока. Для этого требуется *динамическая теория.* Попытки создать такую теорию на классической основе всегда приводили к резким противоречиям с опытом. Только квантовая теория позволяет (или позволяет в принципе) построить динамическую теорию электропроводности, согласующуюся с опытом.

8. Приведем в заключение один результат, полученный классической теорией. Хотя его классический вывод и неверен, но самый результат оказался верным. Речь идет о связи между проводимостью и теплопроводностью металлов. Металлы — хорошие проводники не только электричества, но и тепла. Это связано с тем, что переносчиками электричества и тепла в металлах являются одни и те же частицы — *свободные электроны.* Роль ионов в переносе тепла пренебрежимо мала. Применяя к электронной теплопроводности формулы кинетической теории газов (см. т. II, § 89), для теплопроводности металла можно написать

$$\chi = \frac{1}{3}\, n\overline{v} c_v \overline{l}, \tag{42.24}$$

где $\overline{v}$ — средняя скорость беспорядочного движения электронов, c_v — теплоемкость электронного газа при постоянном объеме, приходящаяся на один электрон, $\overline{l}$ — средняя длина свободного пробега электрона. В том же приближении выведена формула (42.11). Запишем ее в виде

$$\lambda = \frac{ne^2}{2m}\,\frac{\overline{l}}{\overline{v}}. \tag{42.25}$$

Почленным делением (42.24) на (42.25) находим

$$\frac{\chi}{\lambda} \approx \frac{2}{3}\,\frac{m\overline{v}^2}{e^2}\, c_v. \tag{42.26}$$

Эта формула сохраняется и в квантовой теории. Однако квантовая теория применяет к электронам в металлах статистику Ферми–Дирака

(1902–1984), а классическая — статистику Больцмана (что неправильно). В соответствии с этим в классической теории полагают $c_v = (3/2)k$, $m\overline{v}^2 \approx 3kT$ и получают

$$\frac{\chi}{\lambda} = 3\left(\frac{k}{e}\right)^2 T. \tag{42.27}$$

(Мы не учитываем разницы между $(\overline{v})^2$ и $\overline{v^2}$. Учет этой разницы в излагаемой приближенной теории был бы превышением точности расчета.)

Формула (42.27) была получена П. Друде (1863–1906). Друде, как и мы, не учитывал распределения электронов по скоростям. Лоренц, учтя максвелловское распределение тепловых скоростей электронов, получил такую же формулу, но с числовым коэффициентом 2 вместо 3. Важно, однако, не значение числового коэффициента, а то, что отношение χ/λ пропорционально термодинамической температуре T и для всех металлов одно и то же (закон Видемана (1826–1899)–Франца). Этот результат довольно хорошо подтвердился на опыте и долгое время считался доказательством правильности исходных положений классической теории электрической проводимости и теплопроводности металлов, несмотря на то что в вопросе о теплоемкости электронов в металлах эта теория приводила к резкому противоречию с опытом (см. т. II, § 69 и 84). Противоречие было устранено Зоммерфельдом (1868–1951), который применил статистику Ферми–Дирака к проблеме проводимости, теплопроводности и теплоемкости электронного газа в металлах. Он снова получил формулу (42.27) с коэффициентом $\pi^2/3$ вместо 3. Таким образом, классическая теория Друде и квантовая теория Зоммерфельда приводили фактически к одинаковым результатам. Такое совпадение результатов объясняется тем, что классическая теория пользовалась неправильными значениями для $\overline{v^2}$ и c_v. Эти две ошибки случайно компенсировали друг друга, так что произведение $\overline{v^2}c_v$ фактически получилось правильным. В § 99 этот вопрос будет разобран подробно.

ЗАДАЧИ

1. Найти вероятность того, что между моментами времени t_1 и $t > t_1$ свободный электрон в металле не претерпевает столкновений с ионами решетки. Электрическое поле в металле $E = 0$.

Решение. Так как электрического поля нет, то все моменты времени эквивалентны. В силу этого искомая вероятность может зависеть не от времени t и t_1 в отдельности, а только от их разности $t - t_1$. Обозначим эту вероятность через $f(t - t_1)$. Возьмем теперь второй момент времени t_2, более ранний, чем t_1. Вероятность события, что электрон не претерпит столкновений в промежутке времени $t - t_2$, будет $f(t - t_2)$. Но это событие можно рассматривать как сложное. Оно состоит из последовательности двух статистически независимых событий: 1) события, что электрон не претерпевает столкновений в интервале времени (t_2, t_1), и 2) события, что в интервале (t_1, t) он также не испытывает столкновений. По теореме умножения вероятностей вероятность этого сложного события может быть представлена

произведением $f(t - t_2) = f(t_1 - t_2)f(t - t_1)$. Решением этого уравнения является

$$f(t) = e^{-\alpha t}, \qquad (42.28)$$

где α — постоянная. Очевидно, она положительна, так как с возрастанием аргумента t функция $f(t)$ должна убывать. Таким образом,

$$f(t - t_0) = e^{-\alpha(t-t_0)}. \qquad (42.29)$$

Найдем теперь вероятность того, что электрон претерпел столкновение между t и $t + dt$. Очевидно, она равна

$$dw = f(t - t_0) - f(t + dt - t_0) = -\frac{df}{dt}\,dt$$

или

$$dw = \alpha e^{-\alpha(t-t_0)}\,dt. \qquad (42.30)$$

Простым интегрированием убеждаемся, что эта вероятность нормирована к единице:

$$\int dw = \int\limits_{t_0}^{\infty} \alpha e^{-\alpha(t-t_0)}\,dt = 1.$$

Так и должно быть, поскольку столкновение электрона на бесконечном интервале времени (t_0, ∞) есть достоверное событие. Постоянную α можно выразить через среднее время свободного пробега электрона $\overline{\tau}$ между двумя последовательными столкновениями его с ионами. Очевидно,

$$\overline{\tau} = \int\limits_{t_0}^{\infty} (t - t_0)\,dw = \alpha \int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha(t-t_0)}(t - t_0)\,dt = \frac{1}{\alpha}.$$

Поэтому

$$f(t - t_0) = e^{-(t-t_0)/\overline{\tau}}. \qquad (42.31)$$

2. Разъяснить следующий парадокс. Вероятность того, что последнее столкновение электрона произошло между t_0 и $t_0 + dt_0$, равна

$$dw = f[t - (t_0 + dt_0)] - f(t - t_0) = \frac{df}{dt_0}\,dt_0,$$

или

$$dw = \alpha e^{-(t-t_0)}\,dt_0. \qquad (42.32)$$

До момента времени t электрон в среднем двигался без столкновений в течение времени

$$\int (t - t_0)\,dw = \int\limits_{-\infty}^{t} (t - t_0)\alpha e^{-(t-t_0)}\,dt_0 = \frac{1}{\alpha},$$

т. е. такое же время, какое он затратит в среднем до следующего столкновения.

Рассмотрим теперь движение электрона между двумя последовательными столкновениями. Пусть момент времени t лежит где-то между моментами столкновений. Пусть от первого столкновения до момента t электрон затрачивает время T_1, а от момента t до второго столкновения — время T_2. Тогда время между столкновениями будет $T = T_1 + T_2$. Усредняя это время, получим $\overline{T} = \overline{T}_1 + \overline{T}_2$. Но согласно доказанному $\overline{T}_1 = \overline{T}_2 = \overline{\tau}$. Таким

образом, среднее время свободного пробега электрона между двумя последовательными столкновениями будет $\overline{T} = 2\overline{\tau}$. На самом деле оно равно $\overline{\tau}$.

Решение. Соотношение $\overline{T} = \overline{T}_1 + \overline{T}_2$ неверно, так как операция усреднения времени T имеет другой смысл, чем операции усреднения времени T_1 и T_2. Возьмем, например, пучок электронов, одновременно претерпевших столкновения. Пусть число частиц в пучке непосредственно после столкновения равно n_0. Для вычисления $\overline{T}$ надо усреднить T по всем n_0 электронам. Но электроны выбывают из пучка из-за столкновений. Пусть к моменту t их останется в пучке n. Для нахождения $\overline{T}_1$ и $\overline{T}_2$ надо усреднять T_1 и T_2 уже по меньшему числу частиц n. Благодаря этому правильное соотношение между средними временами будет $\overline{T} = \overline{T}_1 = \overline{T}_2 = \overline{\tau}$.

3. Применить результаты, полученные в задачах 1 и 2, к вычислению плотности тока в металле, введя предположение, что после каждого столкновения электрон полностью утрачивает упорядоченную скорость. Электрическое поле $\mathbf{E}$ считать слабым, однородным и зависящим от времени.

Решение. В слабых полях формулы (42.31) и (42.32) остаются верными. Если электрон претерпел последнее столкновение в момент t_0, то за время $t - t_0$ его скорость получит приращение

$$\Delta\mathbf{v} = \frac{e}{m}\int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{E}(t')\,dt'. \tag{42.33}$$

Усредняя это выражение по всем электронам, мы и найдем упорядоченную (дрейфовую) скорость электрона в электрическом поле:

$$\mathbf{u} = \langle\Delta\mathbf{v}\rangle = \int \Delta\mathbf{v}\,dw = \frac{1}{\overline{\tau}}\int\limits_{-\infty}^{t} \Delta\mathbf{v}e^{-(t-t_0)/\overline{\tau}}\,dt_0.$$

Введем временное обозначение $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{k}\xi$, где $\mathbf{k}$ — единичный вектор в направлении электрического поля $\mathbf{E}$. Величину ξ при интегрировании, конечно, надо рассматривать как функцию аргумента t_0. Имея это в виду, интегрированием по частям находим

$$\mathbf{u} = \Delta\mathbf{v}e^{-(t-t_0)/\overline{\tau}}\Big|_{t_0=-\infty}^{t_0=t} - \mathbf{k}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-(t-t_0)/\overline{\tau}}\,d\xi.$$

Множитель $\Delta\mathbf{v}$, как видно из формулы (42.33), обращается в нуль на верхнем пределе $t_0 = t$. На нижнем же пределе $t_0 = -\infty$ обращается в нуль экспоненциальный множитель. Таким образом, в правой части последнего выражения остается только второе слагаемое. Подставляя в него $d\xi = -eE(t_0)\,dt_0/m$ и выполняя интегрирование, получим

$$\mathbf{u} = \frac{e}{m}\int\limits_{-\infty}^{t} \mathbf{E}(t_0)e^{-(t-t_0)/\overline{\tau}}\,dt_0.$$

Плотность тока

$$\mathbf{j} = ne\mathbf{u} = \frac{ne^2}{m}\int\limits_{-\infty}^{t} \mathbf{E}(t_0)e^{-(t-t_0)/\overline{\tau}}\,dt_0.$$

Для исключения входящего сюда интеграла дифференцируем последнее выражение по t и находим

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{ne^2}{m}\mathbf{E}(t) - \frac{ne^2}{m\overline{\tau}}\int\limits_{-\infty}^{t}\mathbf{E}(t_0)e^{-(t-t_0)/\overline{\tau}}\,dt_0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{j} + \overline{\tau}\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{ne^2\overline{\tau}}{m}\mathbf{E}$$

в согласии с ранее полученными результатами.

§ 43. Сторонние силы. Концентрационный элемент

1. Допустим, что единственными источниками электрического поля $\mathbf{E}$ в проводниках, по которым текут токи, являются электрические заряды, возбуждающие поля по закону Кулона. При прохождении тока непрерывно происходит убыль зарядов, точнее, нейтрализация положительного и отрицательного электричеств. Для того чтобы напряженность поля $\mathbf{E}$, а с ней и плотность электрического тока $\mathbf{j}$ оставались неизменными, необходимы какие-то дополнительные силы или процессы, непрерывно пополняющие электрические заряды.

Плотность электрического тока, как видно из формулы (42.7), определяется полной силой $\mathbf{F}$, действующей на электрон или другой носитель зарядов. Силу $\mathbf{F}$ можно разложить на две части: силу электрическую и силу неэлектрическую, включающую в себя все прочие силы. Эти прочие силы принято называть *сторонними.* В соответствии с этим полагаем $\mathbf{F}/e = \mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стор}}$, где $\mathbf{E}^{\text{стор}}$ — *напряженность поля сторонних сил*, т. е. сторонняя сила, отнесенная к единице заряда. С учетом сторонних сил закон Ома записывается в виде

$$\mathbf{j} = \lambda(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стор}}). \tag{43.1}$$

2. Приведем пример сторонней силы, не имеющий, правда, практического значения. Если металлический диск равномерно вращается с угловой скоростью ω (рис. 111), то в системе отсчета, связанной с диском, на электрон действует центробежная сила $m\omega^2\mathbf{r}$, где m — масса электрона. Разделив ее на заряд электрона e, найдем напряженность стороннего поля:

$$\mathbf{E}^{\text{стор}} = \frac{m\omega^2}{e}\mathbf{r} = \text{grad}\,\frac{m\omega^2 r^2}{2e} = \frac{4\pi^2 mN^2}{e}\mathbf{r}, \tag{43.2}$$

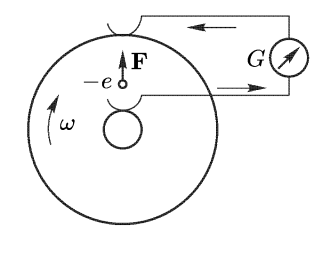


Рис. 111

где N — число оборотов диска в секунду. (Силой Кориолиса (1792–1843) можно пренебречь.) Если к оси и периферии диска подвести скользящие контакты, то через гальванометр потечет электрический ток. Чтобы

составить представление о порядке величины $\mathbf{E}^{\text{стор}}$, подставим в формулу (43.2) $r = 10$ см, $N = 100$ об/с. Получим ничтожную величину $\mathbf{E}^{\text{стор}} \approx 2 \cdot 10^{-9}$ В/см.

3. Второй простой пример, в котором сторонние силы носят несколько формальный характер, дает *концентрационный элемент.* Этот элемент представляет собой два электрода, погруженных в раствор электролита, концентрация которого меняется от точки к точке. Никаких химических реакций между электродами и электролитом не происходит. Электрический ток возникает и поддерживается в результате диффузионного выравнивания концентраций.

Для простоты будем предполагать электроды плоскими (рис. 112). Ось X направим перпендикулярно к поверхностям электродов от отрицательного электрода к положительному. Пусть концентрация электролита зависит только от x. Ради конкретности в качестве электролита возьмем водный раствор соляной кислоты HCl. Молекулы HCl диссоциируют на положительные ионы водорода H^+ и отрицательные ионы хлора Cl^-. Заряд отрицательного иона обозначим через e_-, положительного — через e_+. По абсолютной величине они одинаковы и равны элементарному заряду $|e| = 4{,}80 \times 10^{-10}$ СГСЭ-ед. Концентрации отрицательных и положительных ионов $n^-(x)$ и $n^+(x)$ в наших расчетах следует считать одинаковыми, так как электролит во всех случаях является либо электрически нейтральным, либо квазинейтральным (см. § 42). Поэтому можно обозначить эти концентрации одной и той же буквой $n(x)$.

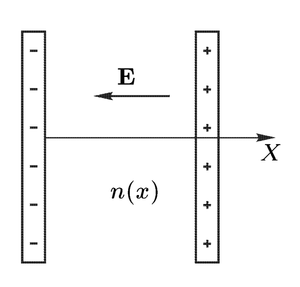


Рис. 112

Из-за наличия градиента концентрации $n(x)$ начнется диффузия обоих ионов в сторону уменьшения концентрации. Скорость диффузии водородных ионов много больше скорости диффузии ионов хлора. Благодаря этому возникнет *разделение зарядов* и появится *электрическое поле*, стремящееся затормозить диффузию ионов водорода и ускорить диффузию ионов хлора. Напряженность электрического поля будет возрастать до тех пор, пока скорости ионов обоих знаков не сделаются одинаковыми. Вместе с диффузией возникнет диффузионный электрический ток. Плотность диффузионного тока равна

$$-D^- \frac{dn^-}{dx} e^- - D^+ \frac{dn^+}{dx} e^+ = (D^- - D^+) \frac{dn}{dx} e,$$

где D^- и D^+ — коэффициенты диффузии ионов водорода и ионов хлора. Этот ток надо прибавить к току $(B^- + B^+)e^2 nE$, вызванному электрическим полем (см. формулу (42.19)). Плотность полного тока будет

$$j = (D^- - D^+) e \frac{dn}{dx} + (B^- + B^+) n e^2 E.$$

Вводя в эту формулу электрическую проводимость $\lambda = (B^- + B^+)ne^2$, получим

$$j = \lambda \left(E + \frac{1}{e} \frac{D^- - D^+}{B^- + B^+} \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \right).$$

Воспользовавшись соотношением Эйнштейна $D = kTB$ (см. т. II, § 91), придадим этой формуле вид

$$j = \lambda \left(E + \frac{kT}{e} \frac{B^- - B^+}{B^- + B^+} \frac{d}{dx} (\ln n) \right), \tag{43.3}$$

где k — постоянная Больцмана, а T — термодинамическая температура. Сравнение формулы (43.3) с (43.1) приводит к соотношению

$$E^{\text{стор}} = \frac{kT}{e} \frac{B^- - B^+}{B^- + B^+} \frac{d}{dx} (\ln n), \tag{43.4}$$

или в векторной форме

$$\mathbf{E}^{\text{стор}} = \frac{kT}{e} \frac{B^- - B^+}{B^- + B^+} \operatorname{grad} \ln n. \tag{43.5}$$

Полученная формула показывает, что от диффузии можно отвлечься и формально рассматривать электролит как однородный, если к напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ добавить напряженность поля сторонних сил. Формула (43.4) справедлива и в случае электродов произвольной формы, так как электролит всегда можно мысленно разделить на достаточно малые части, в пределах каждой из которых вектор $\operatorname{grad} \ln n$ может считаться одним и тем же, и применить выражение (43.4).

Концентрационный элемент как источник электрического тока также не применяется на практике. Однако происходящие в нем процессы аналогичны процессам в *гальванических элементах*, где электрические токи поддерживаются за счет *химических реакций* между электродами и электролитами. Для гальванических элементов и прочих источников тока можно также пользоваться формулой (43.1). При этом можно отвлечься от детального рассмотрения физических процессов, возбуждающих и поддерживающих электрический ток в цепи, учитывая эти процессы формально с помощью поля сторонних сил $\mathbf{E}^{\text{стор}}$. Сторонние силы в гальванических элементах действуют на границах между электролитами и электродами. Они действуют также на границе соприкосновения двух разнородных металлов и обусловливают *контактную разность потенциалов* между ними.

4. Как показывают формулы (43.2) и (43.5), в обоих случаях, к которым они относятся, вектор $\mathbf{E}^{\text{стор}}$ выражается через *градиент* какого-то скаляра. Иными словами, в тех областях пространства, в которых действуют сторонние силы, поле этих сил ведет себя как *потенциальное силовое поле.* Это утверждение носит общий характер, если только сторонние силы, как это бывает в большинстве встречающихся случаев, не зависят (или практически не зависят) от силы тока, текущего через

источник. Действительно, сила тока зависит от электрической проводимости и геометрических размеров проводника, который соединяет полюсы источника. Разомкнем цепь, т. е. удалим этот проводник. Тогда, по нашему предположению, поле сторонних сил не изменится. Однако с размыканием цепи прекратятся и все токи, а потому на основании формулы (43.1) должно быть $\lambda(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{\text{стор}}) = 0$. Внутри источника $\lambda \neq \neq 0$, и после сокращения на λ получаем $\mathbf{E}+\mathbf{E}^{\text{стор}} = 0$. Поскольку электрическое поле $\mathbf{E}$ потенциально, отсюда следует, что внутри источника $\mathbf{E}^{\text{стор}}$ ведет себя также как потенциальное поле. Вне источника $\lambda = 0$, и соотношение $\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стор}} = 0$ несправедливо. Поэтому во всем пространстве стороннее поле не потенциально. И только благодаря этому оно способно возбуждать и поддерживать постоянные электрические токи (см. следующий параграф).

ЗАДАЧА

Сторонние силы в концентрационном элементе можно рассматривать как силы осмотического давления, действующие в электролите при наличии градиента концентрации. Получить с этой точки зрения формулу (43.4).

Решение. Ввиду квазинейтральности электролита осмотические давления отрицательных и положительных ионов одинаковы. Каждое из них определяется формулой $\mathscr{P} = nkT$. На ионы каждого знака, находящиеся в единице объема, действует сила осмотического давления $-\partial\mathscr{P}/\partial x = -kT\dfrac{\partial n}{\partial x}$, а на один ион — сила $F^{\text{стор}} = -\dfrac{kT}{n}\dfrac{\partial n}{\partial x}$. Направление силы $F^{\text{стор}}$ не зависит от знака заряда иона. Под действием силы $F^{\text{стор}}$ ионы приобретут скорости $u_- = B^- F^{\text{стор}}$, $u_+ = B^+ F^{\text{стор}}$, и возникнет диффузионный электрический ток с плотностью

$$j_{\text{диф}} = n(e_-u_- + e_+u_+) = ne(B^+ - B^-)F^{\text{стор}},$$

или ввиду соотношения (42.19)

$$j_{\text{диф}} = -\lambda\frac{B^- - B^+}{(B^- + B^+)e}\,F^{\text{стор}}.$$

Представив это выражение в виде $j_{\text{диф}} = \lambda E^{\text{стор}}$ и воспользовавшись выражением для $F^{\text{стор}}$, найдем напряженность стороннего поля $E^{\text{стор}}$, совпадающую с (43.4).

§ 44. Законы Ома и Джоуля–Ленца в интегральной форме

1. Рассмотрим важнейший случай, когда электрические токи текут вдоль *тонких проводов* (проволок). Направление тока будет совпадать с направлением оси провода. Это автоматически обеспечивается соответствующим распределением электрических зарядов на поверхностях проводников или в местах, где действуют сторонние силы. Площадь поперечного сечения провода S в различных местах его может быть неодинаковой. Для тонких проводов плотность тока j может считаться одной и той же во всех точках поперечного сечения провода. Через

поперечное сечение провода в единицу времени проходит количество электричества

$$I = jS, \tag{44.1}$$

называемое *силой тока* или просто *током*. Если ток постоянен, то из-за сохранения заряда величина I будет одна и та же вдоль всего провода. Для общности будем предполагать, что в проводе действуют сторонние силы, например имеется гальванический элемент. Воспользуемся законом Ома в форме (43.1). Из него получаем

$$E + E^{\text{стор}} = \frac{j}{\lambda} = \frac{I}{\lambda S}.$$

Умножим это соотношение на элемент длины провода dl и проинтегрируем по участку провода от какой-либо точки *1* до другой точки *2*

Рис. 113

(рис. 113). Поскольку ток один и тот же во всем проводе, величину I можно вынести из-под знака интеграла. Сделав это, найдем

$$\int\limits_{12} E\,dl + \int E^{\text{стор}}\,dl = I\int \frac{dl}{\lambda S}.$$

Так как электрическое поле стационарных токов потенциально, то первый интеграл выражается через разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$. Второй интеграл достаточно распространить на ту часть пути, где $E^{\text{стор}} \neq 0$, т. е. на ту часть, которая проходит внутри источника тока. Этот интеграл не зависит от положения начальной и конечной точек *1* и *2*. Требуется только, чтобы эти точки находились вне источника тока. Ввиду потенциального характера поля $E^{\text{стор}}$ в области, где действуют сторонние силы, интеграл не зависит также от того, как проходит путь интегрирования через источник тока. Значит, этот интеграл есть величина, характеризующая свойства самого тока. Она называется *электродвижущей силой тока*:

$$\mathscr{E} = \int\limits_{12} E^{\text{стор}}\,dl = \int\limits_{34} E^{\text{стор}}\,dl. \tag{44.2}$$

Электродвижущая сила положительна, если путь *12* пересекает источник тока в направлении от отрицательного полюса к положительному. В противном случае она отрицательна [1]. Третий интеграл

$$R = \int \frac{dl}{\lambda S} = \int \rho\frac{dl}{S} \tag{44.3}$$

[1] Термодинамическая теория электродвижущей силы гальванического элемента изложена в т. II, § 49.

есть величина, характеризующая провод, по которому течет электрический ток. Эта величина называется *электрическим сопротивлением* или просто *сопротивлением провода.* Если провод изготовлен из однородного материала и всюду имеет одинаковую толщину, то получается известная формула

$$R = \rho \frac{l}{S}. \tag{44.4}$$

Таким образом,

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E} = IR. \tag{44.5}$$

При выводе формулы (44.5) предполагалось, что провод тонкий на протяжении всей своей длины, включая участок, где находится гальванический элемент. Последнее условие, как правило, почти никогда не соблюдается. Тем не менее, как будет показано в конце настоящего параграфа, формула (44.5) справедлива и в этом случае.

2. Формула (44.5) выражает *закон Ома в интегральной форме* в отличие от соотношения (43.1), представляющего тот же закон в *локальной форме.* Эту формулу называют также *законом Ома для участка цепи.* Понятно, что R есть сопротивление *всего участка*, включая сопротивление самого элемента. Если участок не содержит источника тока (или, вообще, на нем не действуют сторонние силы), то формула (44.5) принимает вид

$$\varphi_1 - \varphi_2 = IR. \tag{44.6}$$

Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ называется в этом случае *электрическим напряжением* или просто *напряжением на концах рассматриваемого провода.* В общем случае электрическое напряжение определяется как интеграл $\int E\,dl$, взятый вдоль длины провода. Такое определение годится и в тех случаях, когда электрическое поле не потенциально.

Если начальная и конечная точки *1* и *2* совпадают, то $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ и формула (44.5) переходит в *закон Ома для всей* (*замкнутой*) *цепи:*

$$\mathscr{E} = IR. \tag{44.7}$$

Здесь R означает уже *полное сопротивление всей цепи.* Если $\varphi_а$ — потенциал анода, а $\varphi_к$ — катода, то $\varphi_а - \varphi_к = R_e I$, где R_e — сопротивление всего внешнего участка цепи. Сравнивая это соотношение с (44.7), получим

$$\frac{\varphi_а - \varphi_к}{\mathscr{E}} = \frac{R_e}{R} = \frac{R_e}{R_e + R_i}, \tag{44.8}$$

где R_i — внутреннее сопротивление самого элемента. Отсюда следует, что всегда, когда по цепи течет ток, разность потенциалов между полюсами элемента $\varphi_а - \varphi_к$ меньше электродвижущей силы $\mathscr{E}$. Только в предельном случае, когда $R_e \to \infty$ (а следовательно, $I \to 0$), получается $\mathscr{E} = \varphi_а - \varphi_к$. Значит, *электродвижущую силу можно определить как разность потенциалов между полюсами разомкнутого источника тока.*

3. Практической единицей тока, употребляемой в электротехнике, является *ампер* (А). Это есть сила такого тока, когда через поперечное сечение провода ежесекундно проходит один кулон электричества. Практическая единица напряжения, или разности потенциалов, есть *вольт* (В). Он определяется как такая разность потенциалов, при прохождении которой над зарядом в один кулон совершается работа в один джоуль. Практическая единица сопротивления есть *ом* (Ом), т. е. сопротивление такого провода, по которому потечет ток в один ампер, если на его концах поддерживать разность потенциалов в один вольт. Соответственно единица удельного сопротивления ρ будет Ом · см, а удельной проводимости — Ом$^{-1}$·см$^{-1}$. Мы видим, что в практической системе единиц ρ уже не имеет размерности времени, как это было в гауссовой системе (см. § 41, п. 1). Очевидно,

$$1\ \text{Ом} = \frac{1\ \text{В}}{1\ \text{А}} = \frac{1/300}{3 \cdot 10^9} = \frac{1}{9} \cdot 10^{-11}\ \text{СГСЭ-ед. сопротивления.}$$

4. Рассмотрим n проводов, соединенных параллельно (рис. 114). Будем предполагать, что в проводах действуют электродвижущие силы $\mathscr{E}_k$. Наша схема включает в себя как частный случай и парал-

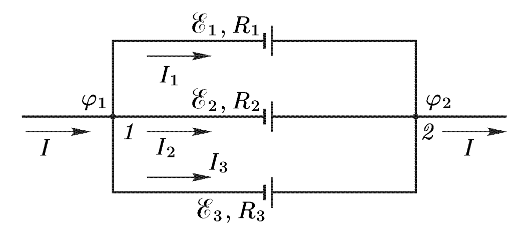


Рис. 114

лельное соединение элементов. Если R_k — сопротивление k-го провода (вместе с внутренним сопротивлением элемента), то ток в нем определяется выражением

$$I_k = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_k} + \frac{\mathscr{E}_k}{R_k}.$$

Сложив эти выражения, найдем полный ток, текущий в цепи:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} + \frac{\mathscr{E}}{R}, \tag{44.9}$$

где введены обозначения

$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_k}, \tag{44.10}$$

$$\mathscr{E} = R \sum \frac{\mathscr{E}_k}{R_k}. \tag{44.11}$$

Формула (44.10) определяет *сопротивление параллельно соединенных проводов.* Величина (44.11) играет роль электродвижущей силы. Для

того чтобы она не зависела от сопротивлений внешних проводов, достаточно понимать под R_k только внутренние сопротивления элементов. Тогда формула (44.11) будет определять *электродвижущую силу батареи параллельно соединенных элементов.* Если все элементы одинаковы, то $\mathcal{E} = \mathcal{E}_k$ т. е. *электродвижущая сила батареи равна электродвижущей силе одного элемента.*

Теперь видно, что для справедливости закона Ома (44.5) участки, содержащие гальванические элементы, не обязательно должны быть тонкими. Достаточно заметить, что область, обтекаемую током, всегда можно мысленно разделить на достаточно тонкие трубки тока, которые можно рассматривать как параллельно соединенные тонкие провода. Электродвижущие силы $\mathcal{E}_k$ в этих проводах одинаковы ввиду потенциального характера поля E в области, где действуют сторонние силы (см. конец предыдущего параграфа). Применив к рассматриваемой системе проводов соотношения (44.9)–(44.11), мы снова придем к закону Ома (44.5). При этом, ввиду одинаковости всех $\mathcal{E}_k$, величина $\mathcal{E}_k$ будет означать просто электродвижущую силу источника тока.

5. *Закон Джоуля–Ленца в интегральной форме* получается из *дифференциальной формы* этого закона интегрированием по объему провода. Представив элемент объема в виде $dV = S\,dl$, получим

$$Q = \int \frac{j^2}{\lambda} S\,dl = I^2 \int \frac{dl}{\lambda S} = I^2 R. \tag{44.12}$$

Это и есть интегральная форма закона Джоуля–Ленца. Формула (44.12) определяет тепло, выделяющееся ежесекундно в рассматриваемом участке провода. Если взять всю замкнутую цепь, то $Q = I\mathcal{E} = I \oint E^{\text{стор}}\,dl$. Отсюда видно, что *тепло производится одними только сторонними силами.* Роль электрического поля сводится к тому, что оно перераспределяет это тепло по различным участкам цепи.

ЗАДАЧИ

1. N одинаковых элементов с электродвижущей силой $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением R_i разделены на m групп по n элементов в группе. Элементы в каждой группе соединены параллельно одноименными полюсами, а сами группы соединены между собой последовательно. При каком условии ток в цепи (при заданном внешнем сопротивлении R_e) будет максимальным?

Ответ. Ток максимален, если $R_e = mR_i/n$, т. е. когда внешнее сопротивление цепи равно внутреннему сопротивлению батареи. Для соблюдения этого условия необходимо, чтобы было $NR_i \geqslant R_e$. Сила максимального тока $I_{\text{макс}} = m\mathcal{E}/2R_e$.

2. Вычислить электродвижущую силу концентрационного элемента.

Решение. Из формулы (43.5) получаем

$$\mathcal{E} = \frac{kT}{e} \frac{B^- - B^+}{B^- + B^+} \ln \frac{n_1}{n_2}, \tag{44.13}$$

где n_1 и n_2 — концентрации электролита у электродов элемента. По порядку величины

$$\mathscr{E} = \frac{kT}{e} = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-16} \cdot 300}{4{,}8 \cdot 10^{-10}} = 8{,}6 \cdot 10^{-5} \text{ СГСЭ-ед.} = 0{,}029 \text{ В.}$$

§ 45. Правила Кирхгофа

Рассмотрим произвольную разветвленную сеть проводов, в отдельных участках которой включены гальванические элементы или другие источники тока. Электродвижущие силы этих источников постоянны и предполагаются известными. Токи во всех участках цепи и разности потенциалов на них можно рассчитать с помощью закона Ома (44.5) и закона сохранения электрического заряда. Однако более просто задача решается с помощью двух *правил Кирхгофа*. Одно из них выражает *закон сохранения электрического заряда* для линейных проводов, а другое является *следствием закона Ома*. Сформулируем эти правила.

Первое правило Кирхгофа. *В каждой точке разветвления проводов алгебраическая сумма сил токов равна нулю* (рис. 115). *Токи, идущие к точке разветвления, и токи, исходящие из нее, следует считать величинами разных знаков.* Например, применительно к рис. 115 первое правило Кирхгофа запишется так:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0.$$

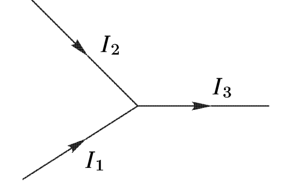


Рис. 115

Если бы это правило не соблюдалось, то в точках разветвления проводов накапливались бы электрические заряды, меняющиеся во времени. Вместе с ними менялось бы во времени и электрическое поле, а потому токи не могли бы оставаться постоянными.

Второе правило Кирхгофа. *Выделим в сети произвольный замкнутый контур, состоящий из проводов. Сумма электродвижущих сил, действующих в таком контуре, равна сумме произведений сил токов в отдельных участках этого контура на их сопротивления.*

Для доказательства достаточно рассмотреть случай, когда контур состоит из трех участков (рис. 116). Применяя к ним закон Ома (44.5), можем написать

$$\varphi_2 - \varphi_3 + \mathscr{E}_1 = I_1 R_1,$$

$$\varphi_3 - \varphi_1 + \mathscr{E}_2 = I_2 R_2,$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_3 = I_3 R_3.$$

Складывая эти равенства, получим

$$\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3 = I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3,$$

т. е. второе правило Кирхгофа.

Правила Кирхгофа в каждом конкретном случае позволяют написать *полную систему линейных уравнений*, из которой могут быть найдены все неизвестные токи. В нее совсем не входят неизвестные

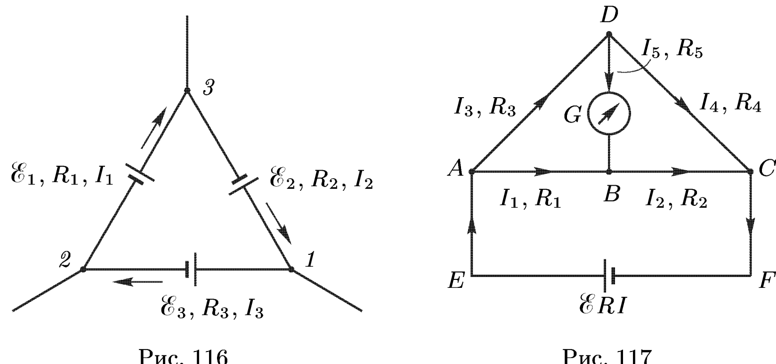


Рис. 116

Рис. 117

разности потенциалов. В исключении потенциалов из уравнений для токов и состоит упрощение, вносимое правилами Кирхгофа по сравнению с законом Ома. При применении правил Кирхгофа надо поступать следующим образом:

1) Направления токов во всех участках сети следует обозначить стрелками, *не задумываясь над тем, куда эти стрелки направить. Если вычисление покажет, что ток положителен, то его направление указано правильно. Если же ток отрицателен, то его истинное направление противоположно направлению стрелки.*

2) Выбрав произвольный замкнутый контур, все его участки следует обойти в *одном направлении. Если это направление совпадает с направлением стрелки, то слагаемое RI берется со знаком плюс. Если же эти направления противоположны, то оно берется со знаком минус. Если при обходе контура источник тока проходится от отрицательного полюса к положительному, то его электродвижущую силу следует считать положительной; в противоположном случае ее надо считать отрицательной.*

3) *Все электродвижущие силы и все сопротивления проводов должны входить в систему уравнений.*

Рассмотрим два примера на правила Кирхгофа.

Пример 1. Мостик Уитстона (1802–1875). Схема мостика представлена на рис. 117. Расставим (произвольно) стрелки, указывающие направления токов. Имеется четыре точки разветвления: A, B, C, D. Применение к ним первого правила Кирхгофа приводит к четырем уравнениям:

$$\begin{aligned} I - I_1 - I_3 = 0, \quad I_1 - I_2 + I_5 = 0, \\ I_2 + I_4 - I = 0, \quad I_3 - I_4 - I_5 = 0. \end{aligned} \tag{45.1}$$

Из этих уравнений независимы *только три* (при сложении всех уравнений получается тождество $0 = 0$). Для определения шести неизвестных

I, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 требуется *еще три* уравнения. Их дает второе правило Кирхгофа. Применяя его, можно брать разные контуры. Но один из них *должен обязательно содержать источник тока* (с электродвижущей силой $\mathcal{E}$). Можно, например, взять контуры ABD, BDC и $ABCFEA$. Для них второе правило Кирхгофа дает

$$\begin{gathered} I_1R_1 - I_5R_5 - I_3R_3 = 0, \\ I_2R_2 - I_4R_4 + I_5R_5 = 0, \\ IR + I_1R_1 + I_2R_2 = \mathcal{E}. \end{gathered} \tag{45.2}$$

Здесь R — сопротивление участка $CFEA$, включая внутреннее сопротивление источника тока. Использование других контуров не дает новых независимых уравнений. Решая уравнения (45.1) совместно с уравнениями (45.2), можно вычислить все токи. Ограничимся выводом условия, при котором ток в мостике I_5 обращается в нуль. Если $I_5 = 0$, то из уравнений (45.1) следует $I_1 = I_2$, $I_3 = I_4$. После этого из первых двух уравнений (45.2) находим

$$I_1R_1 = I_3R_3, \quad I_1R_2 = I_3R_4.$$

Отсюда почленным делением получаем известное условие

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4},$$

на котором основано применение мостика Уитстона для измерения сопротивлений проводов. Ветвь AC (реохорд) изготовляется из длинной однородной проволоки с большим удельным сопротивлением, так что отношение R_1/R_2 можно заменить отношением длин AB/BC.

Пример 2. Сравнение электродвижущих сил элементов методом Поггендорфа (1796–1877). Схема опыта изображена на рис. 118. Предполагается, что $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$. Первое правило Кирхгофа дает

$$I_1 - I_2 - i_1 = 0,$$

а второе

$$\begin{gathered} I_1(R_1 + r_2) + i_1r_1 = \mathcal{E}_1, \\ i_1r_1 - I_2R_2 = \mathcal{E}_2. \end{gathered}$$

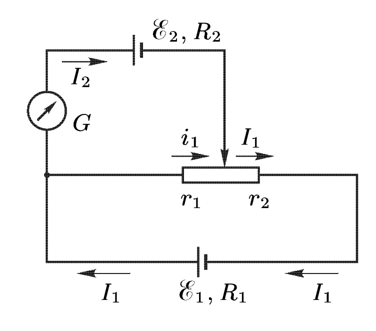


Рис. 118

Под R_2 понимается сумма внутреннего сопротивления элемента *2* и сопротивления гальванометра. Найдем условие, при котором ток через гальванометр не пойдет. Если $I_2 = 0$, то $I_1 = i_1$ и, следовательно,

$$I_1(R_1 + r_1 + r_2) = \mathcal{E}_1, \quad I_1r_1 = \mathcal{E}_2.$$

Отсюда получаем искомое условие

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{r_1}{r_1 + r_2 + R_1}. \tag{45.3}$$

В это уравнение входит неизвестное сопротивление R_1. Для его исключения применяется следующий метод. Опыт повторяют, заменив элемент *2* элементом *3* с электродвижущей силой $\mathscr{E}_3 < \mathscr{E}_1$, оставляя все остальные параметры схемы неизменными. Ток через гальванометр не пойдет при новых значениях сопротивлений r_1 и r_2. Обозначая их через r_1' и r_2', можем написать $\mathscr{E}_3/\mathscr{E}_1 = r_1'/(r_1' + r_2' + R_1)$. Так как $r_1 + r_2 = r_1' + r_2'$, то отсюда и из условия (45.3) получаем $\mathscr{E}_3/\mathscr{E}_2 = r_1'/r_1$. Как и в предыдущей схеме, отношение r_1'/r_1 можно свести к отношению длин и после этого вычислить неизвестное отношение электродвижущих сил $\mathscr{E}_3/\mathscr{E}_2$.

§ 46. Стационарные токи в массивных проводниках

1. Пусть в проводящую однородную среду помещены два электрода A и B (рис. 119), электрическая проводимость которых очень велика по сравнению с проводимостью самой среды. В этих условиях изменениями потенциала внутри электродов можно пренебречь, т. е. считать, что все точки каждого электрода находятся при одном и том

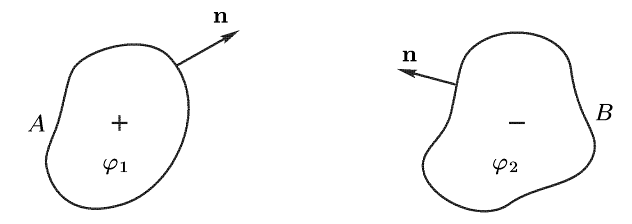


Рис. 119

же потенциале. Будем поддерживать потенциалы электродов φ_1 и φ_2 постоянными. Поставим задачу о нахождении плотности тока, текущего между электродами. Эта задача математически эквивалентна электростатической задаче о поле конденсатора, обкладками которого служат рассматриваемые электроды. Действительно, поскольку токи стационарны, а среда однородна, в ней не могут появиться объемные электрические заряды. Значит, потенциал φ во всем пространстве между электродами должен удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$ и принимать заданные значения φ_1 и φ_2 на электродах A и B. Задача об электрическом поле в конденсаторе формулируется в точности так же. Обе задачи математически тождественны и имеют единственные решения. Поэтому, если пространство между электродами A и B заполнить однородным диэлектриком и поддерживать электроды при прежних потенциалах φ_1 и φ_2, то электрическое поле во всем пространстве вне электродов A и B останется неизменным. Найдя напряженность электрического поля $\mathbf{E}$, можно вычислить затем и плотность тока по формуле $\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}$.

Вычисление полного тока I между электродами — задача еще более простая. Она сводится к вычислению емкости соответствующего конденсатора. Действительно, ток выражается интегралом

$$I = \oint j_n \, dS = \lambda \oint E_n \, dS,$$

распространенным по поверхности положительно заряженного электрода A. Если задаче о токе сопоставить соответствующую электростатическую задачу, то по теореме Гаусса

$$\oint E_n \, dS = \frac{4\pi}{\varepsilon} q = \frac{4\pi}{3} C(\varphi_1 - \varphi_2),$$

где ε — диэлектрическая проницаемость межэлектродного пространства, а C — емкость конденсатора с обкладками A и B. Таким образом,

$$I = \frac{4\pi C\lambda}{3} (\varphi_1 - \varphi_2).$$

С другой стороны, по закону Ома

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R},$$

где R — полное электрическое сопротивление проводящей среды между электродами A и B. Сравнивая обе формулы, получаем

$$R = \frac{\varepsilon}{4\pi C\lambda}, \tag{46.1}$$

после чего находим ток I. Как и следовало ожидать, сопротивление R не зависит от ε, так как емкость конденсатора C сама пропорциональна ε. Не меняя результата, можно было бы взять $\varepsilon = 1$.

Приведем конкретные примеры.

1) Электродами служат концентрические сферы с радиусами a и b. Используя формулу (26.5), получим

$$R = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right). \tag{46.2}$$

2) Электродами являются поверхности коаксиальных цилиндров с высотой l и радиусами a и b. Формулы (46.1) и (26.7) дают

$$R = \frac{1}{2\pi\lambda l} \ln \frac{b}{a}. \tag{46.3}$$

3) Электродами являются два шарика радиуса a, удаленные друг от друга на большое расстояние. В этом случае

$$R = \frac{1}{2\pi\lambda a}. \tag{46.4}$$

Сопротивление R не зависит от расстояния между шариками. Это объясняет результат, эмпирически найденный телеграфистами, обнаружившими, к своему удивлению, что сопротивление земли между телеграфными станциями не зависит от расстояния между ними.

2. Рассмотрим задачу о сопротивлении заземления в более общей постановке. На рис. 120 схематически изображены две станции *1* и *2*. Связь между ними осуществляется проводом *12*. Другим проводом слу-

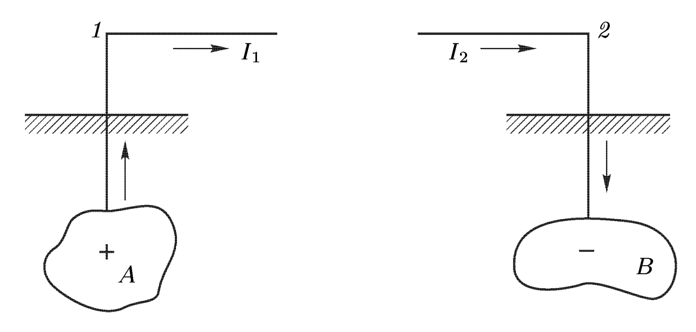


Рис. 120

жит земля. Вблизи каждого из заземленных металлических тел (электродов) A и B почва может считаться однородной средой с удельными проводимостями λ_1 и λ_2. Будем предполагать, что электроды A и B зарыты глубоко, так что влиянием границы между землей и атмосферой на общий ток, текущий между электродами, можно пренебречь. Пусть C_1 и C_2 — емкости электродов A и B, какими они были бы, если бы электроды были уединены и находились в вакууме. Ток I, стекающий с положительного электрода A, зависит только от его потенциала φ_1 и электрической проводимости почвы в окрестности этого электрода. Он практически не зависит от свойств удаленных областей окружающей среды, а потому при вычислении I_1 электрическую проводимость всей среды можно считать постоянной и равной λ_1. Если потенциал бесконечно удаленных точек условиться считать равным нулю, то на основании формулы (46.1) можно написать

$$I_1 = \frac{\varphi_1}{R_1} = 4\pi C_1 \lambda_1 \varphi_1.$$

(Мы приняли $\varepsilon = 1$.) Аналогично, для тока I_2, текущего к отрицательному электроду B, получаем

$$I_2 = -\frac{\varphi_2}{R_2} = -4\pi C_2 \lambda_2 \varphi_2.$$

Станции *1* и *2* соединены между собой проводом *12*, а потому $I_1 = I_2 = I$. Используя это, из предыдущих формул находим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{I}{4\pi}\left(\frac{1}{\lambda_1 C_1} + \frac{1}{\lambda_2 C_2}\right),$$

откуда следует, что сопротивление заземления равно

$$R = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\lambda_1 C_1} + \frac{1}{\lambda_2 C_2}\right). \tag{46.5}$$

В выводе нигде не предполагалось, что весь ток с электрода A, текущий по земле, попадает на электрод B. Такое утверждение неправильно, хотя оно не отразилось бы на формуле (46.5). Было использовано только равенство токов I_1 и I_2, а оно обеспечивается тем, что электроды A и B соединены между собой проводом. Формула (46.5) показывает, что для получения хорошего заземления электроды A и B должны быть больших размеров. Кроме того, окружающая их почва должна обладать хорошей электрической проводимостью.

ЗАДАЧА

Имеется n идеально проводящих тел в вакууме с зарядами $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и потенциалами $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Какое количество теплоты будет выделяться ежесекундно, если пространство между этими телами заполнить однородной жидкостью с электрической проводимостью λ и диэлектрической проницаемостью ε, а потенциалы тел поддерживать при прежних значениях?

Решение. При заполнении пространства проводящей жидкостью электрическое поле между телами не изменится. Количество же ежесекундно выделяющейся теплоты определится выражением $Q = \sum I_k\varphi_k$. Ток, текущий с поверхности k-го проводника,

$$I_k = \oint j_N \, dS,$$

где N — наружная нормаль к этой поверхности. Заряд на поверхности k-го проводника

$$q_k = \frac{1}{4\pi}\oint D_N \, dS = \frac{\varepsilon}{4\pi}\oint E_N \, dS.$$

В результате находим

$$Q = \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon}\sum q_k\varphi_k.$$

§ 47. Электролитическая ванна

1. При конструировании электронных, ионных и многих других приборов надо знать электрические поля между электродами сложной конфигурации. Теоретический расчет таких полей практически невозможен. Экспериментальные измерения полей внутри самих приборов не всегда могут дать достаточную точность ввиду малости размеров отдельных деталей, вблизи которых необходимо измерить распределение поля, а также потому, что многие места внутри конструируемого прибора недоступны для введения зонда. Для экспериментального решения этой задачи применяется *метод электролитической ванны.* Изготовляются увеличенные подобные и подобно расположенные модели электродов, погружаемые затем в однородную слабо проводящую

жидкость (электролит), например в водопроводную воду. Потенциалы электродов модели должны быть пропорциональны потенциалам соответствующих электродов прибора. При этом условии модель воспроизведет в увеличенном масштабе эквипотенциальные поверхности и силовые линии электрического поля заряженных электродов. Поскольку исследуемое пространство теперь заполнено проводящей средой, измерение потенциалов легко осуществить с помощью зонда.

2. При практическом применении метода электролитической ванны возникают экспериментальные трудности. Одна из них заключается в следующем. Размеры ванны должны быть велики по сравнению с размерами исследуемой системы электродов. Сами электроды должны быть погружены в ванну глубоко, чтобы наличие свободной поверхности электролита существенно не искажало исследуемое поле. Но тогда ванна приняла бы слишком большие размеры, затрудняющие экспериментирование с ней. Потребовались бы какие-то приспособления для введения и удержания зонда в нужных точках пространства, а они привели бы к заметным искажениям исследуемого поля. Кроме того, некоторые существенные области изучаемого поля могли бы оказаться недоступными для введения зонда, например все части пространства, полностью окруженные замкнутой металлической оболочкой. Существует изящный способ преодоления подобных трудностей, называемый *методом сечений*. Метод сечений применим для исследования полей, обладающих осевой симметрией. Это — наиболее важный случай, встречающийся на практике. Очевидно, достаточно исследовать распределение электрического потенциала в любой плоскости симметрии, проходящей через ось модели.

Допустим, что исследуемая модель электродов погружена в электролит, заполняющий все бесконечное пространство. Рассечем ее мысленно горизонтальной плоскостью, проходящей через ось симметрии модели. Все силовые линии и линии тока, проходящие через любую точку рассматриваемого сечения, не выходят из его плоскости. Поэтому удаление верхней половины модели и электролита, заполняющего верхнее полупространство, никак не скажется на распределении потенциала и электрическом поле во всем нижнем полупространстве и в самом сечении.

Это может быть доказано и строго математически. Действительно, после удаления всех частей модели и электролита из верхнего полупространства образуется свободная плоская поверхность, ограничивающая нижнее полупространство. В стационарном состоянии токи могут течь вдоль самой границы, но не могут пересекать ее. Так как $\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}$, то отсюда следует, что на границе нормальная составляющая вектора $\mathbf{E}$ равна нулю. Потенциалы всех электродов заданы, в нижнем полупространстве потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$. Этими условиями потенциал и поле $\mathbf{E}$ в нижнем полупространстве определяются однозначно. Но в точности таким же условиям эти величины удовлетворяли и до того, как были удалены

из верхнего полупространства электролит и все верхние части разрезанной модели, так как и в этом случае поле **E** в рассматриваемом сечении не имело нормальной составляющей. Этим наше утверждение доказано.

Теперь ясно, что для воспроизведения изучаемого поля нет необходимости применять цельные электроды. Достаточно взять их половинки, получающиеся разрезанием цельных электродов по плоскости, проходящей через ось симметрии. Это и используется в методе сечений. Изготовленные половинки электродов погружаются в ванну таким образом, чтобы плоскость разреза совместилась со свободной поверхностью электролита. Распределение потенциала достаточно измерить на одной только свободной поверхности, что экспериментально очень удобно.

3. На рис. 121 приведена принципиальная схема электролитической ванны. Электрическое поле образуется между электродами A и B. Зондом S может служить кончик тонкой металлической проволоки. Гальванометр включается между зондом S и подвижной точкой C де-

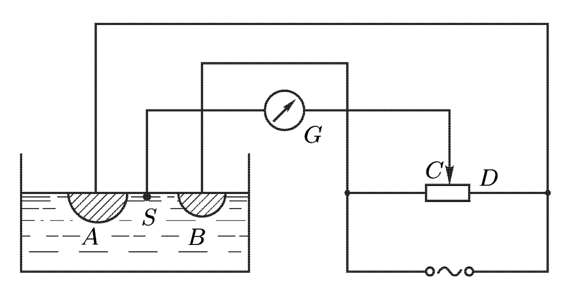


Рис. 121

лителя напряжения. Вместо гальванометра лучше пользоваться электронным осциллографом, соединив точки S и C, например, с его вертикальными пластинами. Перемещая зонд по поверхности электролита, находят такие положения его, при которых ток через гальванометр обращается в нуль. Во всех этих положениях потенциал зонда равен потенциалу точки C делителя напряжения. Все отмеченные точки лежат, таким образом, на линии постоянного потенциала — эквипотенциальной линии. Движение зонда с помощью специальных рычагов передается штифту пантографа, который отмечает положения соответствующих точек на листе бумаги. Соединяя отмеченные точки плавной кривой, находят эквипотенциальную линию в увеличенном масштабе. Затем повторяют то же самое при другом положении движка C, находят другую эквипотенциальную линию и т. д.

Если на электроды подавать постоянное напряжение, то по электролиту будут течь постоянные токи, сопровождающиеся электролизом и выделением на электродах составных частей электролита. Эти токи нарушали бы однородность электролита, приводя к поляризации электродов и к изменению напряжения между ними. Во избежание

этого на электроды подают *переменное напряжение*, например, от клемм городского тока. Условия, при выполнении которых результаты, полученные выше для постоянных полей, могут быть распространены на переменные поля, будут сформулированы ниже (см. задачу к § 144).

§ 48. Процессы установления тока при зарядке и разрядке конденсатора

1. Задачи о разрядке и зарядке конденсатора, строго говоря, выходят за рамки учения о постоянных токах. Приводимые ниже решения их получаются в предположении, что мгновенное значение тока одно и то же во всех поперечных сечениях провода, соединяющего обкладки конденсатора, а мгновенное электрическое поле такое же, как в электростатике при тех же зарядах на обкладках конденсатора. Токи и поля, удовлетворяющие этим условиям, называются *квазистационарными.* В дальнейшем будут точно сформулированы условия, при которых имеет место *квазистационарность* (см. § 123).

Если обкладки заряженного конденсатора соединить проводом, то по проводу потечет ток. Пусть I, Q, φ — мгновенные значения тока, заряда положительной обкладки и разности потенциалов между обкладками. Считая ток в проводе положительным, когда он течет от положительной обкладки к отрицательной, можем написать

$$I = -\frac{dQ}{dt}, \quad RI = \varphi, \quad Q = C\varphi,$$

где C — емкость конденсатора, а R — сопротивление провода. Исключая φ и I, получим

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = 0. \tag{48.1}$$

После интегрирования этого уравнения придем к соотношению

$$Q = Q_0 e^{-t/\tau}, \tag{48.2}$$

где Q_0 — начальное значение заряда конденсатора, а τ — постоянная:

$$\tau = RC, \tag{48.3}$$

имеющая размерность времени. Она называется *временем релаксации.* Через время τ заряд конденсатора убывает в e раз. Поэтому τ по порядку величины равно времени, в течение которого конденсатор разрядится. Дифференцируя (48.2) по t, находим закон изменения тока во времени:

$$I = \frac{Q_0}{\tau} \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\} = I_0 \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}, \tag{48.4}$$

где $I_0 = Q_0/\tau$ — начальное значение тока, т. е. ток при $t = 0$.

Полезно запомнить, что время релаксации определяется формулой (48.3) *во всех системах единиц.* Так, если сопротивление измерять в омах, а емкость в фарадах, то время (48.3) получится в секундах.

2. Аналогично решается задача о зарядке конденсатора. Пусть в цепь конденсатора включена гальваническая батарея или какой-либо другой источник тока с постоянной электродвижущей силой $\mathscr{E}$. Источник возбуждает ток, заряжающий конденсатор. Электрические заряды на обкладках конденсатора препятствуют прохождению тока и уменьшают его. Уравнение $Q = C\varphi$ остается неизменным. Остальные два уравнения запишутся следующим образом:

$$I = \frac{dQ}{dt}, \quad RI = \mathscr{E} - \varphi,$$

где R означает полное сопротивление провода, соединяющего обкладки конденсатора, включая внутреннее сопротивление батареи. (Теперь ток в проводе считается положительным, когда он течет в направлении к положительной обкладке.) Исключая снова I и φ, придем к уравнению

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{\mathscr{E}}{R}. \tag{48.5}$$

Это неоднородное уравнение сведется к однородному, если его записать в виде

$$\frac{d}{dt}(Q - \mathscr{E}C) + \frac{Q - \mathscr{E}C}{RC} = 0.$$

Решая это уравнение, получим

$$Q - \mathscr{E}C = Ae^{-t/\tau}.$$

Значение постоянной интегрирования A найдется из условия, что в начальный момент времени конденсатор не заряжен, т. е. в этот момент $Q = 0$. Это дает $A = -\mathscr{E}C$, и, следовательно,

$$Q = \mathscr{E}C(1 - e^{-t/\tau}). \tag{48.6}$$

При $t \to \infty$ заряд Q стремится к предельному значению $Q_\infty = \mathscr{E}C$. Для тока получаем

$$I = \frac{\mathscr{E}C}{\tau}\, e^{-t/\tau} = \frac{\mathscr{E}}{R}\, e^{-t/\tau}. \tag{48.7}$$

Ток максимален в начальный момент и равен $I_0 = \mathscr{E}/R$. В дальнейшем он убывает по экспоненциальному закону.

3. Если пространство между заряженными электродами заполнено непрерывной средой с электрической проводимостью λ и диэлектрической проницаемостью ε, то можно воспользоваться формулой (46.1). Тогда для времени релаксации получим

$$\tau = RC = \frac{\varepsilon}{4\pi\lambda} = \frac{\varepsilon\rho}{4\pi}. \tag{48.8}$$

Для меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-6}$ Ом $\cdot$ см $= 1{,}9 \cdot 10^{-18}$ с. Формальная подстановка в формулу (48.8) дала бы $\tau \approx 10^{-19}$ с, что примерно в сто тысяч раз меньше инерционного времени электронов (см. § 42, п. 5). Это показывает, что формула (48.8) к металлам неприменима: за время 10^{-19} с электрическое состояние не может распространиться более чем на $3 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-19} = 3 \cdot 10^{-9}$ см. Значит, условие квазистационарности, использованное при выводе формулы (48.8), в случае металлов не выполняется. Заряженное тело, окруженное металлом, будет терять заряд значительно медленнее (но все же практически мгновенно), чем это следует из формулы (48.8). Практически область применимости формулы (48.8) ограничивается только диэлектриками. Идеальных изоляторов, совершенно не проводящих электричество, не существует. Однако их электрическая проводимость на много порядков меньше, чем у металлов. Так, для эбонита $\rho = 10^{16}$ Ом $\cdot$ см $= 1{,}1 \cdot 10^{4}$ с, что превосходит удельное сопротивление меди в 10^{22} раз. Диэлектрическая проницаемость эбонита $\varepsilon = 2{,}7$, а время релаксации $\tau = 2{,}4 \cdot 10^{3}$ с $=$ $= 40$ мин.

Глава III

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 49. Силы, действующие в магнитном поле на движущиеся заряды и токи

1. Магнитные явления были ранее всего обнаружены и изучены на естественных и искусственных магнитах. Да и теперь первоначальное знакомство с этими явлениями лучше всего начинать с магнита. Однако понимание процессов, происходящих в магните, требует предварительного изучения более простых и фундаментальных явлений. Вот почему при изложении современного учения о магнетизме мы не можем следовать историческому пути. Мы изберем дедуктивный метод, положив в основу изложения два экспериментальных факта, которые были установлены в XIX веке: 1) *магнитное поле действует на движущиеся заряды*; 2) *движущиеся заряды создают магнитное поле.* Как и в электростатике, сначала изучим магнитное поле в вакууме, а затем перейдем к изучению магнитного поля в веществе.

2. Начнем с простейшего демонстрационного опыта. В осциллографической трубке получим прямолинейный сфокусированный пучок электронов, движущихся в вакууме слева направо. Попадая на флуоресцирующий экран, пучок оставляет след в виде светящегося пятнышка. Поднесем снизу к пучку северный полюс прямолинейного магнита (рис. 122). Пучок сместится вбок по направлению от читателя. Если магнит поднести южным полюсом, смещение произойдет в про-

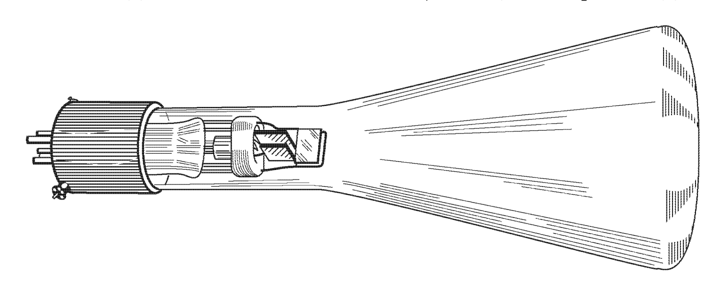


Рис. 122

тивоположную сторону, т. е. к читателю. Если магнит поднести сбоку, то смещение будет происходить вверх или вниз в зависимости от того, каким полюсом и с какой стороны поднесен магнит. Этот и аналогичные опыты показывают, что на движущийся электрон действует сила, перпендикулярная к скорости электрона и к направлению оси магнита,

т. е. к прямой, идущей от одного полюса магнита к другому. Эта сила пропорциональна скорости электрона. Аналогично ведут себя всякие частицы, движущиеся в магнитном поле.

Закон, определяющий силу $\mathbf{F}_m$, действующую на движущийся точечный заряд q в магнитном поле, получен обобщением опытных фактов. Он выражается формулой

$$\mathbf{F}_m = \frac{q}{c}\,[\mathbf{vB}], \tag{49.1}$$

где вектор $\mathbf{B}$ не зависит от величины заряда q и его движения. Он характеризует только магнитное поле, в котором движется заряд q. Вектор $\mathbf{B}$ называется *напряженностью магнитного поля.* Сила $\mathbf{F}_m$ перпендикулярна как к скорости частицы $\mathbf{v}$, так и к вектору $\mathbf{B}$, а ее величина пропорциональна синусу угла между этими векторами. Когда векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{v}$ коллинеарны, сила $\mathbf{F}_m$ обращается в нуль. Формула (49.1) справедлива не только для постоянных, но и для переменных магнитных полей, и притом при любых значениях скорости $\mathbf{v}$.

Постоянную c можно выбрать произвольно. Выбором числового значения и размерности этой постоянной определяется *система единиц.* Целесообразно величине c приписать размерность скорости, так как тогда размерности электрического и магнитного полей будут одинаковы. Именно так поступают в *гауссовой системе единиц.* Числовое значение c мы временно оставим неопределенным.

Отметим особо, что *на покоящийся заряд магнитное поле не действует.* В этом существенное отличие магнитного поля от поля электрического. Индикатором электрического поля служит *покоящийся заряд*, индикатором магнитного поля — *движущийся заряд.*

Формула (49.1) указывает принципиальный способ измерения магнитного поля $\mathbf{B}$ по силе, действующей на движущийся заряд. Для этого с помощью неподвижного заряда надо сначала убедиться, что электрического поля нет. Затем надо найти такое направление скорости $\mathbf{v}$, при котором сила $\mathbf{F}_m$ обращается в нуль. Это будет происходить тогда, когда скорость $\mathbf{v}$ параллельна или антипараллельна вектору $\mathbf{B}$. Тем самым с точностью до знака определится направление магнитного поля $\mathbf{B}$. Наконец, надо измерить силу $\mathbf{F}_m$, когда заряд движется перпендикулярно к $\mathbf{B}$ с какой-то скоростью $\mathbf{v}_\perp$. Очевидно,

$$\mathbf{F}_m = \frac{q}{c}\,[\mathbf{v}_\perp\mathbf{B}].$$

Умножая это соотношение векторно на $\mathbf{v}_\perp$ и принимая во внимание, что $(\mathbf{v}_\perp\mathbf{B}) = 0$, получим

$$\mathbf{B} = \frac{c}{q\mathbf{v}_\perp^2}\,[\mathbf{F}_m\mathbf{v}_\perp]. \tag{49.2}$$

Этой формулой вектор $\mathbf{B}$ определяется однозначно и по модулю, и по направлению. Что величина $\mathbf{B}$ есть вектор (точнее, псевдовектор) — это непосредственно следует из формулы (49.2), представляющей эту величину в виде векторного произведения полярных векторов $\mathbf{F}_m$ и $\mathbf{v}_\perp$.

3. В электрическом поле $\mathbf{E}$ на заряд q действует сила $\mathbf{E}_e = q\mathbf{E}$. Если электрическое и магнитное поля действуют независимо, а такое предположение согласуется с опытными фактами, то при совместном действии электрического и магнитного полей возникает сила $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m$, т. е.

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,[\mathbf{vB}]\right). \tag{49.3}$$

Она называется *силой Лоренца.*

В нерелятивистском приближении сила $\mathbf{F}$, как и всякая другая сила, не зависит от выбора (инерциальной) системы отсчета. Между тем второе слагаемое в формуле (49.3) меняется при переходе от одной системы отсчета к другой. Поэтому должно меняться и первое слагаемое $q\mathbf{E}$. Таким образом, как мы уже подчеркивали (см. § 2, п. 5), разделение полной силы $\mathbf{F}$ на электрическую и магнитную зависит от выбора системы отсчета. Без указания системы отсчета такое разделение теряет смысл.

4. Опыты по действию магнитного поля на движущиеся заряды проще производить не с отдельными зарядами, а с электрическими токами, когда в движение вовлекается сразу очень много заряженных частиц. Допустим, например, что ток создается движением одинаковых частиц с зарядом e и концентрацией n. Тогда $\mathbf{j} = ne\mathbf{v}$. Число частиц в объеме dV будет $dN = n dV$, а сила, действующая в магнитном поле на элемент объема тела dV,

$$d\mathbf{F} = \frac{e}{c}\,[\mathbf{vB}]\,dN = \frac{ne}{c}\,[\mathbf{vB}]\,dV,$$

или

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{c}\,[\mathbf{j}\,\mathbf{B}]\,dV. \tag{49.4}$$

Конечно, это выражение справедливо и в более общем случае, когда носителями тока являются разные заряды.

Рассмотрим частный случай, когда ток I течет вдоль бесконечно тонкого провода с площадью поперечного сечения S. Возьмем бесконечно короткий участок провода длины dl и вычислим действующую на него силу $d\mathbf{F}$. Если $dV = S\,dl$ — объем этого участка, то $\mathbf{j}\,dV = jS\,d\mathbf{l}$, или

$$\mathbf{j}\,dV = I\,d\mathbf{l}, \tag{49.5}$$

причем направление вектора $d\mathbf{l}$ совпадает с направлением тока. Вектор $\mathbf{j}\,dV$ называется *объемным*, а $I\,d\mathbf{l}$ — *линейным элементом тока.* Из соотношений (49.4) и (49.5) получаем

$$d\mathbf{F} = \frac{I}{c}\,[d\mathbf{l}\,\mathbf{B}]. \tag{49.6}$$

Формула (49.6), определяющая силу, действующую в магнитном поле на линейный элемент тока, была установлена Ампером и носит название *закона Ампера.* Сила, действующая на провод конечной длины,

найдется из (49.6) интегрированием по всей длине провода:

$$\mathbf{F} = \int \frac{1}{c}\,[d\mathbf{l}\,\mathbf{B}]. \qquad (49.7)$$

Силы, действующие на токи в магнитных полях, называются *амперовыми силами.*

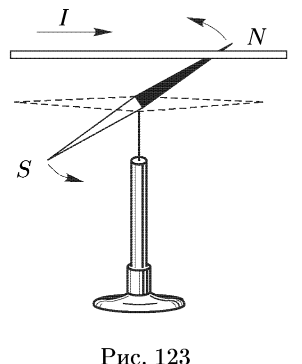


Рис. 123

Итак, *магниты действуют на электрические токи. Токи также действуют на магниты.* Примером может служить классический *опыт Эрстеда* (1777–1851). Эрстед поместил над магнитной стрелкой прямолинейный провод (рис. 123), параллельный стрелке. Стрелка могла свободно вращаться вокруг вертикальной оси. При пропускании по проводу электрического тока стрелка отклонялась в сторону и устанавливалась перпендикулярно к проводу. При изменении направления тока стрелка поворачивалась на 180°. То же самое происходило, когда провод переносился вниз и располагался под стрелкой. Опыт Эрстеда был произведен в 1820 г. На нем впервые была установлена связь между электрическими и магнитными явлениями.

§ 50. Магнитное поле равномерно движущегося заряда. Закон Био и Савара

1. Сформулируем теперь закон, определяющий магнитное поле движущегося точечного заряда q, ограничиваясь при этом равномерными движениями с малыми скоростями. (Точное определение медленности движения будет приведено ниже.) Такой закон был получен обобщением опытных фактов и выражается формулой

$$\mathbf{B} = \frac{q}{c' r^3}\,[\mathbf{v}\mathbf{r}],$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный от заряда q к точке наблюдения, а c' — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц. Электрическое поле неподвижного заряда той же величины q в той же точке наблюдения определяется выражением

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^3}\,\mathbf{r}. \qquad (50.1)$$

(Такое же выражение годится и для медленно движущихся зарядов.) С использованием этого выражения предыдущая формула может быть записана в виде $\mathbf{B} = (1/c')[\mathbf{v}\mathbf{E}]$. В гауссовой системе единиц величины $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ имеют одинаковую размерность. Поэтому постоянная c' должна в этой системе иметь размерность скорости. Для простоты она выбирается равной постоянной c, введенной в предыдущем параграфе.

Условием $c' = c$, как будет видно из дальнейшего изложения, однозначно определяется и числовое значение c. Так определенная скорость c называется *электродинамической постоянной*. Измерения показали, что она совпадает со *скоростью света в вакууме*. Медленность движения, о которой говорилось выше, надо понимать в том смысле, что скорость v должна быть очень мала по сравнению с величиной c $(v \ll \ll c)$.

Таким образом,

$$\mathbf{B} = \frac{q}{cr^3}[\mathbf{vr}], \tag{50.2}$$

или

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}[\mathbf{vE}]. \tag{50.3}$$

2. Используем приведенные формулы для вычисления сил взаимодействия двух движущихся точечных зарядов q_1 и q_2. Это взаимодействие складывается из *электрического* (по закону Кулона) и *магнитного*. Ниже речь идет только о магнитном взаимодействии. Пусть $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ означают скорости движущихся зарядов. Магнитное поле, создаваемое зарядом q_1 в точке нахождения заряда q_2, будет

$$\mathbf{B}_1 = \frac{q_1}{cr_{12}^3}[\mathbf{v}_1\mathbf{r}_{12}],$$

где $\mathbf{r}_{12}$ — радиус-вектор, проведенный от первого заряда ко второму. На заряд q_2 это поле действует с силой

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_2}{c}[\mathbf{v}_2\mathbf{B}_1] = \frac{q_1q_2}{c^2r_{12}^3}[\mathbf{v}_2[\mathbf{v}_1\mathbf{r}_{12}]]. \tag{50.4}$$

Аналогично, заряд q_2 действует на заряд q_1 с силой

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{q_2q_1}{c^2r_{21}^3}[\mathbf{v}_1[\mathbf{v}_2\mathbf{r}_{21}]], \tag{50.5}$$

где радиус-вектор $\mathbf{r}_{21}$ проведен от заряда *2* к заряду *1*.

Если скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ параллельны, одинаково направлены и перпендикулярны к вектору $\mathbf{r}_{12}$ (рис. 124), то в случае одноименных зарядов $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$ будут силами притяжения, а в случае разноименных — силами отталкивания. Эти силы определяются выражением

$$F_{12} = F_{21} = F = \frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\left(\frac{v_1v_2}{c^2}\right). \tag{50.6}$$

$\mathbf{v}_1$ $\mathbf{v}_2$ q_1 q_2 $\mathbf{F}_{21}$ $\mathbf{F}_{12}$

Рис. 124

В частности, когда скорости одинаковы,

$$F = \frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\left(\frac{v}{c}\right)^2. \tag{50.7}$$

Если скорости антипараллельны, то при тех же условиях одноименные заряды будут отталкиваться, а разноименные — притягиваться.

В формулы (50.6) и (50.7) магнитное поле не входит. Этими формулами, как уже говорилось выше, электродинамическая постоянная c определяется однозначно, так как все прочие величины, входящие в указанные формулы, определены и могут быть экспериментально измерены. Впрочем, формулы (50.6) и (50.7) указывают лишь на принципиальную возможность измерения постоянной c. Для практических измерений они не пригодны. Практический метод измерения постоянной c будет указан в § 51.

В общем случае силы магнитного взаимодействия $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$ не удовлетворяют принципу равенства действия и противодействия. Особенно резко нарушение этого принципа проявляется тогда, когда скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ взаимно перпендикулярны, причем скорость $\mathbf{v}_2$ направлена вдоль вектора $\mathbf{r}_{12}$ (рис. 125). Тогда $\mathbf{B}_2 \sim [\mathbf{v}_2\mathbf{r}_{21}] = 0$, так что $\mathbf{F}_{21} = 0$. Между тем, как видно из рисунка, $\mathbf{F}_{12} \neq 0$. Но мы уже неоднократно подчеркивали, что для взаимодействий, осуществляющихся посредством полей, соблюдение принципа равенства действия и противодействия не обязательно.

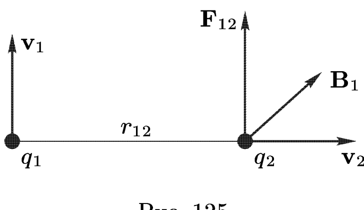


Рис. 125

3. Формула (50.7) показывает, что отношение силы магнитного взаимодействия движущихся зарядов к силе их кулоновского притяжения или отталкивания порядка $(v/c)^2$. Скорости установившегося движения электронов в металлах при прохождении электрического тока не превышают нескольких сантиметров в секунду, а в электролитах они еще меньше. Таким образом, отношение $(v/c)^2$ ничтожно и не превышает примерно 10^{-20}. Почему же электродвигатели приводят в движение именно магнитные (амперовы) силы, по сравнению с которыми силы электростатического взаимодействия не играют никакой роли? Все дело в том, что *в переносе тока участвует громадное количество заряженных частиц*, и это обстоятельство компенсирует малость множителя $(v/c)^2$. При этом существенно, что действие магнитного поля на движущийся заряд q определяется не q и $\mathbf{v}$ в отдельности, а произведением этих величин $q\mathbf{v}$. Когда течет ток, то заряды противоположных знаков движутся в противоположных направлениях, так что произведение $q\mathbf{v}$ имеет для них один и тот же знак. Силы, действующие в магнитном поле на частицы противоположных знаков, *арифметически складываются*, а не вычитаются. Точно так же магнитные поля, возбуждаемые движущимися зарядами, зависят от произведения $q\mathbf{v}$, а потому поля противоположных зарядов также *арифметически складываются.* Совсем иначе ведут себя электрические заряды по отношению к электрическим полям. С одной стороны, в выражения для напряженностей электрических полей и сил, действующих на заряды в таких полях,

скорость $\mathbf{v}$ не входит. Силы, действующие на положительные и отрицательные заряды, направлены противоположно, а потому *арифметически вычитаются.* С другой стороны, даже в электрически заряженном теле *заряды определенного знака в высокой степени скомпенсированы зарядами противоположного знака.* Как бы ни был велик электрический заряд тела, все же он ничтожно мал по сравнению с суммарным зарядом входящих в него частиц одного знака (см. § 10, п. 4). Вот почему магнитные силы намного превосходят электрические силы, действующие на нескомпенсированные заряды тел.

4. Получим теперь закон, определяющий магнитное поле отдельного элемента тока. Как и в электростатике, будем исходить из *принципа суперпозиции* как обобщения опытных фактов. Согласно этому принципу *магнитные поля отдельных движущихся зарядов векторно складываются, причем каждый заряд возбуждает поле, совершенно не зависящее от наличия других зарядов.* С использованием формулы (50.2) принцип суперпозиции приводит к следующему выражению для магнитного поля объемного элемента тока:

$$d\mathbf{B} = \frac{1}{c}\,\frac{[\mathbf{j}\,\mathbf{r}]}{r^3}\,dV. \qquad (50.8)$$

Аналогично, для линейного элемента тока:

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{c}\,\frac{[d\mathbf{l}\,\mathbf{r}]}{r^3}. \qquad (50.9)$$

Эти формулы выражают так называемый *закон Био* (1774–1862) *и Савара* (1791–1841). Полное поле найдется интегрированием выражений (50.8) и (50.9) по всем токам, т. е.

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}\int \frac{[\mathbf{j}\,\mathbf{r}]}{r^3}\,dV, \qquad (50.10)$$

или

$$\mathbf{B} = \oint \frac{I}{c}\,\frac{[d\mathbf{l}\,\mathbf{r}]}{r^3}. \qquad (50.11)$$

Оба эти выражения применимы лишь *для постоянных токов.* А постоянные токи всегда замкнуты. Все наблюдаемые величины не изменились бы, если бы в правой части формулы (50.9) было добавлено произвольное слагаемое, интеграл от которого по любому замкнутому контуру обращается в нуль. Поэтому в рамках учения о постоянных токах элементарный закон Био и Савара в форме (50.8) или (50.9) *принципиально недоступен опытной проверке*, так как невозможно изолировать отдельные элементы постоянных токов и экспериментировать с ними. *Опытной проверке доступна только интегральная форма закона Био и Савара* (50.10) *или* (50.11). По этой причине в основу учения о магнитном поле постоянных токов мы положили не элементарный закон Био и Савара, как это обычно принято, а закон, определяющий магнитное поле движущегося заряда. *Поле движущегося заряда принципиально всегда может быть измерено на опыте*, хотя практически это и весьма

трудная задача. И действительно, установление того факта, что движущиеся макроскопические заряды создают магнитные поля, было получено с большим трудом. Впервые это удалось сделать в 1877 г. Роуланду (1848–1901) в лаборатории Гельмгольца. Его работа была продолжена многими учеными и завершилась фундаментальными исследованиями А. А. Эйхенвальда (1863–1944), выполненными в Москве в 1901–1904 гг. Из формул (50.4) и (50.5) следует, что параллельные токи должны притягиваться, а антипараллельные — отталкиваться.

§ 51. Расчет магнитных полей с помощью закона Био и Савара. Системы единиц

1. Рассмотрим сначала очень длинный прямолинейный провод, по которому течет постоянный ток I. Подводящие провода должны быть расположены настолько далеко, чтобы их магнитными полями в рассматриваемой области пространства можно было полностью пренебречь. Тогда провод может считаться бесконечно длинным. Магнитное поле элемента тока $I\,d\mathbf{l}$ (рис. 126) дается выражением

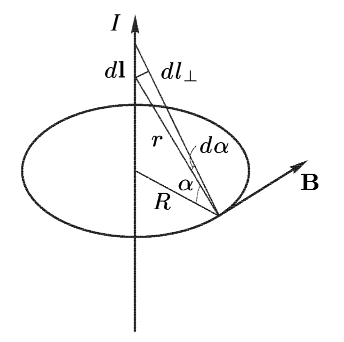


Рис. 126

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{cr^3}\,[d\mathbf{l}\,\mathbf{r}] = \frac{I}{cr^3}\,[d\mathbf{l}_\perp \mathbf{r}],$$

где $d\mathbf{l}_\perp$ — составляющая вектора $d\mathbf{l}$, перпендикулярная к $\mathbf{r}$. Магнитные силовые линии будут окружностями, центры которых расположены на оси провода. В скалярной форме:

$$dB = \frac{I}{cr^2}\,dl_\perp = \frac{I}{cr}\,d\alpha,$$

где $d\alpha$ — угол, под которым вектор $d\mathbf{l}$ виден из точки наблюдения. Введя расстояние до провода $R = r\cos\alpha$, получим $dB = I\cos\alpha\,d\alpha/(cR)$. Интегрирование этого выражения от $\alpha = -\pi/2$ до $\alpha = +\pi/2$ дает искомый результат:

$$B = \frac{2I}{cR}. \tag{51.1}$$

Теперь нетрудно рассчитать взаимодействие двух бесконечно длинных параллельных постоянных токов I_1 и I_2. Первый ток в месте нахождения второго создает магнитное поле $B_1 = 2I_1/(cR)$, где R — расстояние между токами. Это поле действует на участок второго тока длины l с силой $F = I_2 l B_1/c$, или

$$F = \frac{2}{Rc^2}\,I_1 I_2 l. \tag{51.2}$$

Измерив F, можно по этой формуле вычислить значение электродинамической постоянной c. Впервые эта постоянная была измерена

несколько иным путем Вильгельмом Вебером и Рудольфом Кольраушем (1809–1858) в 1856 г. Они пришли к поразительному результату, что в пределах ошибок измерений *величина c совпадает со скоростью света в вакууме.* Последующие измерения других ученых не оставили никаких сомнений в том, что электродинамическая постоянная и скорость света в вакууме — это *одна и та же физическая постоянная.* Теоретические исследования Максвелла показали, что этот фундаментальный результат является выражением *электромагнитной природы света.*

2. Знание числового значения c открывает возможность рационального построения системы единиц в учении об электрических и магнитных полях. Если ввести обозначение $q^{(m)} = q/c$, то основные формулы (49.1) и (50.2) перепишутся без множителя c:

$$\mathbf{F} = q^{(m)}[\mathbf{vB}], \tag{51.3}$$

$$\mathbf{B} = \frac{q^{(m)}}{r^3}\,[\mathbf{vr}]. \tag{51.4}$$

Тем самым вводятся новые единицы заряда (и тока) — в c раз большие соответствующих электростатических единиц и отличающиеся от них размерностью. На них основана так называемая *магнитная система СГС*, обозначаемая кратко СГСМ. Десятая доля СГСМ-единицы заряда называется *кулоном*, а силы тока — *ампером*. Это — *точные определения* кулона и ампера. (Не совсем точные определения, которыми мы пользовались до сих пор, использовали приближенное значение электродинамической постоянной $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ см/с.)

Теперь можно дать определение единицы напряженности магнитного поля, которая называется *гауссом.* Допустим, что векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$ взаимно перпендикулярны и что $q^{(m)} = 1$ СГСМ-ед., $v = 1$ см/с, $B = 1$ Гс. Тогда формула (51.3) дает $F = 1$ дин. Это приводит к следующему определению. *Гаусс есть индукция такого магнитного поля, которое действует на заряд в одну СГСМ-единицу с силой в одну дину, если сам заряд движется перпендикулярно к магнитному полю со скоростью* 1 см/с. Легко переформулировать это определение, используя вместо единицы электрического заряда единицу электрического тока. Для получения конкретного представления о гауссе заметим, что напряженность земного магнитного поля меняется приблизительно от 0,4 Гс (на экваторе) до 0,7 Гс (на полюсе). В геомагнетизме применяется также более мелкая единица — *гамма* (γ). По определению $1\gamma = 10^{-5}$ Гс.

Система СГСЭ применяется только для измерения чисто электрических величин: заряда, напряженности и смещения электрического поля, электрического потенциала, емкости, электродвижущей силы, электрической проводимости, электрического сопротивления и пр. Система СГСМ, напротив, применяется лишь для измерения чисто магнитных величин: напряженности и индукции магнитного поля, магнитного потока, коэффициентов само- и взаимоиндукции, магнитных моментов, вектора намагничивания и пр. Ни одна из этих систем никогда не

используется как единая система для измерения всех электрических и магнитных величин. Гауссова система, которой мы пользуемся, является *комбинированной.* Единицы чисто электрических величин в ней совпадают с единицами СГСЭ, а единицы чисто магнитных величин — с единицами СГСМ.

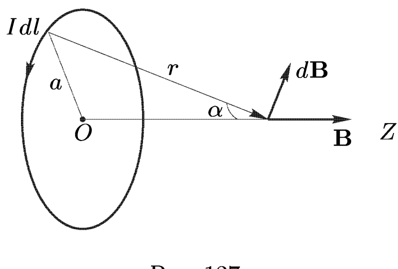


Рис. 127

3. Вычислим напряженность магнитного поля кругового тока на его оси (рис. 127). Элемент тока $I\,d\mathbf{l}$ возбуждает магнитное поле $d\mathbf{B}$, перпендикулярное к радиусу-вектору $\mathbf{r}$. Разложим это поле на две слагающие: осевую $d\mathbf{B}_z$ и радиальную $d\mathbf{B}_r$. При интегрировании по контуру кругового тока радиальные слагающие взаимно уничтожаются. Результирующее поле будет направлено вдоль оси Z, и надо интегрировать только осевую составляющую

$$dB_z = \frac{I\,dl}{cr^2}\sin\alpha.$$

Угол α один и тот же для всех точек кругового тока. Интегрирование сводится к простому умножению на длину контура $2\pi a$. Таким образом,

$$B_z = B = \frac{2\pi a I}{cr^2}\sin\alpha = \frac{2\pi a^2 I}{cr^3}. \tag{51.5}$$

В точках, не лежащих на оси, выражение для поля кругового тока имеет сложный вид.

4. Иногда удобно вводить в рассмотрение *поверхностные токи*, т. е. токи, текущие по тонким поверхностным слоям тел. Проведем на обтекаемой током поверхности линию, перпендикулярную к направлению тока. Ток, приходящийся на единицу длины такой линии, называется *линейной плотностью тока* и рассматривается как вектор $\mathbf{i}$, направленный вдоль тока. За положительное направление обхода вокруг поверхностного, как и всякого другого тока, принимается направление вращения ручки правого буравчика, ориентированного по току, если при таком вращении буравчик ввинчивается в направление тока.

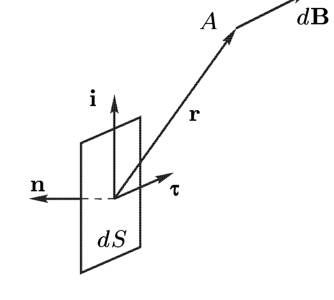


Рис. 128

Пусть по площадке dS (рис. 128) течет постоянный поверхностный ток с линейной плотностью $\mathbf{i}$. Площадку с током можно рассматривать как поверхностный элемент тока $\mathbf{i}\,dS$,

создающий магнитное поле

$$d\mathbf{B} = \frac{[\mathbf{ir}]}{cr^3}\,dS.$$

Вектор $d\mathbf{B}$ перпендикулярен к току $\mathbf{i}$. Его можно разложить на составляющую $d\mathbf{B}_\tau$, касательную к площадке dS, и на составляющую $d\mathbf{B}_n$, перпендикулярную к ней. Найдем составляющую $d\mathbf{B}_\tau$. Единичный вектор $\boldsymbol{\tau}$ расположим в плоскости площадки dS, ориентируя его в положительном направлении обхода перпендикулярно к току $\mathbf{i}$, как указано на рис. 128. Единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ можно направить произвольно. Очевидно,

$$dB_\tau = (\boldsymbol{\tau}\,d\mathbf{B}) = i\frac{\boldsymbol{\tau}[\mathbf{i}_1\mathbf{r}]}{cr^3}\,dS = i\frac{[\boldsymbol{\tau}\mathbf{i}_1]\mathbf{r}}{cr^3}\,dS,$$

где $\mathbf{i}_1$ — единичный вектор в направлении тока $\mathbf{i}$. Так как $[\boldsymbol{\tau}\mathbf{i}_1] = -\mathbf{n}$, то

$$dB_\tau = -i\frac{(\mathbf{rn})}{cr^3}\,dS = \frac{i}{c}\,d\Omega, \qquad (51.6)$$

где $d\Omega$ — телесный угол, под которым из точки наблюдения A видна внутренняя сторона площадки dS.

5. Применим вспомогательную формулу (51.6) к цилиндрической трубке, по поверхности которой перпендикулярно к ее образующим течет постоянный ток с линейной плотностью i (рис. 129). Такая трубка с током называется *соленоидом.* Найдем магнитное поле соленоида на его оси. Из соображений симметрии ясно, что поле $\mathbf{B}$ направлено вдоль оси соленоида. Поэтому для нахождения $\mathbf{B}$ достаточно просуммировать касательные составляющие dB_τ создаваемые отдельными поверхностными элементами тока. Поскольку величина i постоянна по всей поверхности соленоида, формула (51.6) дает

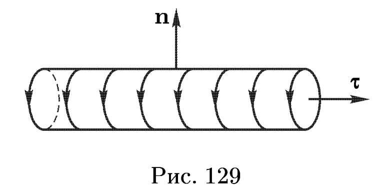


Рис. 129

$$B = \frac{i}{c}\,\Omega, \qquad (51.7)$$

где Ω — полный телесный угол, под которым из точки наблюдения видна внутренняя поверхность соленоида. Формула (51.7) верна независимо от того, находится ли точка наблюдения внутри или вне соленоида.

В частном случае, когда соленоид длинный, а точка наблюдения лежит внутри него далеко от его концов, можно пренебречь телесными углами, под которыми видны основания трубки соленоида. Иными словами, соленоид можно считать бесконечно длинным. В таком случае $\Omega = 4\pi$, т. е.

$$B = \frac{4\pi}{c}\,i. \qquad (51.8)$$

На концах соленоида напряженность поля будет вдвое меньше. В дальнейшем будет показано, что формула (51.8) справедлива в любой точке внутри соленоида, а не только на его оси.

Проволочную спираль, шаг которой мал по сравнению с радиусом витка, можно приближенно рассматривать как соленоид. Пусть по спирали течет постоянный ток I. Если N — число витков спирали, а l — ее длина, то $i = NI/l$. Поэтому

$$B = \frac{4\pi}{c}\frac{NI}{l}. \tag{51.9}$$

Эта формула не учитывает наклон витков спирали. Кроме того, она неприменима в непосредственной близости от проволоки, а также внутри нее.

§ 52. Момент сил, действующих на виток с током в магнитном поле

1. Результирующая сила, действующая на виток с током в постоянном магнитном поле, дается выражением

$$\mathbf{F} = \frac{I}{c}\oint [d\mathbf{l}\,\mathbf{B}],$$

где интегрирование производится по контуру витка. Если магнитное поле однородно, то вектор $\mathbf{B}$ можно вынести из-под знака интеграла. Задача сведется к вычислению векторного интеграла $\oint d\mathbf{l}$, а такой интеграл равен нулю. Значит, в однородном поле равна нулю и сила $\mathbf{F}$. Однако момент этой силы $\mathbf{M}$, вообще говоря, в нуль не обращается. Займемся его вычислением.

2. Рассмотрим сначала плоский виток, плоскость которого параллельна магнитному полю $\mathbf{B}$ (рис. 130). Проведя достаточно часто маг-

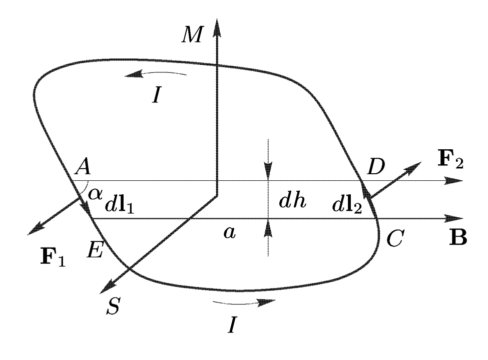


Рис. 130

нитные силовые линии, разобьем виток на пары элементов тока $I\,d\mathbf{l}_1$ и $I\,d\mathbf{l}_2$. Действующие на них амперовы силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ перпендикулярны

к плоскости витка и противоположны по направлению. По закону Ампера $F_1 = IB\,dl_1 \sin\alpha/c = IB\,dh/c$, где dh — высота криволинейного четырехугольника $AECD$. Тем же выражением определяется значение силы F_2. Таким образом, $F_1 = F_2$, т. е. $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ образуют пару сил с моментом $dM = IBa\,dh/c = IB\,dS/c$, где a — плечо пары, а dS — площадь четырехугольника $AECD$. Интегрированием получаем $M = IBS/c$, где S — площадь, охватываемая рассматриваемым витком тока. Вращающий момент $\mathbf{M}$ направлен вертикально вверх. Введем вектор площади контура $\mathbf{S}$, образующий с направлением тока правовинтовую систему. (Вектор $\mathbf{S}$ перпендикулярен к плоскости рисунка и направлен к читателю.) Тогда полученный результат можно записать в векторной форме:

$$\mathbf{M} = [\mathfrak{M}\mathbf{B}], \tag{52.1}$$

где введено обозначение

$$\mathfrak{M} = \frac{I}{c}\,\mathbf{S}. \tag{52.2}$$

Вектор $\mathfrak{M}$ называется *магнитным моментом тока.*

Допустим теперь, что плоскость витка перпендикулярна к магнитному полю. В этом случае амперова сила $d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}\,\mathbf{B}]/c$, действующая на элемент тока $I\,d\mathbf{l}$, будет лежать в плоскости витка и будет равна по модулю $IB\,dl/c$. Такие силы, в зависимости от направления тока, будут только растягивать или сжимать виток. Однако их момент равен нулю. В этом нетрудно убедиться, когда виток имеет форму прямоугольника или треугольника (рис. 131). (Точки означают, что магнитное поле перпендикулярно к плоскости рисунка и направлено

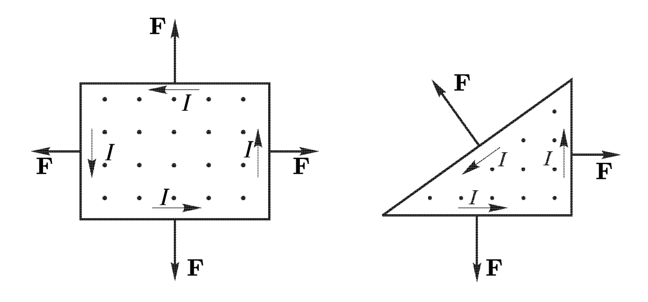


Рис. 131

к читателю.) Но к этим частным случаям сводится и общий случай, когда форма (плоского) витка произвольна. Достаточно провести прямые, разбивающие плоскость витка на бесконечно малые прямоугольники и треугольники, и вообразить, что по этим прямым в противоположных направлениях пропущены равные токи силой I (рис. 132). Добавление таких токов ничего не меняет, так как полный ток, текущий по каждой вспомогательной прямой, равен нулю. Однако теперь полный

момент $\mathbf{M}$ может быть представлен в виде суммы моментов, действующих на элементарные прямоугольники и треугольники. Поскольку эти моменты равны нулю, будет равен нулю и полный момент $\mathbf{M}$.

Рассмотрим, наконец, случай, когда магнитное поле направлено под углом к плоскости контура. Представим вектор $\mathbf{B}$ в виде $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\parallel} + \mathbf{B}_{\perp}$, где $\mathbf{B}_{\parallel}$ — составляющая вектора $\mathbf{B}$, параллельная, а $\mathbf{B}_{\perp}$ — перпендикулярная к плоскости контура. Вторая составляющая не вносит вклада в момент $\mathbf{M}$. Поэтому $\mathbf{M} = [\mathfrak{M}\mathbf{B}_{\parallel}] = [\mathfrak{M}\mathbf{B}]$. Таким образом, и в этом случае справедлива формула (52.1).

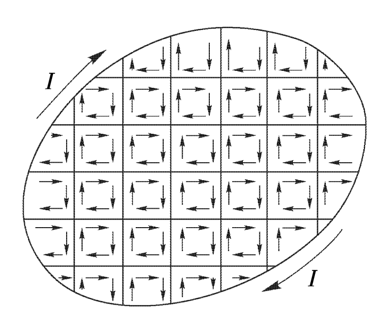


Рис. 132

Формула (52.1) верна и в том случае, когда контур тока не плоский, однако магнитное поле однородно. Чтобы убедиться в этом, натянем на контур с током произвольную поверхность S и разобьем ее вспомогательными линиями на элементарные площадки $d\mathbf{S}$ подобно тому, как это сделано на рис. 132. Пропустив по этим вспомогательным линиям равные и противоположно направленные токи силой I, представим момент $\mathbf{M}$ в виде суммы моментов, действующих на такие элементарные площадки. Но каждая площадка, ввиду ее бесконечной малости, может рассматриваться как плоская и к ней применима формула (52.1). Сложив моменты, действующие на элементарные площадки, снова получим формулу (52.1), причем магнитный момент тока $\mathfrak{M}$ будет определяться прежним выражением (52.2), в котором под вектором $\mathbf{S}$ следует понимать векторный интеграл $\mathbf{S} = \int d\mathbf{S}$, взятый по поверхности S, натянутой на контур тока. Вектор $\mathbf{S}$ не зависит от выбора вспомогательной поверхности S, а только от контура, на который она натянута.

Формула (52.1) справедлива и для соленоида, поскольку последний можно рассматривать как систему кольцевых токов. Магнитный момент соленоида, очевидно, определяется прежней формулой (52.2), если под I понимать полный ток, текущий по боковой поверхности соленоида, а под S — площадь его поперечного сечения. Для проволочной спирали с малым шагом, состоящей из N витков, $\mathfrak{M} = NI\mathbf{S}/c$.

3. Под действием вращающего момента $\mathbf{M}$ виток или катушка будут поворачиваться так, чтобы векторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{B}$ стали параллельными и одинаково направленными. Это — положение устойчивого равновесия. В положении, когда $\mathfrak{M}$ и $\mathbf{B}$ параллельны и направлены противоположно, также имеет место равновесие, но такое равновесие неустойчивое.

Формула (52.1) приближенно применима и для неоднородных магнитных полей. Необходимо только, чтобы размеры витка или катушки были малы. Тогда влиянием неоднородности поля на вращающий момент можно пренебречь. Такие витки и катушки могут быть использованы для практических измерений магнитных полей. Тогда они

называются *пробными.* Пробные витки и катушки играют в магнитных измерениях ту же роль, что и пробные заряды в электрических измерениях. Если пробную катушку поместить в магнитное поле, то ее магнитный момент $\mathfrak{M}$ установится вдоль поля $\mathbf{B}$. Повернем катушку из этого положения на 90°, чтобы вращающий момент $\mathbf{M}$ обратился в максимум. Тогда магнитный момент $\mathfrak{M}$ будет перпендикулярен к вектору $\mathbf{B}$, т. е. $(\mathfrak{M}\mathbf{B}) = 0$. Поэтому, умножая равенство (52.1) векторно на $\mathfrak{M}$, получим

$$\mathbf{B} = \frac{[\mathbf{M}\mathfrak{M}]}{\mathfrak{M}^2}. \qquad (52.3)$$

Измерив вращающий момент $\mathbf{M}$, можно по этой формуле найти напряженность магнитного поля как по модулю, так и по направлению. В частности, такие измерения позволяют проверить закон Био и Савара в интегральной форме (50.11).

§ 53. Теорема Гаусса для магнитных полей

Элементарный закон (50.2) определяет магнитное поле равномерно движущегося точечного заряда. Предполагая, что магнитное поле возбуждается только такими зарядами, найдем поток вектора $\mathbf{B}$ (называемый для краткости *магнитным потоком*) через замкнутую поверхность, а также циркуляцию того же вектора по замкнутому контуру.

Начнем с вычисления магнитного потока. Для магнитных полей движущихся зарядов справедлив принцип суперпозиции. Кроме того, поток геометрической суммы нескольких векторов через любую поверхность равен алгебраической сумме потоков этих векторов через ту же поверхность. Поэтому при вычислении магнитного потока достаточно ограничиться частным случаем, когда поле $\mathbf{B}$ создается отдельным точечным зарядом, равномерно движущимся со скоростью $\mathbf{v}$.

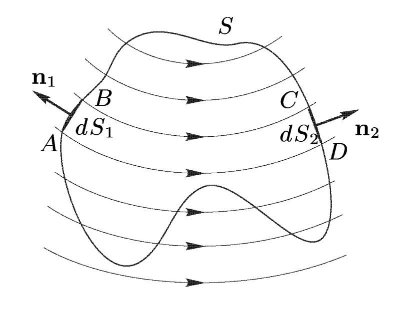


Рис. 133

Докажем, что *магнитный поток через произвольную замкнутую поверхность S равен нулю* (рис. 133). Для простоты будем предполагать, что заряд равномерно движется перпендикулярно к плоскости рисунка. Магнитными силовыми линиями будут коаксиальные окружности, плоскости которых параллельны плоскости рисунка, а центры расположены на прямой, вдоль которой движется заряд. Возьмем бесконечно тонкую кольцевую трубку $ABCD$, образованную магнитными силовыми линиями. Ввиду осевой симметрии магнитный поток через поперечное сечение трубки будет оставаться постоянным на всем ее протяжении.

Трубка пересечет замкнутую поверхность S четное число раз, например два. Магнитные потоки через площадки $d\mathbf{S}_1$ и $d\mathbf{S}_2$, которые трубка вырезает из поверхности S, одинаковы по величине, но противоположны по знаку. Сумма потоков через такие площадки равна нулю. То же справедливо и в том случае, когда трубка пересекает поверхность S произвольное число раз, поскольку это число всегда четное. Но все пространство можно разбить на бесконечно тонкие кольцевые магнитные трубки, и каждая из них не будет вносить никакого вклада в магнитный поток через замкнутую поверхность S. Суммарный магнитный поток через такую поверхность будет равен нулю. Теорема доказана.

Итак,

$$\oint (\mathbf{B}\, d\mathbf{S}) = 0, \tag{53.1}$$

или в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \tag{53.2}$$

В учении об электрическом поле соответствующие уравнения имели вид

$$\oint (\mathbf{E}\, d\mathbf{S}) = 4\pi q, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho.$$

Можно было бы предполагать, как это делалось на ранней стадии учения о магнетизме, что источниками магнитного поля являются *магнитные заряды*, взаимодействующие по закону Кулона. Однако такое предположение не согласуется с формулой (53.1). Она показывает, что *магнитных зарядов не существует*. Понятно, что справедливость столь фундаментального результата не может ограничиваться рамками учения о постоянных магнитных полях. Поэтому естественно ожидать, что *уравнение* (53.1) *или эквивалентное ему уравнение* (53.2) *справедливы также для любых магнитных полей*. Все опытные факты подтверждают это заключение. Уравнения (53.1) и (53.2) входят как составные части в *систему уравнений Максвелла*.

Силовые поля, дивергенция которых всюду обращается в нуль, называются *бездивергентными* или *соленоидальными полями*. Следовательно, *магнитное поле есть поле соленоидальное. Его источниками являются не магнитные заряды, а электрические токи*.

§ 54. Дополнительные сведения о телесных углах

1. О телесных углах говорилось в § 5. Для дальнейшего понятие телесного угла необходимо обобщить. Возьмем произвольный замкнутый контур L и натянем на него произвольную замкнутую поверхность S (рис. 134 *а*). На контуре L установим положительное направление обхода, а на поверхности S — положительное направление нормали $\mathbf{n}$. Эти направления должны быть согласованы между собой так, чтобы они находились в правовинтовом соотношении. Для упрощения рассуждений будем пользоваться плоскими, а не пространственными рисунками. Сечение замкнутого контура L плоскостью рисунка изобразим двумя кружками. Кружок с точкой внутри него

означает, что контур пересекает плоскость рисунка в направлении к читателю, а кружок с крестиком — в направлении от читателя. Как и раньше, сторону поверхности S, в которую нормаль $\mathbf{n}$ входит, условимся называть

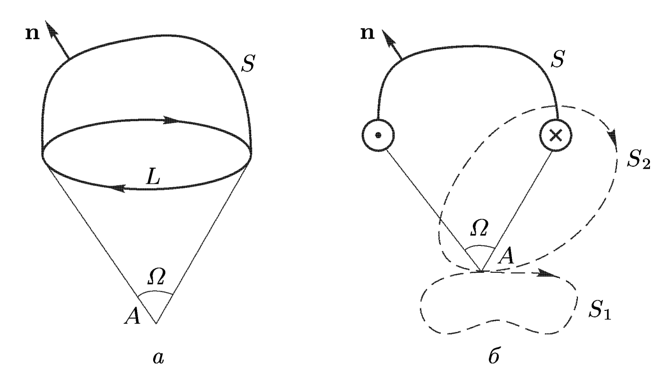


Рис. 134

внутренней, а сторону, из которой она выходит, — *внешней*. Телесный угол Ω мы считали *положительным*, когда из его вершины видна внутренняя сторона поверхности S, и *отрицательным*, когда видна внешняя. Временно сохраним это соглашение и здесь.

2. При перемещении вершины телесного угла Ω его значение меняется, вообще говоря, непрерывно. Исключение составляет случай, когда вершина A пересекает поверхность S. Тогда телесный угол получает скачкообразное приращение, равное $+4\pi$, если точка A переходит с внешней стороны на внутреннюю, и -4π, если переход совершается в противоположном направлении. Для пояснения рассмотрим сначала частный случай, когда контур L и поверхность S плоские. Если вершина A находится бесконечно близко от плоскости S с внешней стороны, то эта плоскость видна из вершины под углом -2π. Если же вершина переходит на внутреннюю сторону, то телесный угол становится равным $+2\pi$, т. е. получает приращение 4π. Допустим теперь, что поверхность ACB, натянутая на контур L, произвольная (рис. 135). Пусть *1* и *2* — две бесконечно близкие точки, лежащие по разные стороны от поверхности ACB. Натянем на тот же контур L бесконечно близкую поверхность $AC'B$ так, чтобы обе точки *1* и *2* оказались по одну сторону от нее. Телесные углы Ω_1' и Ω_2', под которыми видна из точек *1* и *2* эта поверхность, будут отличаться друг от друга бесконечно мало, причем $\Omega_1' = \Omega_1$. Возьмем теперь замкнутую поверхность $ACBC'A$. Так как на ACB нормаль $\mathbf{n}$ проведена наружу, а на $AC'B$ — внутрь указанной замкнутой поверхности, то из точки *2* поверхность $ACBC'A$ будет видна под углом $\Omega_2 - \Omega_2'$. А так как эта поверхность замкнутая, то тот же угол равен 4π, т. е. $\Omega_2 - \Omega_2' = 4\pi$. Но, очевидно, с точностью до бесконечно малых $\Omega_2' = \Omega_1' = \Omega_1$, а потому $\Omega_2 - \Omega_1 = 4\pi$, что и требовалось доказать.

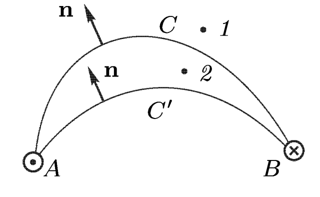


Рис. 135

3. Разрывное поведение телесного угла Ω делает эту величину неудобной при рассмотрении замкнутых контуров, обтекаемых токами. Действительно, точка разрыва величины Ω зависит от того, где проведена вспомогательная

поверхность S, натянутая на контур L. Магнитное же поле тока, текущего по указанному контуру, ни от каких вспомогательных поверхностей не зависит. Однако небольшим обобщением понятия телесного угла нетрудно освободить это понятие от указанного неудобства. Для этого *телесный угол надо определить как многозначную* (точнее, *бесконечнозначную*) *функцию положения его вершины*. Если вершина занимает какое-то произвольное (начальное) положение, то телесный угол можно определить так, как это делалось выше. Когда вершина A описывает произвольный замкнутый путь s_1 (рис. 134 *б*), возвращаясь в исходное положение, не пересекая при этом (или пересекая в противоположных направлениях четное число раз) никакой поверхности, натянутой на контур L, то телесный угол Ω возвращается к своему исходному значению. Если же замкнутый путь s_2 обходит вокруг контура L, то телесный угол получает приращение 4π; при обходе в отрицательном направлении приращение телесного угла будет -4π. Так понимаемый телесный угол Ω определен с точностью до слагаемого вида $4\pi n$, где n — целое число (положительное или отрицательное). При непрерывном перемещении вершины A телесный угол меняется непрерывно. Величина его не зависит ни от какой поверхности, натянутой на контур L. Она определяется только самим контуром L и установленным на нем положительным направлением обхода. Поэтому следует говорить о телесном угле, под которым виден *сам контур* L, а не поверхность, натянутая на него. Именно в таком смысле мы будем понимать телесный угол, когда в следующем параграфе свяжем эту величину с напряженностью магнитного поля.

4. Рассмотрим теперь дифференцирование телесных углов. Пусть контур, на который опирается телесный угол Ω, неподвижно закреплен. Тогда величина телесного угла Ω будет зависеть только от положения его вершины. Найдем производные величины Ω по координатам x, y, z этой вершины. При смещении вершины на dr (рис. 136 *а*) телесный угол получает приращение

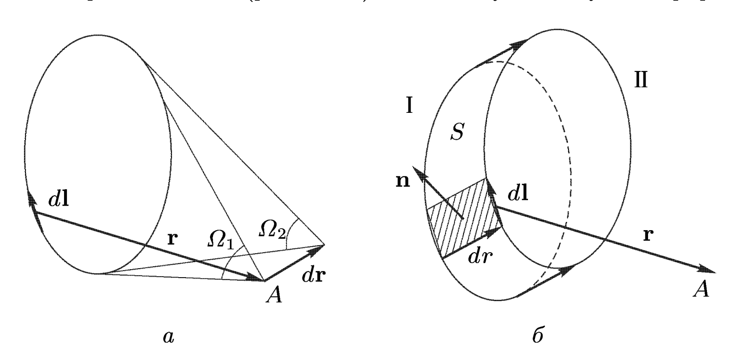


Рис. 136

$d\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$. Такое же приращение он получил бы, если бы вершина была неподвижно закреплена, а контур, как целое, смещен в противоположном направлении на $-dr$ (рис. 136 *б*). При таком смещении точки контура опишут цилиндрическую поверхность S, которая видна из вершины A под телесным углом $\Omega_{\text{бок}}$. Как видно из рисунка, $\Omega_1 = \Omega_2 + \Omega_{\text{бок}}$, т. е. $d\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = -\Omega_{\text{бок}}$. Телесный угол $\Omega_{\text{бок}}$ определяется выражением

$$\Omega_{\text{бок}} = -\int \frac{(d\mathbf{S}\,\mathbf{r})}{r^3},$$

где dS — элемент площади боковой поверхности, причем радиус-вектор $\mathbf{r}$ проведен от площадки $d\mathbf{S}$ к вершине телесного угла, а единичная нормаль n к цилиндрической поверхности направлена наружу, как указано на рисунке. Если $d\mathbf{l}$ — элемент длины контура, то при таком выборе единичной нормали $d\mathbf{S} = [d\mathbf{r}\,d\mathbf{l}]$. Подставляя это выражение в предыдущее и вынося $d\mathbf{r}$ из-под знака интеграла, получим

$$\Omega_{\text{бок}} = -\oint \frac{[d\mathbf{r}\,d\mathbf{l}]\mathbf{r}}{r^3} = -d\mathbf{r}\oint \frac{[d\mathbf{l}\,\mathbf{r}]}{r^3} = -\mathbf{a}\,d\mathbf{r},$$

где введено обозначение

$$\mathbf{a} = \oint \frac{[d\mathbf{l}\,\mathbf{r}]}{r^3}.$$

Интегрирование здесь ведется по контуру, на который опирается телесный угол. Таким образом, $d\Omega = a\,dr = a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz$. Отсюда находим

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = a_x, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = a_y, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z} = a_z,$$

или в векторной форме

$$\operatorname{grad} \Omega = \oint \frac{[d\mathbf{l}\,\mathbf{r}]}{r^3}. \tag{54.1}$$

§ 55. Теорема о циркуляции магнитного поля в вакууме

1. Линейный интеграл $\int\limits_{12} \mathbf{B}\,d\mathbf{s}$, называемый *магнитным напряжением* между точками *1* и *2*, зависит не только от положения этих точек, но и от пути интегрирования. Его значение становится определенным только после указания этого пути. Предположим сначала, что магнитное поле $\mathbf{B}$ создается постоянным током I, текущим по бесконечно тонкому замкнутому витку. Напряженность такого поля определяется выражением (50.11), или в силу формулы (54.1)

$$\mathbf{B} = -\operatorname{grad} \varphi_m, \tag{55.1}$$

где

$$\varphi_m = -\frac{I}{c}\,\Omega, \tag{55.2}$$

а Ω — телесный угол, под которым виток с током виден из точки наблюдения. Величина φ_m называется *магнитным потенциалом.* Магнитный потенциал, как и телесный угол Ω, является *многозначной* (*бесконечнозначной*) *функцией* точки наблюдения. Магнитное напряжение выражается через магнитный потенциал соотношением

$$\int\limits_{12} \mathbf{B}\,d\mathbf{s} = -\int\limits_{12} d\varphi_m = \varphi_{m1} - \varphi_{m2}. \tag{55.3}$$

2. Допустим, что точки *1* и *2* совпадают, т. е. путь интегрирования становится замкнутым. Тогда магнитное напряжение переходит в *циркуляцию* $\oint \mathbf{B}\,d\mathbf{s}$ вдоль этого замкнутого пути. Из свойств телесных

углов, установленных в предыдущем параграфе, следует, что циркуляция $\oint \mathbf{B}\, d\mathbf{s}$ будет равна нулю, если путь интегрирования не обходит вокруг тока. Если же он обходит вокруг тока один раз, то

$$\oint \mathbf{B}\, d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c}\, I. \tag{55.4}$$

Ток I считается положительным, если его направление находится в правовинтовом соотношении с направлением пути обхода.

Допустим теперь, что магнитное поле создается несколькими замкнутыми бесконечно тонкими витками с постоянными токами. К таким виткам с токами сводится и общий случай, так как постоянные токи всегда замкнуты и пространство, обтекаемое ими, можно разбить на бесконечно тонкие замкнутые токовые линии, которые и будут играть роль бесконечно тонких витков. Магнитные поля отдельных витков удовлетворяют принципу суперпозиции, а циркуляции этих полей по одному и тому же замкнутому контуру складываются алгебраически. Поэтому и в общем случае получается формула (55.4). Только в ней под I следует понимать сумму токов всех проводников, вокруг которых обходит контур циркуляции. В результате доказано следующее положение: *циркуляция магнитного поля постоянных токов по всякому замкнутому контуру равна сумме токов, пронизывающих контур циркуляции, умноженной на* $4\pi/c$. Это положение называется *теоремой о циркуляции* вектора напряженности магнитного поля.

Если объемная плотность тока $\mathbf{j}$ конечна, то

$$I = \int\limits_S j_n\, dS = \int\limits_S (\mathbf{j}\, d\mathbf{S}),$$

где S — любая поверхность, натянутая на контур, по которому вычисляется циркуляция. В этом случае формула (55.4) перейдет в

$$\oint (\mathbf{B}\, d\mathbf{s}) = \frac{4\pi}{c} \int (\mathbf{j}\, d\mathbf{S}). \tag{55.5}$$

В тех областях пространства, где не текут электрические токи, циркуляция $\oint \mathbf{B}\, d\mathbf{s}$ обращается в нуль по любому замкнутому контуру, т. е. в таких областях магнитное поле *потенциально.* Однако, как видно из формулы (55.5), этого не будет там, где текут электрические токи. Там магнитное поле *не потенциально.*

3. В учении о магнитном поле постоянных токов теорема о циркуляции играет примерно ту же роль, что и теорема Гаусса в электростатике. При наличии определенной симметрии теорема о циркуляции позволяет иногда очень просто рассчитать напряженность магнитного поля. Приведем несколько примеров.

Пример 1. Магнитное поле бесконечного прямолинейного провода с током. Ввиду симметрии магнитные силовые линии имеют форму окружностей с центрами на оси тока (рис. 126). Длина вектора $\mathbf{B}$ одна и та же во всех точках силовой линии. Циркуляция магнитного поля вдоль силовой линии, с одной стороны, равна

$2\pi RB$. С другой стороны, по теореме о циркуляции та же величина равна $4\pi I/c$. Приравнивая оба выражения, получим

$$B = \frac{2I}{cR}. \tag{55.6}$$

Этот результат уже был найден в § 51 непосредственно интегрированием магнитных полей элементов тока.

Рассмотрим теперь бесконечно длинный прямой цилиндрический провод радиуса a, по которому течет ток I с постоянной плотностью. Нетрудно видеть, что наружное поле будет определяться прежней формулой (55.6). Остается найти поле внутри провода. Конечно, и там магнитные силовые линии будут коаксиальными окружностями. Одна из них изображена на рис. 137 штриховой линией. (Предполагается, что ток течет перпендикулярно к плоскости рисунка.) Циркуляция вектора **B** по этой линии равна, с одной стороны, $2\pi RB$. С другой стороны, по теореме о циркуляции та же величина равна $4\pi I'/c$, где $I' = IR^2/a^2$ — ток, пронизывающий рассматриваемый контур. Сравнивая эти выражения, находим

$$B = \frac{2I}{ca^2}R \qquad (R < a). \tag{55.7}$$

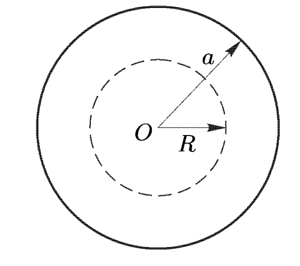


Рис. 137

Если провод полый, а поверхностная плотность тока постоянна, то вне цилиндра по-прежнему верна формула (55.6). Поле внутри цилиндра в этом случае равно нулю.

Пример 2. Магнитное поле бесконечно длинного соленоида. Пусть поверхностная плотность тока i, циркулирующего по поверхности соленоида, одна и та же по всей длине соленоида. Покажем, что магнитное поле, если оно отлично от нуля, должно быть направлено параллельно оси соленоида. Возьмем два элемента тока $I\,d\mathbf{l}_1$ и $I\,d\mathbf{l}_2$, симметрично расположенных относительно точки наблюдения A, как это изображено на рис. 138 *а*. По закону Био и Савара результирующее магнитное поле этих двух элементов в точке A дается выражением

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{cr_1^3}[d\mathbf{l}_1\mathbf{r}_1] + \frac{I}{cr_2^3}[d\mathbf{l}_2\mathbf{r}_2] = \frac{I}{cr_1^3}[d\mathbf{l}_1(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)].$$

Так как векторы $d\mathbf{l}_1$ и $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$ перпендикулярны к оси соленоида, то поле $d\mathbf{B}$ параллельно этой оси. Всю поверхность бесконечного соленоида можно разбить на пары элементов, аналогичных $d\mathbf{l}_1$ и $d\mathbf{l}_2$. Магнитное поле каждой такой пары параллельно оси соленоида. Следовательно, то же справедливо и для полного поля соленоида. Доказательство справедливо независимо от того, где лежит точка наблюдения A — внутри или вне соленоида.

Исследуем, как ведет себя магнитное поле бесконечного соленоида при удалении точки наблюдения A в бесконечность. Как будет доказано

в § 57, магнитное поле отдельного витка на больших расстояниях убывает обратно пропорционально кубу расстояния. Рассмотрим конечный участок соленоида, который виден из точки A под углом α (рис. 138 *а*). Разобьем его на большое число N кольцевых токов. Будем удалять

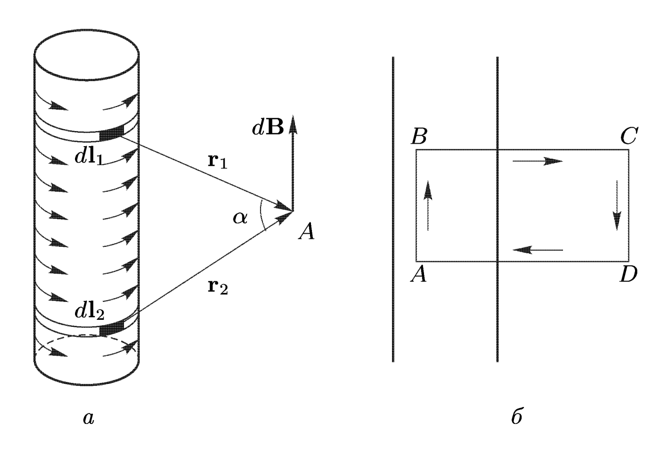


Рис. 138

точку A в бесконечность, сохраняя угол α и число N неизменными. При этом сила каждого кольцевого тока будет возрастать пропорционально длине выделенной части соленоида, а значит, и расстоянию до точки наблюдения. Если бы сила тока не изменялась, то из-за увеличения расстояния происходило бы убывание поля — обратно пропорционально кубу расстояния, как указано выше. Из-за увеличения силы тока убывание будет более медленным — обратно пропорционально квадрату расстояния. Но и в этом случае магнитное поле выделенной части соленоида, как и поле всего бесконечного соленоида, на бесконечности обратится в нуль.

Применим теперь теорему о циркуляции к прямоугольному контуру $ABCD$, сторона AB которого проходит внутри соленоида, а сторона CD бесконечно удалена (рис. 138 *б*). Участки BC и AD не вносят никакого вклада в циркуляцию, так как магнитное поле перпендикулярно к ним. По доказанному выше не дает вклада и сторона CD. Вся циркуляция сводится к интегралу по стороне AB и представляется выражением Bl, где l — длина стороны AB. По теореме о циркуляции та же величина равна $4\pi I/c = 4\pi il/c$. Сравнением обоих выражений находим

$$B = \frac{4\pi}{c}\,i. \tag{55.8}$$

Этот результат справедлив не только для круглого соленоида, но и для соленоида с произвольным поперечным сечением. Внутри бесконечного соленоида магнитное поле однородно, а снаружи — равно нулю.

Формула (55.8) с хорошей точностью применима к средней части соленоида конечной длины вдали от его краев. Вблизи краев магнитное поле сильно искажается и становится неоднородным.

Для катушки с проволочной обмоткой

$$B = \frac{4\pi}{c}\frac{NI}{l}, \tag{55.9}$$

где N — число витков, l — длина катушки, а I — сила тока в ее обмотке. Эта формула лишь приближенно представляет магнитное поле реального соленоида. Помимо искажения поля вблизи концов соленоида, однородность его нарушается в непосредственной близости каждого витка. Реальный ток лишь приближенно аппроксимируется поверхностным током с постоянной линейной плотностью. Вблизи каждого витка магнитные силовые линии обвиваются вокруг него. Кроме того, из-за наклона витков к оси соленоида имеется слагающая тока, параллельная этой оси. Она также искажает поле.

Пример 3. Магнитное поле тороидальной катушки. Заменим реальную катушку идеальным тором, по поверхности которого циркулирует ток с постоянной линейной плотностью i (рис. 139). Линии тока лежат в меридиональных плоскостях, т. е. в плоскостях, проходящих через ось AA системы. При повороте тора вокруг оси AA на любой угол он совмещается сам с собой. То же произойдет с магнитными силовыми линиями, если их повернуть, оставляя тор неподвижным. Отсюда следует, что силовыми линиями будут окружности с центрами на оси AA. Возьмем внутри тора одну из таких окружностей радиуса R (на рис. 139 она изображена штриховой линией). Циркуляция магнитного поля вдоль этой окружности равна $2\pi RB$. Полный ток, пронизывающий площадь, ограниченную этой окружностью, равен NI, где N — число витков в тороидальной катушке. По теореме о циркуляции $2\pi RB = 4\pi NI/c$, а потому

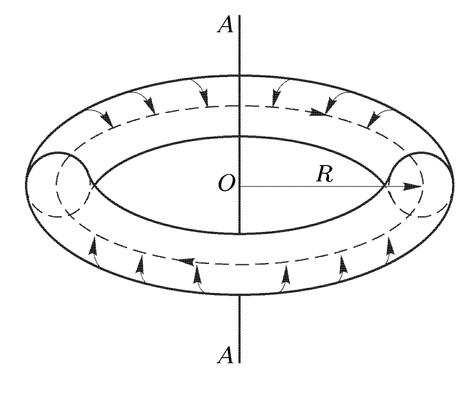


Рис. 139

$$B = \frac{2}{cR}NI. \tag{55.10}$$

Таким образом, внутри тора магнитное поле совпадает с полем прямого тока силой NI, текущего вдоль оси AA. Вне тора магнитное поле равно нулю. Устремляя N и R к бесконечности так, чтобы отношение $i = NI/(2\pi R)$ оставалось постоянным, в пределе получим выражение (55.8) для магнитного поля бесконечно длинного соленоида.

§ 56. Дифференциальная форма теоремы о циркуляции

1. Теореме о циркуляции можно придать дифференциальную форму, эквивалентную интегральной форме (55.4) или (55.5). С этой целью применим теорему о циркуляции к бесконечно малому прямоугольному контуру $ABCD$ со сторонами dy и dz, плоскость которого перпендикулярна к оси X (рис. 140). Вклад в циркуляцию, вносимый стороной AB, равен $B_y(x,y,z)\,dy$. Противоположная сторона CD вносит в циркуляцию слагаемое $-B_y(x,y,z+dz)\,dy$. Сумма этих величин равна

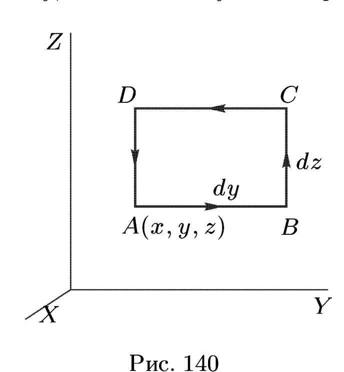


Рис. 140

$$-B_y(x,y,z+dz)\,dy + B_y(x,y,z)\,dy = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\,dy\,dz = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\,dS,$$

где $dS = dy\,dz$ — площадь прямоугольника $ABCD$. Аналогично, стороны BC и AD вносят в циркуляцию слагаемое $+\frac{\partial B_z}{\partial y}\,dS$. Полная циркуляция будет

$$\oint B_s\,ds = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) dS.$$

По теореме о циркуляции та же величина равна $4\pi j_x\,dS/c$, так как $j_x\,dS$ есть полный ток, пронизывающий контур $ABCD$. Приравнивая оба выражения, придем к уравнению

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{4\pi}{c}\,j_x.$$

Аналогично,

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{4\pi}{c}\,j_y, \qquad \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{4\pi}{c}\,j_z.$$

Умножив эти уравнения на координатные орты $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ и сложив, получим

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}. \tag{56.1}$$

Это — одна из важнейших формул в учении об электричестве. Символом $\operatorname{rot}\mathbf{B}$ обозначен вектор

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} \equiv \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z. \tag{56.2}$$

Дифференциальное выражение (56.2) играет важную роль во многих разделах математики и физики. Оно называется ротором вектора **B**. Формально $\operatorname{rot}\mathbf{B}$ можно рассматривать как векторное произведение дифференциального оператора набла

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

на вектор **B**, т. е.

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} \equiv [\nabla\mathbf{B}] \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \tag{56.3}$$

2. Векторные поля, ротор которых не равен нулю, называются *вихревыми полями.* Формула (56.1) показывает, что магнитное поле **B** является *вихревым* во всех областях пространства, где текут электрические токи, и *безвихревым*, где токов нет. В последнем случае вектор **B** может быть представлен в виде градиента магнитного потенциала. Такое представление, однако, невозможно в тех областях, где текут токи. Там понятие магнитного потенциала лишено смысла. Действительно, из соотношений (18.4) и (56.2) нетрудно получить тождество

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi \equiv 0, \tag{56.4}$$

какова бы ни была функция φ. Если бы магнитное поле представлялось выражением $\mathbf{B} = -\operatorname{grad}\varphi_m$, то из этого тождества мы получили бы $\operatorname{rot}\mathbf{B} = 0$. Следовательно, плотность тока **j** должна была бы обращаться в нуль, как это следует из сравнения соотношения $\operatorname{rot}\mathbf{B} = 0$ с формулой (56.1). Это и доказывает наше утверждение.

Основные уравнения магнитного поля постоянных токов в вакууме могут быть записаны в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \tag{56.5}$$

Сравним их с основными уравнениями электростатического поля в вакууме:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho. \tag{56.6}$$

Из этих уравнений видно, что электростатическое поле всегда потенциально, его источниками являются неподвижные электрические заряды. Магнитное поле, напротив, не потенциально, а соленоидально, его источниками служат электрические токи.

3. Приведем в заключение математическую *теорему Стокса* (1819–1903), широко используемую в математических преобразованиях теории поля. Эта теорема гласит:

$$\oint (\mathbf{A}\,d\mathbf{s}) = \int (\operatorname{rot}\mathbf{A}\,d\mathbf{S}), \tag{56.7}$$

где **A** — произвольный вектор. Интеграл слева берется по произвольному замкнутому контуру s, справа — по произвольной поверхности, натянутой

на этот контур. Имея в виду прием, указанный на рис. 140, достаточно доказать формулу (56.7) для бесконечно малого контура. Бесконечно малый контур можно рассматривать как плоский. Пусть $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к плоскости такого контура, а $\mathbf{N}$ — единичная нормаль к самому контуру, лежащая в его плоскости (рис. 141). Введем вектор $\mathbf{C} = [\mathbf{An}]$, получающийся из $\mathbf{A}$ путем поворота вокруг нормали $\mathbf{n}$. Ясно, что вектор $\mathbf{C}$ лежит в плоскости контура. Применим к нему математическую формулу Гаусса–Остроградского

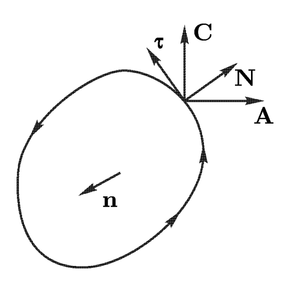


Рис. 141

$$\oint (\mathbf{CN})\, ds = \int \operatorname{div} \mathbf{C}\, dS.$$

Легко показать, что $\operatorname{div} \mathbf{C} = \operatorname{div} [\mathbf{An}] = \mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Кроме того,

$$(\mathbf{CN}) = [\mathbf{An}]\mathbf{N} = \mathbf{A}[\mathbf{nN}] = (\mathbf{A}\boldsymbol{\tau}),$$

где $\boldsymbol{\tau} = [\mathbf{nN}]$ — единичный вектор касательной к контуру s. В результате получим

$$\oint (\mathbf{A}\boldsymbol{\tau})\, ds = \int (\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{A})\, dS,$$

что и доказывает теорему. Из доказанного следует:

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{A} = \lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \oint (\mathbf{A}\, d\mathbf{s}). \tag{56.8}$$

Этим дается *инвариантное определение проекции ротора* $\mathbf{A}$ на направление произвольного вектора $\mathbf{n}$, а следовательно, и *инвариантное определение самого ротора.*

§ 57. Эквивалентность магнитных полей тока и магнитного листка

1. До открытия магнитных действий тока причину магнитных явлений видели в существовании особых субстанций — *северного* и *южного магнетизмов*, взаимодействующих между собой по тому же закону Кулона, которому подчиняются электрические заряды. В одном отношении, однако, магнитные заряды существенно отличались от электрических: в магните невозможно отделить северный полюс от южного. Это вызывало сомнения в реальном существовании магнитных зарядов. Ампер выдвинул гипотезу, подтвержденную всеми последующими исследованиями, согласно которой *магнитных зарядов не существует, а единственными источниками магнитного поля являются токи.* К обычным макроскопическим токам Ампер добавил так называемые *молекулярные токи*, которые, по его представлениям, циркулируют внутри атомов вещества. Как было установлено уже в XX столетии, молекулярные токи Ампера — это просто движущиеся электроны и ядра, из которых построены атомы вещества. Почему же формальное учение о магнетизме, основанное на представлении о магнитных зарядах, приводило к правильным результатам, если в действительности таких зарядов не существует? На этот вопрос дает ответ *теорема Ампера* об эквивалентности магнитных полей тока и магнитного листка.

2. Рассмотрим сначала элементарный виток тока. Магнитное поле вне витка может быть выражено через магнитный потенциал (55.2). Для элементарного витка $\Omega = -(\mathbf{Sr})/r^3$, где $\mathbf{S}$ — вектор элементарной площадки, натянутой на контур тока. Радиус-вектор $\mathbf{r}$ проведен от витка к точке наблюдения, в связи с чем в выражении для Ω и поставлен знак минус. Используя это выражение, получим

$$\varphi_m = \frac{\mathfrak{M}\mathbf{r}}{r^3}, \tag{57.1}$$

где $\mathfrak{M}$ — магнитный момент тока, определяемый выражением (52.2). Формула (57.1) совпадает с соответствующей формулой (19.6) для электрического потенциала точечного диполя. Вместо электрического дипольного момента $\mathbf{p}$ в нее входит магнитный момент тока $\mathfrak{M}$. Таким образом, при нахождении напряженности магнитного поля элементарный виток с током можно заменить элементарным магнитом, состоящим из двух магнитных зарядов противоположных знаков, слегка сдвинутых один относительно другого. Отсюда следует, что магнитное поле элементарного витка (как и поле точечного диполя) меняется обратно пропорционально кубу расстояния от него. Этот результат был использован при выводе формулы (55.8) для напряженности магнитного поля соленоида.

Обобщение полученного результата на конечные витки с током производится обычным приемом разложения конечного витка на элементарные (рис. 132). Заменив каждый элементарный виток эквивалентным ему диполем, получим «магнитный листок», т. е. поверхность S, натянутую на контур тока, одна сторона которой равномерно покрыта северным, а другая — южным магнетизмами. На единицу площади такой поверхности приходится магнитный момент

$$\mathfrak{m} = \frac{I}{c}\,\mathbf{n}, \tag{57.2}$$

называемый *мощностью магнитного листка.* (Единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ к поверхности S должен находиться в правовинтовом соотношении с направлением тока.) Магнитное поле такого магнитного листка во внешнем пространстве совпадает с магнитным полем тока I, текущего по контуру листка. В этом и состоит теорема Ампера. В качестве S можно выбрать любую поверхность, опирающуюся на рассматриваемый контур тока.

3. Эквивалентность магнитных полей тока и магнитного листка имеет место *только во внешнем пространстве.* Внутри листка магнитное поле существенно отличается от магнитного поля тока в соответствующих точках пространства. Силовые линии магнитного поля тока тянутся непрерывно, обвиваясь вокруг тока, а магнитный потенциал нигде не претерпевает скачков. Напротив, при прохождении через магнитный листок потенциал меняется скачкообразно на $4\pi\mathfrak{m} = 4\pi I/c$. Это связано с тем, что внутри листка магнитное поле очень сильное и направлено противоположно наружному полю. Магнитный листок подобен конденсатору с близко расположенными обкладками

(рис. 142). На ранней стадии учения о магнетизме изучались магнитные поля вне магнитов. По теореме Ампера они могли быть точно моделированы полями магнитных зарядов, надлежащим образом распределенных внутри магнита. Этим и объясняется, почему расчеты, основанные на представлении о магнитных зарядах, приводили к верным результатам. Однако мы пришли бы к грубым ошибкам, если бы пользовались этими представлениями при расчетах магнитных полей внутри магнитов или в тех областях пространства, по которым текут электрические токи.

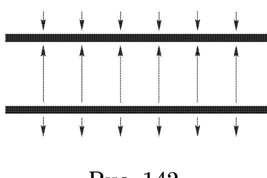


Рис. 142

4. Аналогия между током и магнитным листком относится не только к возбуждаемым ими магнитным полям. Она распространяется также на силы, действующие на токи и листки в магнитных полях. Действительно, ранее уже было показано, что на элементарный виток с током в магнитном поле действует вращающий момент $\mathbf{M} = [\mathfrak{M}\mathbf{B}]$. Остается поэтому доказать, что в неоднородном поле на элементарный виток действует сила

$$\mathbf{F} = (\mathfrak{M}\nabla)\mathbf{B}. \tag{57.3}$$

Для доказательства достаточно ограничиться случаем элементарного витка, имеющего форму бесконечно малого прямоугольника, так как введением добавочных перемычек произвольный контур можно разбить на более мелкие прямоугольные подконтуры (см. рис. 132). Непрямоугольными могут оказаться только подконтуры, примыкающие к границе. Но число перемычек можно взять настолько большим, чтобы площадь, охватываемая такими подконтурами, стала пренебрежимо малой по сравнению с охватываемой площадью всего контура.

Направим оси X и Z параллельно сторонам нашего прямоугольного контура (см. рис. 152). Стороны AB и BC изобразим векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Силы, действующие на стороны AB и CD, равны соответственно $\frac{1}{c}\,I[\mathbf{aB}_1]$ и $-\frac{1}{c}\,I[\mathbf{aB}_2]$, где $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ — средние значения соответствующих напряженностей магнитных полей. Так как $\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2 = -b\,\partial\mathbf{B}/\partial z$, то равнодействующая этих сил равна

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{I}{c}\left[\mathbf{a}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial z}\right]b = -\frac{I}{c}\,ab\left[\mathbf{e}_y\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial z}\right] = -\frac{I}{c}\,S\left[\mathbf{e}_y\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial z}\right],$$

где $S = ab$ — площадь контура. Следовательно, $\mathbf{F}_1 = -\mathfrak{M}[\mathbf{e}_y\,\partial\mathbf{B}/\partial z]$. Аналогично, равнодействующая сил, действующих на противоположные стороны DA и BC, равна $\mathbf{F}_2 = \mathfrak{M}[\mathbf{e}_z\,\partial\mathbf{B}/\partial y]$. Полная сила

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathfrak{M}\left\{\left[\mathbf{e}_z\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial y}\right] - \left[\mathbf{e}_y\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial z}\right]\right\}.$$

Подставим сюда $\mathbf{B} = B_x\mathbf{e}_x + B_y\mathbf{e}_y + B_z\mathbf{e}_z$. Тогда получим

$$\mathbf{F} = \mathfrak{M}\left(\frac{\partial B_x}{\partial y}\,\mathbf{e}_y + \frac{\partial B_x}{\partial z}\,\mathbf{e}_z - \frac{\partial B_y}{\partial y}\,\mathbf{e}_x - \frac{\partial B_z}{\partial z}\,\mathbf{e}_x\right).$$

В силу уравнения (53.2) $\partial B_y/\partial y + \partial B_z/\partial z = -\partial B_x/\partial x$. Предположим, кроме того, что виток находится в пространстве, где нет токов. Тогда по теореме о циркуляции (56.1) $\partial B_x/\partial y = \partial B_y/\partial x$, $\partial B_x/\partial z = = \partial B_z/\partial x$. Следовательно,

$$\mathbf{F} = \mathfrak{M}\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}\,\mathbf{e}_x + \frac{\partial B_y}{\partial x}\,\mathbf{e}_y + \frac{\partial B_z}{\partial x}\,\mathbf{e}_z\right) = \\ = \mathfrak{M}\frac{\partial}{\partial x}\,(B_x\mathbf{e}_x + B_y\mathbf{e}_y + B_z\mathbf{e}_z) = \mathfrak{M}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}.$$

Так как магнитный момент $\mathfrak{M}$ направлен по оси X, то это выражение совпадает с выражением (57.3).

ЗАДАЧИ

1. Определить движение заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле $\mathbf{B}$.

Решение. Действующая сила $\mathbf{F} = (e/c)[\mathbf{vB}]$ перпендикулярна к скорости частицы $\mathbf{v}$. Она работы не производит, а потому величина скорости $\mathbf{v}$ остается неизменной. Скорость $\mathbf{v}$ может меняться только по направлению. Допустим сначала, что скорость $\mathbf{v}$ перпендикулярна к магнитному полю $\mathbf{B}$. Тогда частица будет двигаться по окружности. Угловая скорость вращения $\boldsymbol{\omega}$ определится из уравнения

$$-m\omega^2\mathbf{r} = \frac{e}{c}\,[\mathbf{vB}].$$

Подставляя в него $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$, получим

$$-m\omega^2\mathbf{r} = \frac{e}{c}\,[[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]\mathbf{B}] = \frac{e}{c}\,(\boldsymbol{\omega}\mathbf{B})\mathbf{r},$$

откуда

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{e}{mc}\,\mathbf{B}. \qquad (57.4)$$

Величина $|\omega|$ называется *циклотронной частотой*, а радиус окружности

$$r = \frac{v}{|\omega|} = \frac{mcv}{|e|B} \qquad (57.5)$$

— *ларморовским радиусом.*

Если скорость $\mathbf{v}$ не перпендикулярна к $\mathbf{B}$, то для нерелятивистских движений ее можно представить в виде $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$, где $\mathbf{v}_{\parallel}$ — скорость частицы вдоль поля $\mathbf{B}$, а $\mathbf{v}_{\perp}$ — перпендикулярно к нему. Частица будет вращаться по окружности с прежней частотой (57.4). Радиус окружности будет

$$r_{\perp} = \frac{mcv_{\perp}}{|e|B}. \qquad (57.6)$$

На это вращение наложится равномерное движение вдоль поля $\mathbf{B}$ со скоростью $\mathbf{v}_{\parallel}$. Таким образом, траекторией частицы будет спираль с осью, направленной вдоль магнитного поля $\mathbf{B}$.

2. Заряженная космическая частица (например, протон) захвачена земным магнитным полем и вращается вокруг Земли в плоскости экватора по окружности радиуса $R = 6700$ км. Напряженность земного магнитного поля на траектории частицы $B = 0{,}4$ Гс. Найти энергию такой частицы.

Ответ. $\mathscr{E} = mc^2 = eBR = 80$ ГэВ.

Указание. Скорость космической частицы настолько мало отличается от скорости света, что ее энергия покоя пренебрежимо мала по сравнению с кинетической энергией. Кинетическую энергию можно вычислять по формуле $\mathscr{E} = mc^2$, где m — релятивистская масса частицы.

3. Серпуховской ускоритель протонов ускоряет эти частицы до энергии $\mathscr{E} = 76$ ГэВ $= 7{,}6 \cdot 10^{10}$ эВ. Если отвлечься от наличия ускоряющих промежутков, то можно считать, что ускоренные протоны движутся по окружности радиуса $R = 236$ м и удерживаются на ней магнитным полем, перпендикулярным к плоскости орбиты. Найти необходимое для этого магнитное поле.

Ответ. $B = \mathscr{E}/(Re) = V/R = 1{,}07 \cdot 10^4$ Гс (V — ускоряющее напряжение, соответствующее энергии $\mathscr{E}$, равное $7{,}6 \cdot 10^{10}$ В $= 2{,}53 \cdot 10^8$ СГСЭ-ед).

Указание. Протоны считать ультрарелятивистскими. Их скорость настолько близка к скорости света, что энергия покоя протона пренебрежимо мала по сравнению с кинетической энергией. При таком условии кинетическую энергию можно вычислить по формуле $\mathscr{E} = mc^2$, где m — релятивистская масса протона.

4. Легкий шарик массы $m = 0{,}5$ г и радиуса $r = 1$ см подвешен на длинной нити и вращается по горизонтальной окружности, радиус которой очень мал по сравнению с длиной нити (конический маятник). Найти изменение угловой скорости вращения шарика $\Delta\omega$ после того, как шарик был заряжен до потенциала $V = 3000$ В и помещен в вертикальное магнитное поле $B = 3000$ Гс. В каком случае угловая скорость увеличится и в каком уменьшится?

Примечание. Окончательную формулу для изменения угловой скорости упростить, использовав соотношение $\omega_0 \equiv qB/(mc) \ll \sqrt{g/l}$, где q — заряд шарика, l — длина нити, g — ускорение свободного падения.

Ответ. $\Delta\omega \equiv \omega - \omega_0 = \pm qB/(2mc) = \pm rVB/(2mc) = 10^{-6}$ с$^{-1}$. Угловая скорость увеличится, когда векторы $\mathbf{B}$ и $\boldsymbol{\omega}_0$ направлены противоположно, и уменьшится, когда их направления совпадают.

5. В центре рамки, имеющей форму равностороннего треугольника со стороной $a = 36$ см, помещена маленькая магнитная стрелка. Плоскость рамки совпадает с плоскостью магнитного меридиана Земли. Какой ток I надо пропустить по рамке, чтобы стрелка повернулась на угол 45°? Горизонтальная составляющая земного магнитного поля $B_0 = 0{,}4$ Гс.

Ответ. $I = (1/18)caB_0 = 2{,}4 \cdot 10^{10}$ СГСЭ-ед. $= 8$ А.

6. Масс-селектор, т. е. прибор, предназначенный для разделения атомных частиц разных масс, состоит из цилиндрического конденсатора с внутренним радиусом $R_1 = 2{,}4$ см и внешним $R_2 = 3$ см (рис. 143). Ионные лучи попадают в селектор через узкую щель S, расположенную посередине между обкладками. Параллельно оси конденсатора (т. е. перпендикулярно к плоскости чертежа) приложено однородное магнитное поле $B = 2000$ Гс.

Какую по модулю и знаку разность потенциалов надо приложить к пластинам конденсатора, чтобы однократно заряженный положительный ион

^{7}Li прошел по средней линии конденсатора, т. е. по окружности радиуса $R = 2{,}7$ см? Найти напряженность электрического поля на этой окружности.

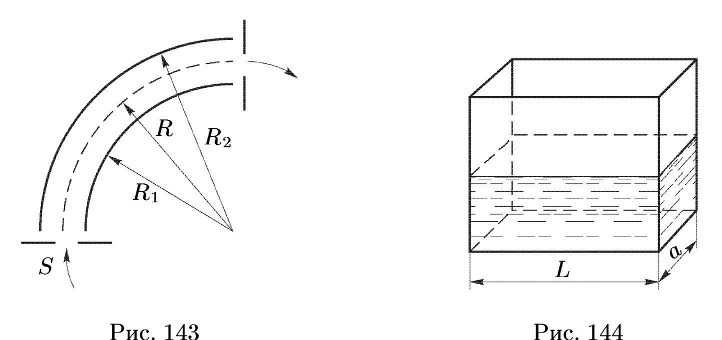


Рис. 143 Рис. 144

Энергия иона $\mathscr{E} = 1000$ эВ. Масса атома водорода $1{,}67 \cdot 10^{-24}$ г. На сколько надо изменить эту разность потенциалов, чтобы по той же линии через селектор могли пройти ионы ^{6}Li?

Ответ. Для ^{7}Li $V = ER\ln(R_2/R_1) \approx E(R_2 - R_1) \approx 245$ В, $E = 408$ В/см. Для ^{6}Li $V = 229$ В, $E = 381$ В/см.

7. В прямоугольную кювету (рис. 144), передняя и задняя стенки которой металлические, а боковые диэлектрические, налит электролит с удельной проводимостью $\lambda = 0{,}2$ Ом$^{-1} \cdot$ см$^{-1}$. К металлическим стенкам приложено напряжение $V = 30$ В, и вся кювета помещена в однородное магнитное поле $B = 100$ Гс, направленное вертикально. Размеры кюветы: $L = 20$ см, $a = 2$ см, плотность электролита $\rho = 1$ г/см^3. Определить разность уровней жидкости Δh около правой и левой стенок кюветы.

Ответ. $\Delta h = \lambda VBL/(ac\rho g) = 0{,}6$ см.

8. Для осуществления теплосъема с ядерных реакторов в качестве теплоносителя применяют расплавленные металлы. Перекачка металлов по трубам производится с помощью электромагнитных насосов: участок трубы с расплавленным металлом помещается в поперечное магнитное поле, т. е. поле, перпендикулярное к оси трубы; через тот же участок трубы перпендикулярно к ее оси и к магнитному полю пропускается поперечный электрический ток. При этом возникает сила, приводящая жидкость в движение. Оценить ток, необходимый для перекачки ртути по трубе диаметром $D = 20$ мм и длиной $L = 10$ м со скоростью $V = 1$ л/с. Вязкость ртути $\eta = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ дин $\cdot$ с/см^2, магнитное поле $B = 1000$ Гс.

Решение. Сила, действующая на столб ртути в трубе, $F \approx IDB/c$. Такая сила эквивалентна разности давлений на концах трубы $P_2 - P_1 = 4F/(\pi D^2)$. Подставляя эту разность в формулу Пуазейля (см. т. I, § 97), получим

$$I \approx 32\eta cL/(BD^3) = 1{,}8 \cdot 10^{12} \text{ СГСЭ-ед.} = 600 \text{ А}.$$

9. Найти отношение силы кулоновского расталкивания к силе амперова притяжения двух параллельных пучков, состоящих из электронов, прошедших ускоряющий потенциал $V = 10$ кВ.

Ответ. $F_{\text{кул}}/F_{\text{амп}} = mc^2(2eV) \approx 25$.

10. Две щели S_1 и S_2 шириной $d = 0{,}1$ см каждая (рис. 145), установленные в эвакуированном сосуде, выделяют плоский пучок электронов

с энергией $\mathscr{E} = 400$ эВ. На каком расстоянии x от щели S_2 ширина электронного пучка удвоится из-за кулоновского расталкивания электронов, если электронный ток, приходящийся на единицу длины щели (за щелью S_2), равен $i = 10^{-4}$ А/см? При расчетах щели считать бесконечно длинными.

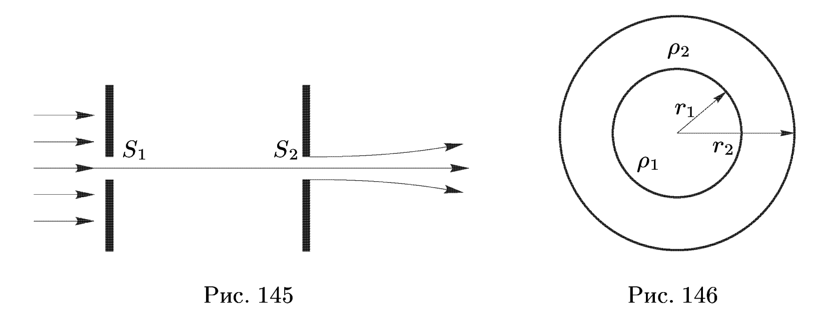


Рис. 145 Рис. 146

Решение. Электрическое поле E можно найти, пренебрегая расширением пучка. На границе и вне пучка $E = 2\pi\sigma$, где $\sigma = i/e$ — заряд, приходящийся на единицу площади пучка. Частицы, находящиеся на границе пучка, в поперечном направлении будут двигаться равноускоренно и за время t сместятся на

$$\Delta y = eEt^2/(2m) = eEx^2/(2mv^2).$$

Искомое расстояние x определится из требования $\Delta y = d/2$, которое дает

$$x = \sqrt{mdv^3/(2\pi ie)}, \quad v = \sqrt{2\mathscr{E}/m}.$$

Отсюда $x = 13$ см.

11. Бесконечно длинный цилиндрический провод (рис. 146) состоит из двух коаксиальных цилиндров: центрального сплошного цилиндра радиуса r_1, сделанного из материала с удельным сопротивлением ρ_1 и окружающего его полого цилиндра с внешним радиусом r_2, изготовленного из материала с удельным сопротивлением ρ_2. Внешняя поверхность сплошного и внутренняя поверхность полого цилиндров находятся в электрическом контакте. По проводу параллельно его оси течет постоянный ток I. Найти выражения для напряженности магнитного поля внутри и вне проводов.

Ответ.

$$B = \begin{cases} 2I\rho_2 r/(cA) & (r \leqslant r_1), \\ 2I[\rho_1(r^2 - r_1^2) + \rho_2 r_1^2]/(cAr) & (r_1 \leqslant r \leqslant r_2), \\ 2I/(cr) & (r \geqslant r_2), \end{cases}$$

$A = \rho_1(r_2^2 - r_1^2) + \rho_2 p_1^2.$

12. Вдоль тонкостенной цилиндрической трубки радиуса $a = 25$ мм течет постоянный ток $I = 20$ А. В стенке трубки имеется тонкая щель ширины $d = 1$ мм, параллельная оси трубки. Определить магнитное поле внутри трубки на больших расстояниях r от середины щели ($r \gg d$).

Ответ. Магнитные силовые линии в трубке имеют форму коаксиальных дуг окружностей, центры которых расположены на оси щели. $B = Id/(\pi car)$. На оси трубки (при $r = a$) $B = Id/(\pi ca^2) \approx 0{,}1$ Гс.

13. По двум бесконечно длинным прямолинейным проводникам, сделанным из немагнитного материала и изолированным друг от друга, текут

в противоположных направлениях токи с одной и той же плотностью $j = 1000$ А/см^2. Проводники ограничены участками цилиндрических поверхностей и отделены один от другого полостью Π. (На рис. 147 поперечные сечения проводников заштрихованы.) Найти величину и направление магнитного поля в полости Π. Ток в левом проводнике направлен к читателю, а в правом — от читателя. Расстояние между осями цилиндров $AB = D = 5$ см.

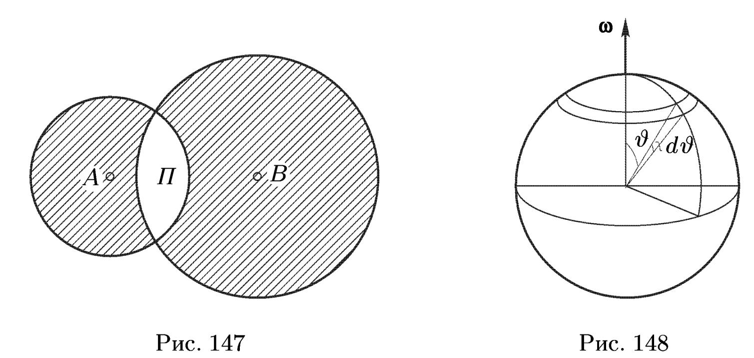


Рис. 147 Рис. 148

Ответ. $B = 2\pi jD = 3140$ Гс. Поле $\mathbf{B}$ перпендикулярно к линии AB и направлено вверх.

14. Определить напряженность магнитного поля внутри бесконечной цилиндрической полости, сделанной в бесконечном цилиндрическом проводе, вдоль которого течет постоянный ток плотности j, равномерно распределенный по сечению провода. Расстояние между осями провода и полости равно d.

Ответ. $\mathbf{B} = \dfrac{2\pi}{c} j[\mathbf{sd}]$, где $\mathbf{s}$ — единичный вектор, направленный вдоль тока, а вектор $\mathbf{d}$ проведен от оси провода к оси цилиндрической полости.

15. В высокий цилиндрический сосуд радиуса R налит электролит. Внутри сосуда параллельно его оси расположен цилиндрический металлический стержень радиуса r, поверхность которого покрыта изолирующей краской. Расстояние между осями стержня и сосуда равно a. В электролите параллельно оси течет ток силы I, возвращающийся обратно по стержню. Считая плотность тока в электролите постоянной, найти силу, с которой магнитное поле, созданное этими токами, действует на единицу длины стержня. Куда эта сила направлена?

Ответ. $F = \dfrac{2I^2}{c^2(R^2 - r^2)}\, a$. Сила направлена от оси цилиндра к оси стержня.

16. Заряженный шарик радиуса a равномерно вращается вокруг своего диаметра с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Общий заряд шарика равен q. Найти магнитное поле шарика на расстояниях r, больших по сравнению с a, если заряд q равномерно распределен 1) по поверхности шарика; 2) по объему шарика.

Ответ. 1) $\mathbf{B} = \dfrac{qa^2}{3c}\left[\dfrac{3(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \dfrac{\boldsymbol{\omega}}{r^3}\right]$; 2) $\mathbf{B} = \dfrac{qa^2}{5c}\left[\dfrac{3(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \dfrac{\boldsymbol{\omega}}{r^3}\right]$. (Вектор $\mathbf{r}$ проведен из центра шарика.)

Решение. Рассмотрим случай 1). Возьмем на поверхности шарика бесконечно узкий поясок, заключенный между углами ϑ и $\vartheta + d\vartheta$ (рис. 148).

Вращаясь с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, такой поясок эквивалентен круговому току $dI = \omega q \sin\vartheta\, d\vartheta/(4\pi)$ с магнитным моментом $d\mathfrak{M} = S\,dI/c = \pi a^2 q\omega \sin^3\vartheta\, d\vartheta(4\pi c)^{-1}$. Интегрируя по ϑ, находим магнитный момент всего шара $\mathfrak{M} = qa^2\omega/(3c)$. Отсюда и получается результат, приведенный в ответе. Случай 2) рассматривается аналогично.

17. Для моделирования траектории атомной частицы с зарядом e и импульсом p, движущейся в постоянном магнитном поле, часто пользуются тем обстоятельством, что очень легкий (невесомый) гибкий проводящий шнур с током I, находящийся под постоянным механическим натяжением T, занимает в том же магнитном поле положение, совпадающее с траекторией частицы. (Предполагается, что вне магнитного поля участки шнура прямолинейны и расположены вдоль соответствующих прямолинейных же участков траектории.) Обосновать этот метод. Найти связь между I, e, p, T. Величина магнитного поля B может меняться в пространстве, но его направление должно оставаться неизменным. Шнур и траектория частицы перпендикулярны к магнитному полю.

Решение. Радиус кривизны траектории частицы в магнитном поле $\rho = cp/(eB)$. На единицу длины натянутого шнура действует нормально упругая сила T/ρ_1, которая уравновешивается амперовой силой IB/c. Это дает для радиуса кривизны шнура $\rho_1 = Tc/(IB)$. При выполнении условия $\rho_1 = \rho$, т. е. $Ip = Te$, форма траектории будет совпадать с формой шнура.

§ 58. Магнитное поле в веществе

1. В веществе магнитное поле возбуждается не только электрическими токами, текущими по проводам, но и движениями заряженных частиц внутри самих атомов и молекул. Согласно полуклассической теории Бора, электроны вращаются вокруг атомных ядер по замкнутым орбитам. Кроме того, они совершают вращения вокруг собственных осей подобно вращениям планет вокруг своих осей. С таким внутренним вращением связан определенный момент импульса, называемый *спином электрона.* Спином обладают не только электроны, но и атомные ядра. Орбитальные и спиновые вращения заряженных частиц аналогичны токам и возбуждают магнитные поля. Наглядное представление о движении электронов по классическим орбитам и об их вращениях вокруг собственных осей позднее было заменено более общей и абстрактной картиной движения, которую дает квантовая механика. В этой картине не существует понятия траектории частицы. Термин «орбитальное движение» сохранился, но он носит условный характер. Однако для учения о магнетизме существенна не наглядность движения, а механический и магнитный моменты, связанные с этим движением. Таким образом, по современным представлениям, магнетизм вещества обусловлен тремя причинами: 1) орбитальным движением электронов вокруг атомных ядер, 2) собственным вращением, или спином, электронов, 3) собственным вращением, или спином, атомных ядер. Тяжелые атомные ядра движутся значительно медленнее легких электронов. Поэтому магнитные моменты атомных ядер в тысячи раз меньше орбитальных и спиновых магнитных моментов электронов.

Ядерный магнетизм становится существенным только вблизи абсолютного нуля температур, да и то при условии, что орбитальные и спиновые магнитные моменты электронов скомпенсированы, так что их результирующий момент равен нулю.

Атомы вещества, совершая беспорядочное тепловое движение, в отсутствие внешнего магнитного поля обычно ориентированы хаотически. Возбуждаемые ими магнитные поля в окружающем пространстве компенсируют друг друга. При наложении внешнего магнитного поля атомы полностью или частично ориентируются в направлении этого поля, и тогда компенсация нарушается. В таких случаях говорят, что тело *намагничено.* Тела, способные намагничиваться, называются *магнетиками.* Большинство веществ при внесении в магнитное поле намагничивается слабо. Сильными магнитными свойствами обладают только *ферромагнитные* вещества: железо, никель, кобальт, множество их сплавов, а также элементы редких земель. Постоянные магниты, изготовляемые из стали и различных магнитных сплавов, намагничены и в отсутствие внешнего магнитного поля. Стальной стержень можно намагнитить (правда, очень слабо) в магнитном поле Земли. Для этого стержень ориентируют вдоль магнитного меридиана и постукивают по нему молотком. На конце стержня, обращенном к южному магнитному полюсу Земли (он находится на севере), появляется северный магнитный полюс, а на противоположном конце — южный. Если стержень повернуть к северу другим концом, то при постукивании молотком он перемагнитится и его магнитные полюсы поменяются местами.

2. Магнитное поле, как и поле электрическое, может быть *микроскопическим* и *макроскопическим.* Микроскопическое поле есть истинное поле, возбуждаемое движущимися элементарными зарядами вещества. Оно резко меняется на расстояниях атомного масштаба. Макроскопическое поле получается из микроскопического путем сглаживания, т. е. усреднением по физически бесконечно малым объемам пространства. Напряженность макроскопического поля обозначается буквой $\mathbf{B}$. Вектор $\mathbf{B}$ есть основной вектор, характеризующий макроскопическое поле в веществе. Орбитальные и спиновые вращения электронов и атомных ядер в отношении возбуждаемого ими магнитного поля эквивалентны каким-то токам, циркулирующим в атомах вещества. Они получили общее название *молекулярных токов.* Для вычисления макроскопического поля $\mathbf{B}$ молекулярные токи можно также как-то сгладить, заменив их макроскопическими токами, непрерывно меняющимися в пространстве. Такие макроскопические токи называются *токами намагничивания.* Их плотность в дальнейшем обозначается $\mathbf{j}_m$. Обычные токи, текущие по проводам, связаны с перемещениями в веществе носителей тока — электронов или ионов. Эти токи называются *токами проводимости.* Плотность токов проводимости будем обозначать $\mathbf{j}$. Таким образом, поле $\mathbf{B}$ возбуждается токами проводимости и токами намагничивания. Влияние среды на магнитное поле сводится к действию токов намагничивания. Если известны токи проводимости

и токи намагничивания, то можно как бы забыть о наличии вещества и вычислять напряженность поля **B** по формулам для вакуума.

Поскольку вектор **B** есть напряженность магнитного поля, возбуждаемого в вакууме какими-то токами, для него справедливо уравнение

$$\oint \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = 0, \tag{58.1}$$

или в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \tag{58.2}$$

Каждое из этих уравнений выражает тот факт, что магнитных зарядов не существует.

Для вектора **B**, очевидно, имеет место теорема о циркуляции. Надо только ток проводимости I дополнить током намагничивания I_m. Тогда получится

$$\oint\limits_L (\mathbf{B}\, d\mathbf{l}) = \frac{4\pi}{c}\,(I + I_m), \tag{58.3}$$

или в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\,(\mathbf{j} + \mathbf{j}_m). \tag{58.4}$$

В формуле (58.3) I и I_m обозначают полные токи проводимости и намагничивания, пронизывающие замкнутый контур L.

3. Намагниченность среды принято характеризовать не токами намагничивания, как это сделано выше, а *вектором намагничивания* **I**. Так называют средний магнитный момент единицы объема магнетика, создаваемый молекулярными токами. Через вектор **I** можно выразить и плотность токов намагничивания в среде.

Допустим сначала, что магнетик имеет форму намагниченного прямого круглого цилиндра, магнитный момент которого направлен вдоль его оси (рис. 149). Молекулярные токи в намагниченном магнетике текут согласованно, и возбуждаемые ими магнитные поля усиливают друг друга. Если $\mathfrak{M}$ — средний магнитный момент одной молекулы, то, очевидно,

$$\mathbf{I} = n\mathfrak{M}, \tag{58.5}$$

где n — среднее число молекул в единице объема. Полный магнитный момент всего цилиндра равен $V\mathbf{I}$, где $V = SL$ — объем цилиндра (S — площадь его основания, L — высота). Молекулярные токи соседних молекул в местах их соприкосновения текут в противоположных направлениях и макроскопически взаимно компенсируют друг друга. Некомпенсированными остаются только молекулярные токи, выходящие на наружную боковую поверхность цилиндра. Эти токи складываются в макроскопический поверхностный ток I_m, циркулирующий по боковой поверхности цилиндра. Во внешнем пространстве он возбуждает такое же макроскопическое поле, что и молекулярные токи. Этот ток и есть ток намагничивания. Его магнитный момент

равен, с одной стороны, $I_m\mathbf{S}/c$. С другой стороны, тот же магнитный момент равен $V\mathbf{I} = SL\mathbf{I}$. Таким образом, $I_m\mathbf{S}/c = SL\mathbf{I}$. Так как

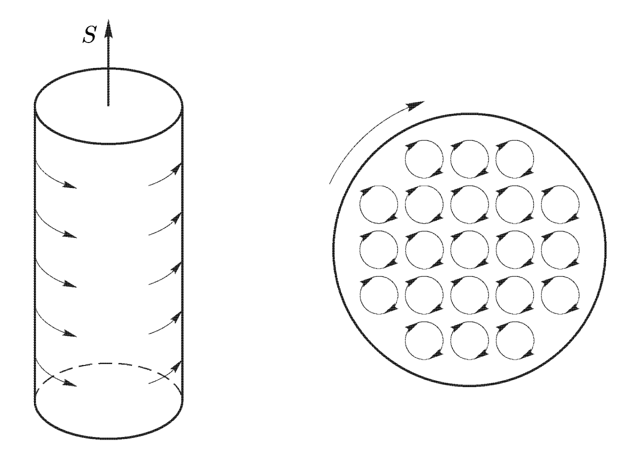


Рис. 149

векторы $\mathbf{S}$ и $\mathbf{I}$ одинаково направлены, то $I_m = cLI$. Следовательно, поверхностный ток намагничивания, приходящийся на единицу длины цилиндра, равен

$$i_m = cI. \tag{58.6}$$

Обобщим теперь результат (58.6) на случай косого цилиндра (рис. 150). Пусть поверхностные токи намагничивания текут в плоскостях, параллельных основаниям цилиндра. Вектор намагничивания $\mathbf{I}$ будет перпендикулярен к этим основаниям. Если α — угол между вектором $\mathbf{I}$ и осью цилиндра, то для магнитного момента последнего можно написать $V\mathbf{I} = SL\mathbf{I}\cos\alpha$. Тот же момент можно представить в виде $I_m\mathbf{S}/c = Li_m\mathbf{S}/c$, где i_m — ток намагничивания, приходящийся на единицу длины образующей боковой поверхности цилиндра. Приравнивая оба выражения, получаем

$$i_m = cI\cos\alpha = c(\mathbf{I}\mathbf{l}) = cI_l. \tag{58.7}$$

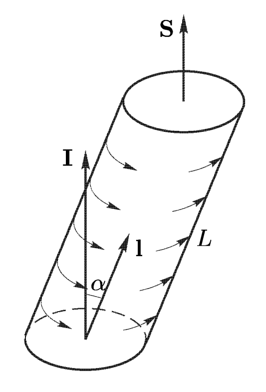
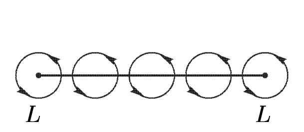


Рис. 150

Здесь $\mathbf{l}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси цилиндра. Таким образом, ток i_m определяется только осевой составляющей вектора намагничивания $\mathbf{I}$. Формула (58.7) и является обобщением формулы (58.6). Ее можно применять и в тех случаях, когда магнетик намагничен неоднородно. Для этого цилиндр следует брать бесконечно малым. В случае неоднородной намагниченности в магнетике возникают не только поверхностные, но и объемные токи намагничивания. Выражение для плотности таких токов будет получено в следующем параграфе.

§ 59. Теорема о циркуляции магнитного поля в веществе

1. Найдем циркуляцию вектора **B** по любому замкнутому контуру L. Для этого надо вычислить ток намагничивания I_m, пронизывающий этот контур. Натянем на контур L произвольную поверхность S. На рис. 151 слева изображено сечение этой поверхности и контура L



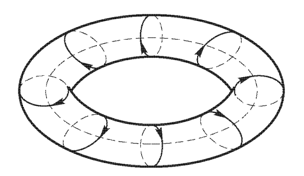


Рис. 151

плоскостью рисунка. Одни молекулярные токи пересекают поверхность S дважды: раз в положительном и раз в отрицательном направлении. Такие токи не вносят никакого вклада в ток намагничивания через поверхность S. Другие молекулярные токи обвиваются вокруг контура L. Каждый из них пересекает поверхность только один раз — противоположно направленный ток в молекуле выходит уже за пределы поверхности S. Такие молекулярные токи и создают макроскопический ток намагничивания I_m, пронизывающий площадь S.

Выразим ток I_m через вектор намагничивания **I**. Для этого окружим контур L бесконечно узкой трубкой (рис. 151, справа). Согласно формуле (58.7) по поверхности такой трубки циркулирует ток намагничивания с линейной плотностью $i_m = cI_l$. Он только один раз пересекает поверхность S. Ток, приходящийся на элемент длины трубки, равен $i_m\,dl = cI_l\,dl = c(\mathbf{I}\,d\mathbf{l})$. Полный ток намагничивания, пронизывающий поверхность S, найдется интегрированием этого выражения по всему замкнутому контуру L. Это дает

$$I_m = c\oint_L (\mathbf{I}\,d\mathbf{l}). \qquad (59.1)$$

Внеся это выражение в формулу (58.3), придадим ей вид

$$\oint (\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{I})\,d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{3}\,I. \qquad (59.2)$$

В дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\,(\mathbf{j} + c\operatorname{rot}\mathbf{I}). \qquad (59.3)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (58.4), находим

$$\mathbf{j}_m = c\operatorname{rot}\mathbf{I}. \qquad (59.4)$$

Если намагниченность однородна, т. е. $\mathbf{I} = \text{const}$, то $\mathbf{j}_m = 0$. Если же она неоднородна, то объемная плотность тока намагничивания, вообще говоря, отлична от нуля.

2. Введем теперь вспомогательный вектор

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{I}. \tag{59.5}$$

Тогда формулы (59.2) и (59.3) примут вид

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I, \tag{59.6}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \tag{59.7}$$

После введения вектора **H** из уравнений (59.6) и (59.7) выпадают токи намагничивания, остаются только токи проводимости. В этом смысл введения вектора **H**. Вектор **H** играет в учении о магнетизме такую же вспомогательную роль, что и вектор **D** в учении о диэлектриках. *Основным вектором является вектор* **B**. Это — *силовой вектор*, и его следовало бы называть напряженностью магнитного поля в веществе. Однако по историческим причинам *напряженностью магнитного поля в веществе называют вектор* **H**, а вектор **B** получил неудачное название *магнитной индукции*. Такая нерациональная терминология сложилась потому, что исторически учение о магнетизме развивалось по аналогии с электростатикой. Источниками магнитного поля считались *магнитные заряды*, а их, как было установлено позднее, в действительности не существует. Мы вынуждены пользоваться этой нерациональной терминологией ввиду того, что она общепринята. Впрочем, в большинстве случаев мы будем избегать употребления терминов «индукция» и «напряженность» магнитного поля, заменяя их соответственно на «вектор **B**» и «вектор **H**». В вакууме векторы **B** и **H** тождественно совпадают.

3. Согласно определению (59.5) векторы **B** и **H** имеют одинаковую размерность. Они должны иметь и общую единицу. Единицей **B** в гауссовой системе является *гаусс*. Та же единица применяется и для измерения **H**. Однако в этом случае ее называют *эрстедом*. Величину **B** измеряют в гауссах, а величину **H** — в эрстедах. Считается ошибкой сказать, что поле **B** равно стольким-то эрстедам, а поле **H** — столькимто гауссам. Мы не можем с одобрением относиться к такому соглашению, так как *между гауссом и эрстедом нет абсолютно никакой разницы. Это — разные названия одной и той же единицы.* Следовало бы сохранить только одно из этих названий: либо гаусс, либо эрстед.

§ 60. Граничные условия для векторов B и H

1. Из уравнений (58.1) и (59.6) легко получить условия, которым должны удовлетворять векторы **B** и **H** на границе раздела двух магнетиков. Уравнение (58.1) формально не отличается от соответствующего

уравнения для вектора электрического смещения $\mathbf{D}$ при отсутствии электрических зарядов. Отсюда следует, что на границе раздела нормальные слагающие вектора $\mathbf{B}$ должны быть непрерывны:

$$B_{1n} = B_{2n}. \tag{60.1}$$

Перейдем к выводу граничных условий для вектора $\mathbf{H}$. В целях общности будем предполагать, что вдоль границы раздела течет поверхностный ток проводимости с линейной плотностью $\mathbf{i}$. Применим теорему о циркуляции (59.6) к бесконечно малому прямоугольному контуру $ABCD$ (рис. 152), высота которого пренебрежимо мала по сравнению с длиной основания l. Тогда можно пренебречь вкладом в циркуляцию, который вносят боковые стороны AB и CD. В этом приближении циркуляция вектора $\mathbf{H}$ будет $(H_{2t} - H_{1t})l$. По теореме о циркуляции та же величина равна $(4\pi/c)i_N l$, где i_N — слагающая тока $\mathbf{i}$ вдоль нормали к контуру $\mathbf{N} = [\mathbf{nt}]$. Приравнивая оба выражения, получим

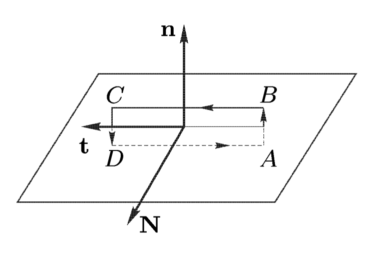


Рис. 152

$$H_{2t} - H_{1t} = \frac{4\pi}{c}\, i_N. \tag{60.2}$$

Придадим этому соотношению векторную форму. Введем единичный вектор касательной к границе раздела $\mathbf{t} = [\mathbf{Nn}]$. Тогда левая часть равенства (60.2) представится в виде

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)\mathbf{t} = (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)\,[\mathbf{Nn}] = ([\mathbf{nH}_2] - [\mathbf{nH}_1])\,\mathbf{N},$$

а правая — в виде $(4\pi)/c(\mathbf{iN})$. Вектор $\mathbf{N}$ в плоскости раздела сред может быть направлен как угодно. Поэтому, приравнивая оба выражения, получим

$$[\mathbf{nH}_2] - [\mathbf{nH}_1] = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{i}. \tag{60.3}$$

Если на границе сред ток проводимости не течет, то

$$H_{1t} = H_{2t}, \tag{60.4}$$

т. е. тангенциальные слагающие вектора $\mathbf{H}$ на границе раздела непрерывны.

2. Граничные условия (60.1) и (60.4) указывают *принципиальный способ* измерения векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ в веществе. Непосредственное измерение магнитного поля в веществе с помощью пробного витка или магнитной стрелки не может быть выполнено. Во-первых, потому, что в вещество не всегда можно поместить пробный виток (например, это нельзя сделать, когда тело твердое). Во-вторых, если бы это и можно было сделать, то оставалось бы неясным, как по силе, действующей на виток, и ее моменту найти векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$. Поэтому для измерения $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ в веществе необходимо сделать полость и измерить вектор $\mathbf{B}$

в этой полости. Однако результат будет зависеть от формы полости. Рассмотрим два наиболее важных случая.

Случай 1. В магнетике сделан бесконечно узкий канал, параллельный магнитному полю. Удаление вещества из такого канала лишь бесконечно мало возмущает поле в окружающем магнетике. В силу граничного условия (60.4) векторы **H** в канале и в окружающем магнетике должны быть одинаковы. Поместим пробный виток в канал и измерим там величину **B**. Она будет равна вектору **H** в окружающем магнетике.

Случай 2. В магнетике сделана щель, ограниченная двумя бесконечно близкими плоскостями, перпендикулярными к магнитному полю. Удаление вещества из такой бесконечно узкой щели также бесконечно мало возмущает магнитное поле в окружающем магнетике. В силу граничного условия (60.1) векторы **B** в щели и в окружающем магнетике одинаковы. Измерив величину **B** в щели, мы найдем ее значение и в окружающем магнетике.

§ 61. Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость

1. Железо и все так называемые ферромагнитные вещества (сталь, кобальт, никель, различные магнитные сплавы) обладают не только сильными магнитными свойствами. Они характеризуются весьма сложной зависимостью между векторами **I** и **B**. Эта зависимость — *нелинейная.* Кроме того, для указанных веществ наблюдается *гистерезис*, т. е. зависимость намагничивания от предшествующей истории магнетика. Только для парамагнитных и диамагнитных сред (а такие среды по сравнению с ферромагнитными обладают слабыми магнитными свойствами) зависимость между **I** и **B** линейная и для изотропных сред может быть записана в виде $\mathbf{I} = \varkappa_1 \mathbf{B}$. Было бы рационально записывать это соотношение именно в такой форме. Однако в силу исторических причин, о которых было сказано в § 59, принято выражать вектор **I** не через **B**, а через **H**. Вместо соотношения, приведенного выше, пишут

$$\mathbf{I} = \varkappa \mathbf{H}. \tag{61.1}$$

Ошибки в этом нет, так как ввиду соотношения (59.9) из пропорциональности между **I** и **B** следует и пропорциональность между **I** и **H**. Подставляя выражение (61.1) в соотношение (59.5), получим

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \tag{61.2}$$

где

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa. \tag{61.3}$$

Величина $\varkappa$ называется *магнитной восприимчивостью*, а μ — *магнитной проницаемостью* вещества. Тела, для которых $\varkappa > 0$ и, следовательно, $\mu > 1$, называются *парамагнитными*, или *парамагнетиками.* К ним относятся, например, кислород, алюминий, платина, хлористое железо ($FeCl_3$) и т. д. Тела, для которых $\varkappa < 0$ и, следовательно, $\mu < 1$,

называются *диамагнитными*, или *диамагнетиками.* Таковы азот, углекислота, вода, серебро, висмут и пр. Парамагнетики намагничиваются вдоль, а диамагнетики — противоположно магнитному полю.

Зависимость вида (61.2) часто используется и для ферромагнетиков, например мягкого железа. Ясно, что она не учитывает явлений гистерезиса. Кроме того, для учета нелинейных эффектов магнитную проницаемость μ надо считать функцией напряженности поля H(или B). В слабых полях B можно разложить по степеням H и ограничиться первым членом этого разложения. В таком приближении величина μ считается постоянной. Более подробно магнитные свойства ферро- и других магнетиков рассматриваются ниже (см. § 76, 77, 79, 80). Пока же при рассмотрении различных явлений мы будем пользоваться соотношениями (61.1) и (61.2), предполагая, что постоянные $\varkappa$ и μ от напряженности магнитного поля не зависят. Разумеется, это строго допустимо только для пара- и диамагнетиков. Для ферромагнетиков результаты, полученные таким путем, должны рассматриваться как оценочные.

2. На границе раздела двух магнетиков магнитные силовые линии должны преломляться. Это следует из граничных условий (60.1) и (60.4), если учесть соотношение (61.2). Допустим, что граница раздела плоская и никакой ток проводимости по ней не течет (рис. 153). Непрерывность тангенциальных слагающих вектора **H** дает

$$H_1 \sin\alpha_1 = H_2 \sin\alpha_2,$$

а непрерывность нормальных слагающих вектора **H** —

$$\mu_1 H_1 \cos\alpha_1 = \mu_2 H_2 \cos\alpha_2.$$

Из этих уравнений находим

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \tag{61.4}$$

Рис. 153

— соотношение, аналогичное соотношению (15.9) для электрических силовых линий. При переходе из магнетика с меньшей в магнетик с большей магнитной проницаемостью магнитная силовая линия удаляется от нормали к границе раздела сред. Это приводит к *концентрации магнитных силовых линий* в магнетиках с большей μ.

На рис. 51 показано, как искажаются электрические силовые линии при внесении в однородное электрическое поле полого шара из диэлектрика. Совершенно так же действует полый железный шар, если его внести в магнитное поле. Из-за преломления магнитные силовые линии концентрируются преимущественно в железе. Внутри полости их концентрация мала. Это значит, что магнитное поле в полости сильно ослаблено по сравнению с внешним полем, т. е. оболочка железной полости обладает экранирующим действием по отношению к внешнему магнитному полю. На этом основана *магнитная защита.* Для того

чтобы предохранить какой-либо чувствительный прибор от воздействия внешних магнитных полей, его окружают железной оболочкой.

Но оболочка не защищает внешние тела от воздействия магнитных полей токов или магнитов, помещенных внутри самой оболочки. Например, магнитное поле прямого круглого провода с током не изменится, если окружить его коаксиальной железной трубой. Это непосредственно следует из теоремы о циркуляции. Магнитные силовые линии имеют форму окружностей с центрами на оси провода (см. рис. 126). Циркуляция вектора $\mathbf{H}$ по одной из таких окружностей будет $2\pi RH$. По теореме о циркуляции та же величина равна $4\pi I/c$. Сравнивая оба выражения, получаем $H = 2I/(cR)$ независимо от того, окружен провод железной трубой или не окружен. В этом можно убедиться на демонстрационном опыте. Надо произвести сначала опыт Эрстеда с обычным проводом (см. рис. 134). Затем повторить его с тем же проводом, заключенным в железную трубу. Оказывается, что в обоих случаях отклонение магнитной стрелки одно и то же.

Железная оболочка лишь частично защищает окруженные ею тела от действия внешних магнитных полей. Чем больше магнитная проницаемость μ, тем сильнее это защитное действие. Однако существуют тела, которые в этом отношении являются идеальными. Это — *сверхпроводники.* Оболочка из сверхпроводника, находящегося в сверхпроводящем состоянии, полностью защищает окружаемые ею тела от действия внешнего магнитного поля (см. § 80).

3. Если магнетик ввести в однородное магнитное поле, то он намагнитится. Возникающее при этом магнитное поле внутри магнетика сильно зависит от формы последнего. В общем случае поле внутри тела магнетика неоднородно. Только для тел, имеющих форму эллипсоида, внутреннее магнитное поле однородно. Оно отличается от внешнего поля не только по величине, но, вообще говоря, и по направлению. Предельными случаями эллипсоида являются очень длинный и очень короткий цилиндры. Если ось цилиндра параллельна внешнему магнитному полю, то расчет сильно упрощается. Внутри очень длинного цилиндра вектор $\mathbf{H}$ равен вектору $\mathbf{H}_0$ внешнего магнитного поля. Поэтому

$$\mathbf{I} = \varkappa\mathbf{H} = \frac{\mu - 1}{4\pi}\,\mathbf{H}_0 = \frac{\mu - 1}{4\pi}\,\mathbf{B}_0,$$

так как во внешнем пространстве $\mathbf{H}_0 = \mathbf{B}_0$. В случае очень короткого цилиндра

$$\mathbf{I} = \varkappa\mathbf{H} = \frac{\varkappa}{\mu}\,\mathbf{B} = \frac{\mu - 1}{4\pi\mu}\,\mathbf{B}_0.$$

При одном и том же внешнем поле $\mathbf{B}_0$ намагниченность магнетиков с большой проницаемостью μ во втором случае много меньше, чем в первом. Для цилиндров промежуточных размеров намагниченность $\mathbf{I}$ будет неоднородна. Однако ее значение будет лежать между найденными двумя предельными значениями. Для шара, как легко рассчитать,

намагниченность однородна и определяется формулой

$$\mathbf{I} = \frac{3\mu - 1}{4\pi\mu + 2}\,\mathbf{B}_0.$$

Зависимость намагничивания от формы тела можно демонстрировать с помощью следующего эффектного опыта. Берется пучок тонких железных стержней, перевязанных нитками. Пучок помещается на столе в вертикальном положении. Верхний конец пучка немного входит внутрь вертикальной катушки, расположенной над пучком. По обмотке катушки пропускается постоянный ток. Ток подбирается таким, чтобы сила, втягивающая пучок в катушку, была несколько меньше веса пучка. Пучок подобен толстому стержню и поэтому намагничивается относительно слабо. Если пережечь нитки, то стержни с силой втягиваются в катушку и в дальнейшем удерживаются в ней. Дело в том, что после пережигания ниток каждый стержень ведет себя почти независимо от других стержней и намагничивается значительно сильнее.

Обычно для объяснения описанных явлений вводят понятия *размагничивающего поля* и *размагничивающего фактора.* Пусть $\mathbf{H}_0$ — внешнее однородное магнитное поле, в которое внесено какое-либо тело из магнетика, имеющее эллипсоидальную форму. В этом случае, как было указано выше, поле $\mathbf{H}$ внутри магнетика будет однородным. Его можно представить в виде $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_\text{р}$. Поле $\mathbf{H}_\text{р}$ и называется *размагничивающим полем*, так как в ферро- и парамагнетиках оно направлено противоположно внешнему полю $\mathbf{H}_0$ и ослабляет последнее. Размагничивающее поле можно представить в виде $\mathbf{H}_\text{р} = -N\mathbf{I}$, где коэффициент N зависит только от формы тела. Этот коэффициент и называется *размагничивающим фактором.* Нам представляется, что введение понятий размагничивающего поля и размагничивающего фактора является ненужным и только запутывает истолкование явлений. Реальная задача состоит в том, чтобы выяснить влияние формы тела на вектор намагничивания $\mathbf{I}$, если это тело поместить в заданное однородное магнитное поле $\mathbf{B}_0$.

4. Вектор $\mathbf{B}$ в магнетике был определен как напряженность результирующего магнитного поля, возбуждаемого токами проводимости и токами намагничивания. В некоторых случаях и вектор $\mathbf{H}$ допускает аналогичную интерпретацию. Рассмотрим, например, бесконечно длинный соленоид, по поверхности которого циркулирует ток проводимости с постоянной линейной плотностью. Соленоид заполнен однородным магнетиком. По оси соленоида в магнетике сделан бесконечно узкий цилиндрический канал, из которого вещество удалено. Поперечное сечение соленоида приведено на рис. 154. Как показано в предыдущем параграфе, вектор $\mathbf{H}$ в магнетике совпадает с вектором $\mathbf{H}$ в канале. Токи намагничивания сводятся к поверхностным токам, текущим по наружной поверхности цилиндра и по внутренней поверхности канала. Направления этих токов противоположны. Возбуждаемые ими магнитные поля в канале имеют противоположные направления и взаимно уничтожают друг друга. Полное поле в канале есть результат действия

одних только токов проводимости. Следовательно, в рассматриваемом случае вектор **H** можно интерпретировать как напряженность магнитного поля, возбуждаемого только токами проводимости.

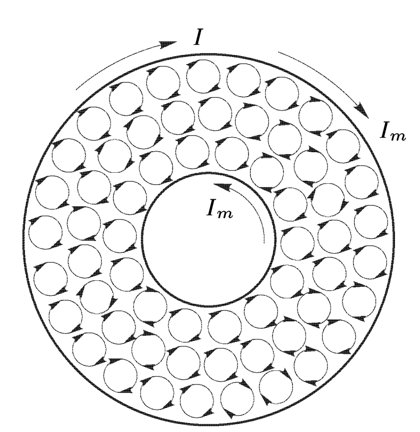


Рис. 154

Такая интерпретация всегда справедлива, если намагничивание однородно во всем пространстве. Действительно, взяв дивергенцию от обеих частей уравнения (59.5), получим

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = -4\pi \operatorname{div}\mathbf{I}. \tag{61.5}$$

Если $\mathbf{I} = \text{const}$, то получится система уравнений

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0,$$

тождественная с соответствующими уравнениями для вакуума. Будут тождественны и решения этих уравнений в вакууме и веществе, если только токи проводимости $\mathbf{j}$ одинаковы. Отсюда следует, что если во всем пространстве $\operatorname{div}\mathbf{I} = 0$, то вектор **H** в магнетике может быть истолкован как напряженность магнитного поля, возбуждаемого только токами проводимости. Однако если $\operatorname{div}\mathbf{I}$ не везде равна нулю, то такая интерпретация становится неправильной. В этом случае вектор **H** не допускает простого физического толкования и должен определяться формально с помощью соотношения (59.5). Если, например, среда неоднородна, то

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = \operatorname{div}(\mu\mathbf{H}) = \mu \operatorname{div}\mathbf{H} + \mathbf{H}\operatorname{grad}\mu = 0,$$

или $\operatorname{div}\mathbf{H} = -\mathbf{H}\operatorname{grad}\mu/\mu$, т. е., вообще говоря, $\operatorname{div}\mathbf{H} \neq 0$. Поэтому в рассматриваемом случае источниками поля **H** не могут быть одни только токи проводимости.

5. На ток, текущий по проводнику, помещенному в намагничивающейся среде (магнетике), действуют как токи проводимости, так и токи намагничивания. Закон Ампера в магнетике надо поэтому писать в прежнем виде:

$$\mathbf{F} = \frac{I}{c}[d\mathbf{s}\cdot\mathbf{B}]. \tag{61.6}$$

Под **B** следует понимать магнитное поле, создаваемое всеми токами (проводимости и намагничивания), за исключением самого элемента тока $I\,d\mathbf{s}$.

В однородной среде при одних и тех же токах проводимости вектор **B** пропорционален магнитной проницаемости μ. Действительно, в этом случае уравнения (58.2) и (59.7) можно записать в виде

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j}.$$

Если токи $\mathbf{j}$ заданы, то $\operatorname{rot}\mathbf{B}$, а с ним и сам вектор $\mathbf{B}$ пропорциональны μ. Отсюда следует, что при заполнении пространства между проводами однородным магнетиком сила взаимодействия токов возрастает в μ раз.

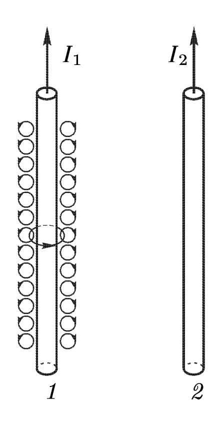


Рис. 155

Поясним это важное заключение на примере взаимодействия двух прямолинейных параллельных проводов, по которым текут токи I_1 и I_2 (рис. 155). Сначала провода находятся в вакууме. Затем все пространство заполняется однородным магнетиком. Вокруг провода *1* возникают молекулярные токи, усиливающие ток I_1. Вследствие этого магнитное поле $\mathbf{B}_1$ первого провода усиливается в μ раз. Во столько же раз возрастает и сила, с которой поле $\mathbf{B}_1$ действует на ток I_2, текущий по второму проводу. Вокруг второго провода также возникают токи намагничивания. Однако они не вносят никакого вклада в силу, действующую на ток I_2. Это объясняется тем, что они текут по поверхности второго провода параллельно его оси. Магнитное поле таких токов равно нулю во всем объеме, занятом вторым проводом.

§ 62. Работа при перемещении витка с током в постоянном магнитном поле

1. Рассмотрим сначала частный случай. Пусть параллельные провода AB и CD (рис. 156) помещены в однородное постоянное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости рисунка и направленное к читателю. Слева находится источник тока, не показанный на рисунке. По проводам может свободно перемещаться проводящий мостик KL, замыкающий ток I, текущий по проводам левее мостика. Если l — длина мостика, то на него магнитное поле действует с силой $F = (I/c)lB$. При перемещении мостика на dx эта сила совершает работу

$$\delta A = \frac{I}{c}\, lB\, dx = \frac{I}{c}\, d(BS),$$

Рис. 156

где S — площадь прямоугольника $AKLC$.
Величина BS есть магнитный поток через тот же прямоугольник. Обозначив его через $\varPhi$, получим для элементарной работы

$$\delta A = \frac{I}{c}\, d\varPhi, \qquad (62.1)$$

а для конечной работы

$$A_{12} = \frac{I}{c}\,(\varPhi_2 - \varPhi_1). \qquad (62.2)$$

Таким образом, работа, совершаемая магнитным полем над током, равна приращению магнитного потока, умноженному на I/c. При выводе предполагалось, что ток I при перемещении мостика KL поддерживался постоянным.

2. Результат справедлив и в том случае, когда магнитное поле направлено произвольно. Чтобы убедиться в этом, разложим вектор $\mathbf{B}$ на три составляющие: $\mathbf{B} = \mathbf{B}_n + \mathbf{B}_l + \mathbf{B}_x$. Составляющая $\mathbf{B}_l$ вдоль мостика параллельна току в нем, а потому не оказывает на мостик силового действия. Составляющая $\mathbf{B}_x$ вдоль перемещения дает силу, перпендикулярную к перемещению, и работы не производит. Работа производится лишь составляющей $\mathbf{B}_n$, перпендикулярной к плоскости рисунка, в которой перемещается мостик KL. Эта работа представляется выражениями (62.1) и (62.2).

3. Докажем, наконец, что формулы (62.1) и (62.2) справедливы для любого витка с током при произвольном перемещении его в постоянном неоднородном магнитном поле. Виток может не только перемещаться как целое, но и произвольно деформироваться. Для доказательства достаточно мысленно разбить виток на бесконечно малые элементы тока и рассмотреть бесконечно малые перемещения их. При бесконечно малом перемещении элемента тока магнитное поле, в котором он перемещается, может считаться однородным. К такому перемещению применимо выражение (62.1) для элементарной работы. Сложением таких элементарных работ для всех элементов тока, на которые разбит виток, снова получается выражение (62.1), в котором $d\Phi$ означает приращение магнитного потока через весь виток. После этого переход от формулы (62.1) к формуле (62.2) совершается простым интегрированием. Подчеркнем еще раз, что при перемещении витка сила тока в нем *должна поддерживаться постоянной*. Это достигается путем надлежащего увеличения электродвижущей силы источника.

§ 63. Способ Гаусса измерения магнитных полей

Постоянные магниты являются магнетиками, вектор намагничивания $\mathbf{I}$ которых практически не изменяется при внесении магнита во внешнее магнитное поле (если последнее не слишком сильное). На этом основан *метод Гаусса* измерения напряженности магнитного поля. Пусть магнит имеет форму прямого стержня, намагниченного параллельно его оси. Обозначим через $\mathfrak{M}$ его магнитный момент. В однородном магнитном поле $\mathbf{B}$ на магнит действует вращающий момент $[\mathfrak{M}\mathbf{B}]$. Если магнит может свободно вращаться вокруг своего центра масс, то под действием этого вращающего момента вектор $\mathfrak{M}$ установится вдоль $\mathbf{B}$. Выведем немного магнит из положения равновесия. Возникнут малые колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{\mathfrak{M}\mathbf{B}}}, \tag{63.1}$$

где Θ — момент инерции магнита.

Закрепим теперь магнит перпендикулярно к магнитному полю **B** и поместим вдали от магнита на продолжении его оси маленькую магнитную стрелку. Считая магнит точечным диполем, для магнитного поля $\mathbf{B}_1$ магнита в месте нахождения стрелки можно написать $B_1 = 2\mathfrak{M}/r^3$, где r — расстояние между центрами стрелки и магнита. Это поле направлено вдоль оси магнита, т. е. перпендикулярно к измеряемому полю **B**. Под действием полей **B** и $\mathbf{B}_1$ стрелка установится под углом α к полю **B**, который определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B_1}{B} = \frac{2\mathfrak{M}}{Br^3}. \tag{63.2}$$

Измерив время T и угол α, можно по формулам (63.1) и (63.2) вычислить как напряженность поля **B**, так и магнитный момент магнита $\boldsymbol{\mathfrak{M}}$.

Можно поступить и иначе. Магнит по-прежнему закрепляют перпендикулярно к полю **B**, но магнитную стрелку помещают на линии, перпендикулярной к оси магнита и проходящей через его центр. Тогда поле магнита $\mathbf{B}_2$ в месте нахождения стрелки определится по формуле $B_2 = \mathfrak{M}/r^3$ и будет направлено противоположно вектору $\boldsymbol{\mathfrak{M}}$, т. е. по-прежнему перпендикулярно к вектору **B**. Поэтому угол α между **B** и осью стрелки в положении равновесия определится соотношением

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B_2}{B} = \frac{\mathfrak{M}}{Br^3}, \tag{63.3}$$

которым можно воспользоваться вместо соотношения (63.2).

Со времен Гаусса описанный способ широко применяется для измерения магнитного поля Земли. При этом магнит и магнитная стрелка располагаются в горизонтальной плоскости и могут вращаться вокруг вертикальной оси. В таком случае методом Гаусса определяется не полное магнитное поле Земли **B**, а только его *горизонтальная составляющая.*

§ 64. Электромагнитная индукция

1. Открытие *электромагнитной индукции* Фарадеем в 1831 г. было одним из наиболее фундаментальных открытий в электродинамике. Для демонстрации этого явления возьмем неподвижный магнит и проволочную катушку, концы которой соединим с гальванометром. Если катушку приближать к одному из полюсов магнита, то во время движения стрелка гальванометра отклоняется — в катушке возбуждается электрический ток. При движении катушки в обратном направлении направление тока меняется на противоположное. То же самое происходит, если повернуть магнит на 180°, не меняя направления движения катушки. Магнит можно заменить другой катушкой с током или электромагнитом. Вообще, при движении катушки в постоянном магнитном поле в ней (за исключением некоторых специальных случаев, которые выяснятся ниже) возбуждается электрический ток, прекращающийся, когда катушка останавливается. Этот ток называется *индукционным током*, а самое явление — *электромагнитной индукцией.* В частности,

когда катушка равномерно вращается в постоянном магнитном поле, индукционный ток периодически меняет свою силу и направление.

2. Возбуждение электрического тока при движении проводника в магнитном поле объясняется действием силы Лоренца, возникающей при движении проводника. Рассмотрим сначала простейший случай, когда два параллельных провода AB и CD помещены в постоянное однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости рисунка и направленное к читателю (рис. 157). Слева провода AB и CD замкнуты, справа — разомкнуты. Вдоль проводов может свободно скользить проводящий мостик BC. Когда мостик движется вправо со скоростью $\mathbf{v}$, вместе с ним движутся электроны и положительные ионы. На каждый движущийся заряд e в магнитном поле действует сила Лоренца $\mathbf{F} = (e/c)[\mathbf{vB}]$. На положительный ион она действует вниз, на отрицательный электрон — вверх. В результате электроны начнут перемещаться по мостику вверх, т. е. по нему потечет электрический ток, направленный вниз. Это и есть индукционный ток. Перераспределившиеся заряды создадут электрическое поле, которое возбудит токи и в остальных участках контура $ABCD$. На рис. 157 эти токи изображены сплошными стрелками.

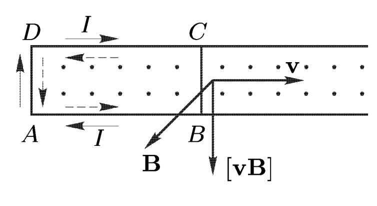


Рис. 157

Сила Лоренца $\mathbf{F}$ в описанном опыте играет роль сторонней силы, возбуждающей электрический ток. Соответствующая напряженность стороннего поля равна $\mathbf{E}^{\text{стор}} = \dfrac{\mathbf{F}}{e} = \dfrac{1}{c}[\mathbf{vB}]$. Электродвижущая сила, создаваемая этим полем, называется *электродвижущей силой индукции* и обозначается $\mathscr{E}^{\text{инд}}$. В рассматриваемом случае $\mathscr{E}^{\text{инд}} = -(v/c)Bl$, где l — длина мостика. Знак минус поставлен потому, что стороннее поле $(1/c)[\mathbf{vB}]$ направлено против положительного обхода контура, определяемого вектором $\mathbf{B}$ по правилу правого винта. На рис. 157 это направление показано штриховыми стрелками. Величина lv есть приращение площади контура $ABCD$ в единицу времени, или скорость приращения этой площади. Поэтому величина vBl равна $d\Phi/dt$, т. е. скорости приращения магнитного потока, пронизывающего площадь контура $ABCD$. Таким образом,

$$\mathscr{E}^{\text{инд}} = -\frac{1}{c}\,\frac{d\Phi}{dt}. \tag{64.1}$$

Результат (64.1) справедлив и в том случае, когда однородное магнитное поле $\mathbf{B}$ направлено под любым углом к плоскости контура $ABCD$. Действительно, представим вектор $\mathbf{B}$ в виде $\mathbf{B}_t + \mathbf{B}_n$, где $\mathbf{B}_t$ — тангенциальная, а $\mathbf{B}_n$ — нормальная к плоскости контура слагающие этого вектора. Вектор $\mathbf{B}_t$ вносит в стороннее поле слагаемое $(1/c)[\mathbf{vB}_t]$, перпендикулярное к мостику. Оно вызывает лишь перераспределение электрических зарядов поперек мостика, но тока не

дает. Ток вызывается только нормальной слагающей $\mathbf{B}_n$, а потому $\mathscr{E}^{\text{инд}}$ определяется прежней формулой (64.1).

Теперь не составляет труда распространить формулу (64.1) на случай любого замкнутого провода, движущегося произвольным образом в постоянном неоднородном магнитном поле. Для этого надо мысленно разбить провод на бесконечно малые участки и рассмотреть движение каждого из них. При бесконечно малом перемещении каждого из таких участков магнитное поле, в котором он движется, можно считать однородным. Поэтому электродвижущая сила, действующая между концами участка, может быть представлена выражением (64.1). Путем суммирования таких выражений получится формула того же вида, в которой, однако, под $\mathscr{E}^{\text{инд}}$ следует понимать полную электродвижущую силу, действующую в замкнутом проводе, а под $d\Phi/dt$ — скорость изменения магнитного потока через любую поверхность, натянутую на контур провода.

Формула (64.1) выражает *основной закон электромагнитной индукции.* Она показывает, что при движении замкнутого провода в магнитном поле в нем возбуждается электродвижущая сила, пропорциональная скорости приращения магнитного потока, пронизывающего контур провода.

3. К формуле (64.1) можно прийти также с помощью закона сохранения энергии, как это впервые сделал Гельмгольц.

Рассмотрим, следуя Гельмгольцу, замкнутый виток провода, в который включен гальванический элемент с электродвижущей силой $\mathscr{E}$. Виток движется в постоянном магнитном поле (вообще говоря, неоднородном). За время dt амперовы силы совершают над витком работу $(I/c)\,d\Phi$. Кроме того, в витке выделяется джоулево тепло $RI^2\,dt$. Сумма этих величин должна равняться работе гальванического элемента $\mathscr{E}I\,dt$, т. е.

$$\frac{1}{c}\,I\,d\Phi + I^2R\,dt = \mathscr{E}I\,dt. \tag{64.2}$$

Отсюда

$$I = \frac{\mathscr{E} - (1/c)\,d\Phi/dt}{R}. \tag{64.3}$$

Таким образом, в движущемся витке ток определяется не только электродвижущей силой гальванического элемента. К ней добавляется слагаемое $-(1/c)\,d\Phi/dt$. Это слагаемое и есть электродвижущая сила индукции.

Заметим, что уравнению сохранения энергии (64.2) можно также удовлетворить, положив $I = 0$. Какое из двух решений выбрать: решение $I = 0$ или решение (64.3) — на это закон сохранения энергии не дает никаких указаний. Следовательно, без привлечения дополнительных соображений он не позволяет предсказать явление электромагнитной индукции. Нужно как-то исключить решение $I = 0$. С этой целью, как это сделал Гельмгольц, в виток и включен гальванический элемент с электродвижущей силой $\mathscr{E}$. То обстоятельство, что добавочная электродвижущая сила $-(1/c)\,d\Phi/dt$, появляющаяся при движении

проводника, не зависит от $\mathscr{E}$, делает правдоподобным заключение, что и при отсутствии гальванического элемента в движущемся витке должна возникнуть такая же электродвижущая сила. Можно обойтись и без введения гальванического элемента, если предположить, что при движении проводника должен возникать индукционный ток. Тогда закон сохранения энергии позволяет определить силу этого тока, а следовательно, и электродвижущую силу индукции. В этом истинный смысл и содержание рассуждения Гельмгольца.

4. Индукционные токи могут возникать и в неподвижных проводниках. Действительно, возьмем замкнутый провод и постоянный магнит. При движении провода возникает индукционный ток. Что произойдет, если, оставляя провод неподвижным, двигать магнит? Покой и движение — понятия относительные. Явление индукционного тока должно зависеть только от *относительного движения провода и магнита.* Отсюда следует, что при движении магнита будет возбуждаться такой же индукционный ток, что и при соответствующем движении провода. Опыт подтверждает это заключение. Возьмем прежнюю катушку, соединенную с гальванометром, и будем приближать к ней магнит. Стрелка гальванометра отклонится — в катушке возбудился электрический ток. При удалении магнита стрелка отклоняется в противоположную сторону, т. е. индукционный ток меняет направление. То же самое происходит, если магнит повернуть к катушке другим полюсом, не меняя направления его движения. Если магнит вращать, то индукционный ток в катушке будет периодически менять свое направление. Когда магнит останавливается, индукционный ток в катушке прекращается. Вместо магнита можно взять электромагнит или другую катушку, по которой течет ток, возбуждающий магнитное поле. При их движении в неподвижной катушке возбуждается электрический ток.

В описанных опытах с движением магнита менялся магнитный поток, пронизывающий неподвижную катушку. Но такое же изменение магнитного потока можно получить и без движения магнита. Достаточно поместить катушку в переменное магнитное поле. Последнее можно подобрать так, чтобы в месте нахождения катушки оно в точности совпадало с магнитным полем движущегося магнита. От такой замены объективные физические условия, в которых находится катушка, не изменятся. Поэтому естественно ожидать, что не изменится и индукционный ток, возбуждаемый в катушке. Опыт подтверждает и это заключение. Возьмем две неподвижные катушки, одна из которых помещена внутри другой. Если через одну из катушек пропускать переменный ток, то в другой катушке появляется индукционный электрический ток. Таким образом, для возбуждения индукционного тока существенно *изменение магнитного потока* через контур проводника, а не способ, каким это изменение достигается.

Вот другая демонстрация, подтверждающая это заключение. На подковообразный магнит надевается проволочная катушка, соединенная с гальванометром (рис. 158). Если полюсы магнита замкнуть же-

лезным якорем, то изменится магнитный поток через катушку. В ней возникает индукционный ток, и стрелка гальванометра отклоняется. При удалении якоря магнитный поток меняется в обратном направлении. В результате меняется направление индукционного тока, а с ним отклонение стрелки гальванометра.

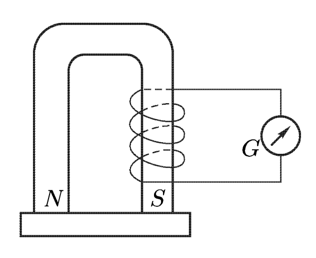


Рис. 158

Таким образом, *всякий раз, когда меняется магнитный поток, пронизывающий контур неподвижного или движущегося замкнутого провода, в проводе возникает индукционный ток, причем во всех случаях электродвижущая сила индукции определяется формулой* (64.1).

§ 65. Правило Ленца

1. Формула (64.1) определяет не только величину, но и *направление* индукционного тока. Действительно, возьмем в магнитном поле замкнутый проволочный виток, положительное направление обхода которого составляет с направлением поля правовинтовую систему (на рис. 159 магнитное поле направлено к читателю). Допустим, что магнитный поток Φ возрастает. Тогда, согласно формуле (64.1), величина $\mathscr{E}^{\text{инд}}$ будет отрицательна, а потому индукционный ток в витке потечет в отрицательном направлении. Такой ток, ослабляя внешнее магнитное поле, будет препятствовать возрастанию магнитного потока. Пусть теперь магнитный поток Φ убывает. Тогда величина $\mathscr{E}^{\text{инд}}$ станет положительной, а индукционный ток в витке потечет в положительном направлении и будет препятствовать убыванию магнитного поля и магнитного потока. Таким образом, *индукционный ток всегда имеет такое направление, что он ослабляет действие причины, возбуждающей этот ток.* Это правило впервые было сформулировано Ленцем (1804–1865) и носит его имя. Ле Шателье (1850–1936), а затем Браун (1850–1918) обобщили правило Ленца и распространили его на все физические явления (см. т. II, § 51).

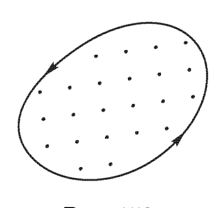


Рис. 159

2. Подвесим над проволочной катушкой прямой магнит NS, уравновешенный грузом на неподвижном блоке (рис. 160). В цепь катушки включим гальванометр. Быстро вдвинем магнит в катушку — появится индукционный ток, и гальванометр даст отброс. Заметив направление отклонения стрелки гальванометра, переключим катушку с гальванометром на батарею. (Во избежание порчи гальванометра его надо шунтировать, так как батарея даст значительно более сильный ток, чем ток индукции.) Пусть переключение выполнено так, что ток от батареи отклоняет стрелку гальванометра в ту же сторону, что и ток индукции, т. е. оба тока направлены одинаково. Опыт показывает, что

в этом случае ток от батареи выталкивает магнит из катушки, как и должно быть согласно правилу Ленца. Если же ток от батареи направлен противоположно току индукции, то, в согласии с тем же правилом, магнит втягивается в катушку. Аналогичные явления наблюдаются при выдвигании магнита.

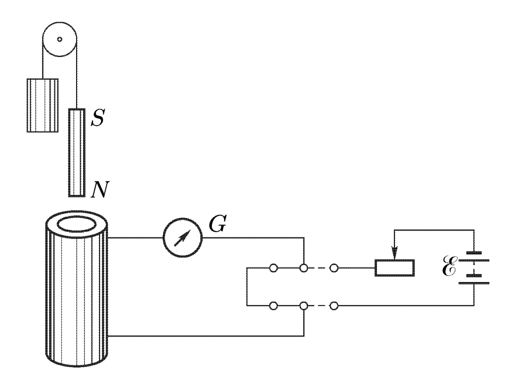


Рис. 160

Возьмем горизонтальную катушку с сердечником, состоящим из многих железных прутьев. Через центр катушки проходит гладко отполированный и закрепленный горизонтально железный стержень, длина которого ($\sim$ 1 м) примерно в три раза больше длины катушки. На стержень наденем легкое алюминиевое кольцо, диаметр которого немного больше диаметра стержня, так что оно может свободно перемещаться по стержню. Если замкнуть ток в катушке, то в кольце возникнет индукционный ток противоположного направления, и кольцо оттолкнется от катушки. При надлежаще подобранной силе тока кольцо отлетит почти до самого конца стержня. При размыкании цепи индукционный ток будет противоположного направления и вернет кольцо почти в исходное положение. Вместо кольца можно взять короткую катушку, бифилярно подвешенную на длинных нитях.

Опыт выглядит значительно эффектнее, если воспользоваться переменным током от городской сети, как это сделал Элиу Томсон (1853–1937). Катушка с сердечником ставится теперь вертикально. На железный сердечник надевается широкое толстое алюминиевое кольцо. (Алюминий берется потому, что он легкий и имеет малое удельное сопротивление.) В катушку посылается переменный ток от городской сети, возбуждающий в кольце индукционный ток противоположного направления. Эти токи отталкиваются. Сила отталкивания не постоянна, а периодически колеблется с частотой, вдвое превосходящей частоту колебаний городского тока. Действительно, пусть в некоторый момент оба тока достигли максимума и текут в противоположных направлениях. Тогда будет максимальна и сила отталкивания. Через половину

периода городской и индукционный токи изменят направления на противоположные, и сила отталкивания достигнет прежнего максимального значения. Если замкнуть ток в катушке, то сила отталкивания подбросит алюминиевое кольцо до потолка большой аудитории. Если кольцо удерживать щипцами в неподвижном положении, то оно сильно нагревается: сопротивление кольца ничтожно, а потому индукционные токи в нем очень велики. Опыт с нагреванием можно произвести, взяв вместо алюминиевого тонкое медное кольцо. Из-за большой плотности меди и большого сопротивления кольца оно не подбрасывается вверх, а только сильно разогревается.

3. В массивных проводниках, движущихся в магнитных полях или помещенных в переменные магнитные поля, возбуждаются вихревые индукционные токи, называемые *токами Фуко*. По физической природе они ничем не отличаются от индукционных токов, возбуждаемых в линейных проводах. С помощью токов Фуко очень эффектно демонстрируется правило Ленца. Возьмем маятник, изготовленный из толстой листовой меди и имеющий форму усеченного сектора (рис. 161). Маятник подвешен на стержне и может свободно колебаться вокруг го-

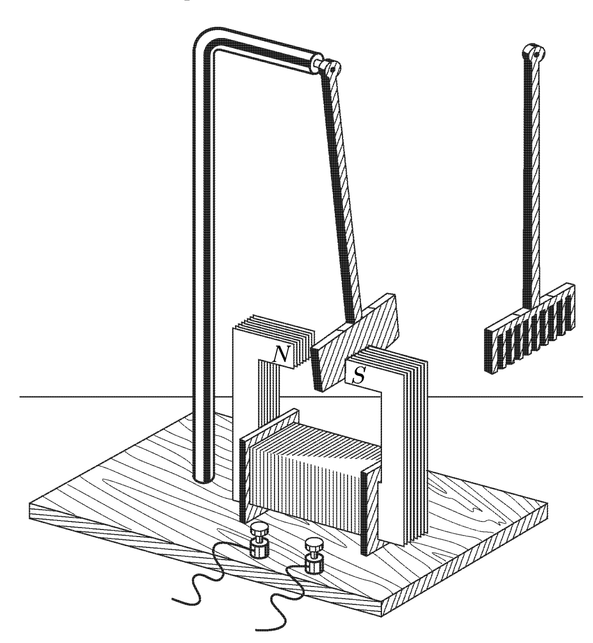


Рис. 161

ризонтальной оси между полюсами сильного электромагнита, создающего магнитное поле порядка 5000 Гс. Пока не включено магнитное поле, маятник колеблется почти без затухания. Замыкая ток в обмотке электромагнита, мы создаем магнитное поле. Тогда при колебаниях

маятника возбуждаются индукционные токи Фуко, согласно правилу Ленца тормозящие движение маятника; колебания последнего моментально прекращаются. Если сплошной сектор маятника заменить гребенкой с длинными зубцами (рис. 161, справа), то возбуждение токов Фуко будет сильно затруднено. Маятник будет колебаться в магнитном поле почти без затухания. Этот опыт объясняет, почему сердечники электромагнитов и рамы трансформаторов делают не из сплошного куска железа, а из многих листов, наложенных друг на друга. В результате токи Фуко возбуждаются слабо и сильно уменьшается вредное влияние джоулева тепла, выделяемого ими.

Возьмем медный или алюминиевый диск диаметром 4–5 см и толщиной 4–6 мм. Заставим его падать в узком зазоре между полюсами электромагнита. Пока магнитное поле не включено, диск движется вниз быстро, как при свободном падении. Включим магнитное поле порядка 5000 Гс. Тогда падение становится очень медленным и напоминает движение в сильно вязкой среде.

Если над магнитной стрелкой поместить горизонтальный медный диск и привести его во вращение вокруг вертикальной оси, то магнитная стрелка придет во вращение в том же направлении. Дело в том, что при относительном движении стрелки и медного диска в диске возбуждаются токи Фуко, которые, согласно правилу Ленца, замедляют это относительное движение. В результате стрелка начинает вращаться вместе с диском.

§ 66. Максвелловская трактовка явления электромагнитной индукции

1. Когда проводник движется в постоянном магнитном поле, индукционный ток вызывается магнитной составляющей силы Лоренца $(e/c)[\mathbf{vB}]$. Какая же сила возбуждает индукционный ток в неподвижном проводнике, находящемся в переменном магнитном поле? Ответ был дан Максвеллом. Согласно Максвеллу, *всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле.* Последнее и является причиной возникновения индукционного тока в проводнике. Максвеллу принадлежит следующая углубленная формулировка закона электромагнитной индукции.

Всякое изменение магнитного поля во времени возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле. Циркуляция вектора напряженности $\mathbf{E}$ *этого поля по любому неподвижному замкнутому контуру* s *определяется выражением*

$$\oint\limits_s (\mathbf{E}\,d\mathbf{s}) = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \tag{66.1}$$

где Φ *— магнитный поток, пронизывающий контур* s*.* Мы использовали для обозначения скорости изменения магнитного потока знак частной, а не полной производной. Этим мы хотим подчеркнуть, что контур s должен быть неподвижным.

Между максвелловым и фарадеевым пониманием явления электромагнитной индукции имеется существенное различие. Согласно Фарадею, электромагнитная индукция состоит *в возбуждении электрического тока.* Для ее наблюдения необходимо *наличие замкнутого проводника.* Максвелл, напротив, видит сущность электромагнитной индукции прежде всего *в возбуждении электрического поля*, а не тока. Электромагнитная индукция может наблюдаться и тогда, когда в пространстве вообще *нет никаких проводников.* Появление индукционного тока в замкнутом проводнике при внесении последнего в переменное магнитное поле есть лишь *одно из проявлений* электрического поля $\mathbf{E}$, возникшего в результате изменения поля магнитного. Но поле $\mathbf{E}$ может производить и другие действия, например поляризовать диэлектрик, вызвать пробой конденсатора, ускорять и тормозить заряженные частицы и т. п. Оно может вызвать электрический ток и в незамкнутом проводнике, как показывает, например, следующий опыт.

Возьмем две катушки, расположенные близко одна от другой приблизительно так, чтобы ось одной катушки была продолжением оси другой. Концы первой катушки присоединим к звуковому генератору, т. е. прибору, который может возбуждать переменные токи с частотами, лежащими в звуковом диапазоне. Концы второй катушки соединим с горизонтальными пластинами электронного осциллографа. Когда в первой катушке течет переменный ток, луч осциллографа отклоняется, хотя цепь второй катушки разомкнута. Луч бегает вверх и вниз, и на экране видна светлая вертикальная полоска, переходящая в синусоиду после включения горизонтальной развертки. Это доказывает, что между горизонтальными пластинами осциллографа появилось переменное электрическое поле. Пластины оказались заряженными, причем их заряды периодически меняются во времени, а во второй катушке текут переменные индукционные токи, несмотря на то, что цепь разомкнута.

Максвеллова формулировка закона индукции более общая, чем формулировка Фарадея. Она принадлежит к числу наиболее важных обобщений электродинамики. Математически закон индукции в понимании Максвелла выражается формулой (66.1), где s — произвольный математический замкнутый контур, который может быть проведен и в диэлектрике, а не обязательно в проводнике, как было у Фарадея. Магнитный поток Φ определяется интегралом

$$\Phi = \oint_s \mathbf{B}\, d\mathbf{S}, \tag{66.2}$$

взятым по произвольной поверхности S, натянутой на контур s. Поэтому формулу (66.1) можно представить в виде

$$\oint_s (\mathbf{E}\, d\mathbf{s}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\, d\mathbf{S}. \tag{66.3}$$

Это уравнение имеет ту же математическую структуру, что и уравнение (55.5). Роль вектора $4\pi\mathbf{j}$ играет вектор $-\partial\mathbf{B}/\partial t$. Поэтому оно может быть преобразовано в дифференциальную форму совершенно

так же, как это было сделано с уравнением (55.5). В результате такого преобразования получится

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{66.4}$$

Это — *дифференциальная форма закона электромагнитной индукции.* Уравнение (66.3) или эквивалентное ему уравнение (66.4) — одно из основных соотношений теории электромагнитного поля. Оно входит в систему уравнений Максвелла.

2. В электростатике источниками электрического поля являются неподвижные электрические заряды. Для такого поля интеграл $\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{s}$ обращается в нуль по любому замкнутому контуру. По этой причине одно только электростатическое поле не может обеспечить непрерывное течение электричества вдоль замкнутых проводов. Напротив, электрическое поле, возбуждаемое магнитным полем, меняющимся во времени, — не потенциальное, а *вихревое.* Ротор такого поля и его циркуляция, вообще говоря, отличны от нуля. Благодаря этому вихревое поле без каких бы то ни было добавочных сил может вызвать непрерывное течение электричества по замкнутым проводам. Это течение и наблюдается в виде индукционных токов.

3. В общем случае, когда проводник движется в переменном магнитном поле, индукционный ток возбуждается как электрической силой $e\mathbf{E}$, так и магнитной силой $(e/c)[\mathbf{vB}]$. Объединяя обе силы, можно сказать, что *во всех случаях индукционный ток вызывается полной силой Лоренца*

$$\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,[\mathbf{vB}]\right). \tag{66.5}$$

Какая часть индукционного тока вызывается электрической, а какая магнитной составляющей силы Лоренца — это зависит *от выбора системы отсчета.* Дело в том, что деление электромагнитного поля на электрическое и магнитное определяется системой отсчета, в которой рассматриваются явления. Возьмем две системы отсчета: «неподвижную» систему S и «движущуюся» S'. Пусть V — скорость системы S' относительно системы S. При переходе от одной системы отсчета к другой векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ определенным образом преобразуются. Законы этого преобразования устанавливаются в теории относительности и будут рассмотрены в т. IV нашего курса. Но и здесь, если только скорость V мала по сравнению со скоростью света c, можно составить об этих законах предварительное представление. Приводимые ниже формулы совпадают с точными релятивистскими формулами в первом порядке относительно малого отношения V/c. Они содержат ошибки порядка $(V/c)^2$.

Пусть $\mathbf{v}$ — скорость частицы относительно системы S, а $\mathbf{v}'$ — относительно системы S'. Эти скорости связаны соотношением $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$. В системе S сила, действующая на частицу с зарядом e, определяется

выражением (66.5), а в системе S' — выражением

$$\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E}' + \frac{1}{c}\,[\mathbf{v}'\mathbf{B}']\right),$$

где $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{B}'$ — электрическое и магнитное поля в системе S'. В нерелятивистской механике сила — инвариант: $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$. Поэтому, заменяя в формуле (66.5) скорость $\mathbf{v}$ на $\mathbf{v}' + \mathbf{V}$, получим

$$\mathbf{F}' = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,[\mathbf{VB}]\right) + \frac{e}{c}\,[\mathbf{v}'\mathbf{B}].$$

Чтобы найти напряженность поля $\mathbf{E}'$, надо взять частицу, покоящуюся в системе S', т. е. в предыдущем выражении положить $\mathbf{v}' = 0$. Это дает

$$\mathbf{F}' = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,[\mathbf{VB}]\right).$$

С другой стороны, для той же силы можно написать $\mathbf{F}' = e\mathbf{E}$. Сравнивая оба выражения, находим

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c}\,[\mathbf{VB}]. \qquad (66.6)$$

Это и есть нерелятивистский закон преобразования электрического поля. Аналогичный закон для магнитного поля не может быть выведен без использования теории относительности, а потому мы приведем его здесь без доказательства:

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c}\,[\mathbf{VE}]. \qquad (66.7)$$

Возникает вопрос: можно ли перейти к такой системе отсчета, в которой электромагнитное поле сделалось бы чисто электрическим или чисто магнитным? Для того чтобы поле стало чисто электрическим, должно быть $\mathbf{B}' = 0$, или, ввиду формулы (66.7), $\mathbf{B} - (1/c)[\mathbf{VE}] = 0$. Записанное в виде $\mathbf{B} - (1/c)[\mathbf{V}_\perp\mathbf{E}] = 0$, это уравнение определяет поперечную (относительно вектора $\mathbf{E}$) составляющую скорости $\mathbf{V}$. Продольная составляющая скорости $\mathbf{V}$ остается неопределенной. Векторным умножением последнего уравнения на $\mathbf{E}$ получаем

$$\mathbf{V}_\perp = \frac{c}{E^2}\,[\mathbf{EB}].$$

Отсюда видно, что система отсчета, обладающая требуемыми свойствами, существует не всегда. Может случиться, что последнее уравнение даст $V_\perp > c$, а это невозможно. Правда, для такого заключения в нерелятивистской теории нет оснований, так как формулы (66.6) и (66.7) верны только при $V \ll c$. Однако само заключение верно, как в этом можно убедиться с помощью точных релятивистских формул преобразования полей. Точно так же не всегда возможно перейти к такой системе отсчета, в которой электромагнитное поле становится чисто магнитным. Отсюда следует, что в общем случае индукционный ток вызывается как электрическим, так и магнитным полями. Не всегда

возможно, перейдя к другой системе отсчета, рассматривать его как проявление только одного из этих полей.

§ 67. Флюксметр и пояс Роговского

На явлении электромагнитной индукции основан простой и удобный метод измерения напряженности магнитных полей. Соединим с баллистическим гальванометром концы небольшого витка проволоки. Расположим плоскость витка перпендикулярно к магнитному полю. Пусть его пронизывает магнитный поток Φ. Если быстро убрать виток из поля или повернуть его вокруг диаметра на 90°, то магнитный поток обратится в нуль. Того же можно достигнуть, выключив ток, возбуждающий магнитное поле. При изменении магнитного потока через виток течет кратковременный ток

$$I = -\frac{1}{Rc}\,\frac{d\Phi}{dt},$$

где R — сумма сопротивлений витка, баллистического гальванометра и подводящих проводов. За все время изменения магнитного потока от Φ до 0 через гальванометр пройдет количество электричества

$$q = -\frac{1}{Rc}\int\limits_0^t \frac{d\Phi}{dt}\,dt = \frac{\Phi}{Rc}. \tag{67.1}$$

Отклонение баллистического гальванометра пропорционально заряду q, а потому он позволяет измерить этот заряд. После этого по формуле (67.1) можно вычислить магнитный поток Φ, а затем и индукцию B. Для увеличения чувствительности вместо одного витка лучше взять маленькую плоскую катушечку, состоящую из многих витков. Если n — общее число витков, а S — площадь одного витка, то $\Phi = nSB$. Такая катушечка, служащая для измерения магнитного потока Φ, а с ним и индукции B, называется *флюксметром.* Прибор можно проградуировать, чтобы он прямо указывал значение потока Φ или индукцию B.

Явление электромагнитной индукции можно также использовать для измерения *магнитного напряжения*, т. е. линейного интеграла $\int\limits_{12} \mathbf{B}\,d\mathbf{s}$. Вообще говоря, такой интеграл зависит не только от положения начальной и конечной точек *1* и *2*, но и от кривой *12*, соединяющей эти точки. Однако при определенных условиях можно выделить такую совокупность кривых, соединяющих точки *1* и *2*, что вдоль всех этих кривых интеграл $\int \mathbf{B}\,d\mathbf{s}$ будет иметь одно и то же значение. Так будет всегда, когда от одной кривой можно перейти к другой непрерывной деформацией, нигде не пересекая электрических токов. Возьмем проволочную спираль, навитую на гибкий ремень, концы которой соединены с баллистическим гальванометром (рис. 162 a). Расположим ось спирали по линии, вдоль которой требуется измерить магнитное напряжение между точками *1* и *2*. Магнитный поток Φ через спираль может быть

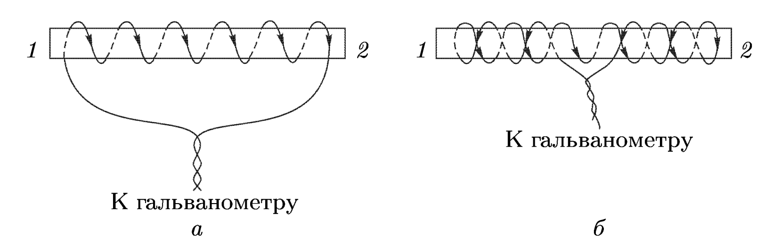


Рис. 162

измерен по отбросу баллистического гальванометра совершенно так же, как это делалось в случае флюксметра. Поток может быть представлен в виде

$$\Phi = \int Sn\mathbf{B}\,d\mathbf{s}.$$

Здесь S — площадь одного витка, а n — число витков, приходящееся на единицу длины спирали. Если величины n и S не меняются вдоль спирали, то

$$\Phi = Sn\int(\mathbf{B}\,d\mathbf{s}).$$

Отсюда

$$\int(\mathbf{B}\,d\mathbf{s}) = \frac{\Phi}{Sn} = \frac{cR}{nS}\,q. \tag{67.2}$$

В приведенных рассуждениях допущены некоторые неточности. Магнитное поле спирали слагается из магнитных полей круговых токов, которые мы учли. Но есть составляющая тока, параллельная оси спирали. Ее магнитное поле не учтено. Кроме того, есть магнитное поле подводящих проводов. Чтобы влияние этих полей исключить, спираль навивают на ремень в два слоя, идущие навстречу друг другу (рис. 162 *б*). Концы проводов выводят в одном месте, например в середине ремня. Подводящие провода скручивают. В таком виде прибор называется *поясом Роговского.* Для измерения магнитного напряжения пояс Роговского располагают между нужными точками вдоль заданной кривой. Затем выключают ток, создающий магнитное поле. Баллистический гальванометр даст отброс, пропорциональный искомому магнитному напряжению.

ЗАДАЧИ

1. Механическая аналогия явления электромагнитной индукции. Труба, свернутая в кольцо, заполнена жидкостью и находится в поле тяжести Земли. При повороте кольца вокруг его диаметра жидкость приходит в движение вдоль оси трубы. Это движение аналогично индукционному току, возникающему при движении проводника в магнитном поле. Роль силы Лоренца играет *сила инерции Кориолиса*, вызванная вращением Земли вокруг своей оси. Опыт может служить для доказательства вращения Земли и измерения угловой скорости этого вращения. На основе аналогии описанного явления с электромагнитной индукцией дать количественную

теорию его, предполагая, что жидкость несжимаема и не обладает вязкостью, а площадь поперечного сечения трубы всюду одинакова.

Решение. Будем рассматривать движение жидкости относительно системы отсчета, связанной с вращающейся Землей. Это относительное движение происходит под действием гравитационных сил, градиентов давления жидкости, центробежной силы инерции и силы инерции Кориолиса. Все эти силы, за исключением силы Кориолиса, потенциальны. Поэтому относительное движение жидкости можно представить в виде

$$\mathbf{a} = 2[\mathbf{v}\boldsymbol{\Omega}] + \mathbf{a}',$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ — угловая скорость осевого вращения Земли, $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_{\text{отн}}$ — скорость жидкости относительно Земли, $\mathbf{a}'$ — ускорение, вызванное потенциальными силами. Потенциальный вектор $\mathbf{a}'$ можно исключить, взяв циркуляцию вектора $\mathbf{a}$ по замкнутому контуру. В качестве такового выберем геометрическую ось кольцевой трубы. Тогда

$$\oint \mathbf{a}\, ds = \oint\limits_s \mathbf{f}_{\text{K}}\, ds,$$

где $\mathbf{f}_{\text{K}} = 2[\mathbf{v}\boldsymbol{\Omega}]$ — кориолисова сила, действующая на единицу массы жидкости. Так как жидкость несжимаема, а площадь поперечного сечения трубы всюду одна и та же, то осевая составляющая ускорения a_s будет также всюду одинакова. Вынося ее из-под знака интеграла, получим $a_s = \mathscr{E}/s$, где s — длина трубы, а $\mathscr{E}$ означает интеграл $\oint \mathbf{f}_{\text{K}}\, ds$. Эта формула аналогична закону Ома. Роль силы тока, сопротивления и электродвижущей силы играют величины a_s, s и $\mathscr{E}$. Аналогом магнитного поля $\mathbf{B}$ служит удвоенная угловая скорость вращения Земли $2\boldsymbol{\Omega}$. Поэтому на основании закона электромагнитной индукции можно написать $\mathscr{E} = -d\Phi/dt$, где Φ — поток вектора $2\boldsymbol{\Omega}$, пронизывающий контур s. Таким образом,

$$a_s \equiv \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{s}\,\frac{d\Phi}{dt},$$

откуда

$$V = -\frac{1}{s}\,\Delta\Phi. \tag{67.3}$$

Через V обозначена осевая составляющая скорости жидкости.

Допустим, что кольцо имеет форму круга радиуса R и в начальный момент расположено горизонтально. Пусть S — вектор площади кольца в этом положении. Повернем кольцо на 180° вокруг горизонтальной оси. Тогда

$$\Phi_{\text{нач}} = 2(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{S}), \quad \Phi_{\text{конеч}} = -2(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{S}), \quad \Delta\Phi = -4(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{S}) = -4\Omega S\sin\vartheta.$$

Здесь ϑ — географическая широта места, где производится опыт. Подставляя в формулу (67.3) $S = \pi R^2$, $s = 2\pi R$ и предполагая, что в начальный момент жидкость была неподвижна, получим

$$V = 2\Omega R\sin\vartheta.$$

Пусть в конечном положении кольцо находится в покое. Тогда жидкость будет двигаться в нем со скоростью $V = 2\Omega R\sin\vartheta$. На полюсе $\vartheta = 90°$, $V = 2\Omega R$. Этот результат легко получить также, относя все движения к «неподвижной» системе отсчета. На экваторе $V = 0$.

2. Металлический шар радиуса a из немагнитного материала движется равномерно в постоянном и однородном магнитном поле $\mathbf{B}$ со скоростью $\mathbf{v}$,

направленной под углом к магнитному полю. Найти напряженность электрического поля внутри и вне шара в «неподвижной» системе отсчета, относительно которой шар движется со скоростью $\mathbf{v}$. Найти также объемную и поверхностную плотность индуцированных зарядов. Магнитным полем движущихся индуцированных зарядов пренебречь.

Решение. Так как в стационарном состоянии ток внутри шара должен отсутствовать, то электрическое поле $\mathbf{E}^{(i)}$ должно компенсироваться силой $(1/c)[\mathbf{vB}]$. Это дает для электрического поля внутри шара

$$\mathbf{E}^{(i)} = -\frac{1}{c}\,[\mathbf{vB}].$$

Объемных зарядов внутри шара не будет, так как $\operatorname{div}\mathbf{E}^{(i)} = 0$. Касательная составляющая поля $\mathbf{E}^{(i)}$, а следовательно, и внешнего поля $\mathbf{E}^{(e)}$ на поверхности шара будет $E_\vartheta = -E^{(i)}\sin\vartheta$, где ϑ — угол между направлением вектора $\mathbf{E}^{(i)}$ и радиусом $\mathbf{r}$, проведенным из центра шара. Наружное поле $\mathbf{E}^{(e)}$ ищем как поле диполя $\mathbf{p}$, помещенного в центре шара:

$$\mathbf{E}^{(e)} = \frac{3(\mathbf{pr})}{r^5}\,\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}.$$

Вектор $\mathbf{p}$ легко найти по значению касательной составляющей E_ϑ. Таким путем получаем

$$\mathbf{E}^{(e)} = \frac{3a^3}{cr^5}\,([\mathbf{vB}]\mathbf{r})\mathbf{r} - \frac{a^3}{cr^3}\,[\mathbf{vB}].$$

Поверхностная плотность зарядов σ определится по скачку нормальных составляющих электрического поля. Она равна

$$\sigma = \frac{3}{4\pi c}\,([\mathbf{vB}]\mathbf{n}),$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности шара.

3. Как с помощью флюксметра можно измерить магнитное поле внутри длинного соленоида, закрытого с обоих торцов крышками из немагнитного материала, не вводя флюксметр внутрь соленоида? Обмотка соленоида доходит до самых концов цилиндра, на который она намотана.

Ответ. Надо с помощью флюксметра, размеры которого малы по сравнению с радиусом цилиндра, измерить магнитное поле в центре одного из оснований цилиндра. Поле внутри соленоида будет в два раза больше.

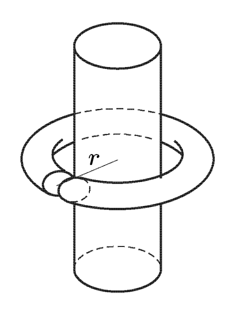


Рис. 163

4. На цилиндрический железный сердечник, через который проходит однородный магнитный поток $\Phi = \Phi_0\cos\omega t$, надет тор из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε (рис. 163). В торе имеется бесконечно узкий воздушный зазор, сделанный двумя бесконечно близкими разрезами вдоль меридиональных плоскостей. Найти напряженность электрического поля E в зазоре в зависимости от расстояния r до оси цилиндра.

Ответ. $E = \dfrac{\varepsilon\omega}{2\pi cr}\,\Phi_0\sin\omega t.$

§ 68. Индуктивность проводов. Явления при замыкании и размыкании тока

1. Рассмотрим тонкий замкнутый провод, по которому течет постоянный ток I (рис. 164). Пусть $\mathbf{B}$ — магнитное поле этого тока. Внутри провода параллельно его оси проведем произвольный замкнутый математический контур s и установим на нем положительное направление. Пусть Φ — магнитный поток, посылаемый вектором $\mathbf{B}$ через контур s. Если в пространстве нет ферромагнитных тел, то величины $\mathbf{B}$ и Φ будут пропорциональны току, и можно написать

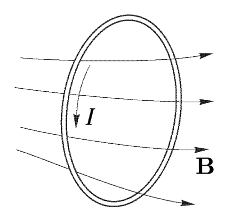


Рис. 164

$$\Phi = LI^{(m)} = \frac{1}{c} LI. \tag{68.1}$$

Здесь I — сила тока в гауссовой системе единиц, а $I^{(m)}$ — сила того же тока в системе СГСМ. Коэффициент L не зависит от силы тока. Он определяется только размерами и конфигурацией самого провода и называется *индуктивностью* этого провода. Его называют также *самоиндукцией*, или *коэффициентом самоиндукции* провода. Это определение содержит известный элемент неопределенности, поскольку точно не фиксировано, как внутри провода проведен вспомогательный математический контур s. Но для тонкого провода эта неопределенность пренебрежимо мала и не имеет никакого значения. Кроме того, от нее можно полностью освободиться, что будет сделано в § 69. Для краткости величину Φ называют просто *магнитным потоком* через рассматриваемый замкнутый провод. Однако точный смысл этого понятия раскрывается введением вспомогательного математического контура s, как сделано выше.

При вычислении индуктивности тонкий провод нельзя заменить проводом бесконечно тонким — геометрической линией. Действительно, в этом случае магнитное поле вблизи провода было бы пропорционально $1/r$, где r — расстояние до провода. Для магнитного потока и индуктивности мы получили бы бесконечные значения. Чем тоньше провод, тем при прочих равных условиях больше его индуктивность.

2. Для примера вычислим индуктивность соленоида, пренебрегая при этом краевыми эффектами. Пусть l — длина соленоида, N — общее число витков, S — площадь одного витка. Индукция магнитного поля внутри соленоида

$$B = \frac{4\pi}{c} \frac{IN\mu}{l}.$$

Магнитный поток через один виток равен BS, а через N витков — BSN, т. е.

$$\Phi = \frac{4\pi}{c} \frac{\mu N^2 S}{l} I.$$

Сравнивая эту формулу с формулой (68.1), получим

$$L = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l}. \tag{68.2}$$

3. За единицу магнитного потока в гауссовой системе единиц и в системе СГСМ принимают *максвелл.* Максвелл есть магнитный поток, создаваемый магнитным полем в один гаусс через перпендикулярную к нему площадку в один квадратный сантиметр. Как следует из закона Био и Савара

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{cr^3}\,[d\mathbf{l}\,\mathbf{r}],$$

магнитный поток имеет размерность величины $I\mathrm{l}/c$. Учитывая это, из формулы (68.1) находим, что в гауссовой системе и СГСМ коэффициент самоиндукции имеет размерность длины. Его единица в этих системах называется *сантиметром.* Сантиметр есть индуктивность такого витка, в котором ток силой в одну СГСМ-единицу создает магнитный поток в один максвелл. Формула (68.2) дает индуктивность соленоида в сантиметрах.

В практических единицах (вольт, ампер, ом и т. д.) закон электромагнитной индукции и формулу (68.1) записывают в виде

$$\mathscr{E}'^{\,\text{инд}} = \frac{d\Phi'}{dt}, \tag{68.3}$$

$$\Phi' = L'I'. \tag{68.4}$$

Над всеми буквами здесь поставлены штрихи, которые означают, что величины, обозначаемые этими буквами, измеряются в практических единицах. Практической единицей магнитного потока является *вебер.* Эта единица определяется условием, чтобы при скорости изменения магнитного потока в 1 Вб/с в контуре возбуждалась электродвижущая сила в один вольт. Можно также сказать, что вебер есть *вольт-секунда.* Найдем соотношение между вебером и максвеллом. В гауссовой системе

$$\mathscr{E}^{\text{инд}} = -\frac{1}{c}\,\frac{d\Phi}{dt}.$$

Так как $1\ \text{В} = \dfrac{1}{300}$ СГСЭ-ед. напряжения (приближенно), то

$$\mathscr{E}'^{\,\text{инд}}\ (\text{вольты}) = 10^{-8}\,\frac{d\Phi\ (\text{максвеллы})}{dt}\ (\text{точно}).$$

Сопоставляя эту формулу с формулой (68.3), видим, что вебер в 10^8 раз больше максвелла:

$$1\ \text{Вб} = 10^8\ \text{Мкс}.$$

Практической единицей индуктивности является *генри.* Это есть индуктивность такого провода, в котором при силе тока в один ампер

возбуждается магнитный поток в один вебер:

$$1\ \text{Г} = \frac{1\ \text{Вб}}{1\ \text{А}} = \frac{10^8\ \text{Мкс}}{\frac{1}{10}\ \text{СГСМ-ед. тока}} = 10^9\ \text{см}.$$

4. Рассмотрим явления при замыкании и размыкании постоянного тока, обусловленные индуктивностью цепи. Пусть цепь состоит из источника постоянной ЭДС $\mathcal{E}$, катушки самоиндукции и омического сопротивления (рис. 165). Полную индуктивность цепи обозначим через L, а полное сопротивление — через R. При замыкании ключа K ток не сразу достигает предельного значения $\mathcal{E}/R$, определяемого законом Ома, а нарастает постепенно. При этом возрастает также магнитный поток, пронизывающий контур цепи. Возникает электродвижущая сила индукции и соответствующий ей индукционный ток. Этот ток называется *экстратоком замыкания*. Согласно правилу Ленца направление экстратока замыкания противоположно направлению основного тока.

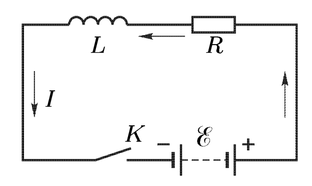


Рис. 165

Сила переменного тока не обязательно должна быть одной и той же на всех участках провода, так как в отдельных местах возможно накопление электрических зарядов. Однако мы рассмотрим здесь только такие переменные токи, которые меняются во времени сравнительно медленно. Тогда мгновенные значения токов во всех участках неразветвленной цепи с высокой степенью точности одикаковы, а магнитные поля внутри проводов могут вычисляться по закону Био и Савара, как если бы токи были постоянными. Такие токи называются *квазистационарными*. Для них справедливы формулы (68.3) и (68.4). Сила тока определяется выражением

$$I = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}^{\text{инд}}}{R}.$$

В практических единицах

$$I' = \frac{\mathcal{E}' - d\Phi/dt}{R'}. \tag{68.5}$$

Это — дифференциальное уравнение для квазистационарных токов. Его можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}(L'I') + R'I' = \mathcal{E}'. \tag{68.6}$$

Если за время изменения тока провода не деформируются, то индуктивность L' постоянна и может быть вынесена из-под знака производной:

$$L'\frac{dI'}{dt} + R'I' = \mathcal{E}'. \tag{68.7}$$

При постоянном значении $\mathscr{E}'$ общее решение этого уравнения имеет вид

$$I' = C\exp\left(-\frac{R'}{L'}\,t\right) + \frac{\mathscr{E}'}{R'}.$$

Постоянная интегрирования C должна определяться из начального условия: в момент замыкания, т. е. при $t = 0$, ток равен нулю. Используя это условие, без труда находим

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}\,(1 - e^{-t/\tau}), \tag{68.8}$$

где τ — постоянная, имеющая размерность времени:

$$\tau = \frac{L'}{R'}. \tag{68.9}$$

Она называется *временем установления тока.* В формуле (68.8) всюду опущены штрихи, так как эта формула применима в любой системе единиц. Меняется только выражение для времени установления тока. В гауссовой системе единиц

$$\tau = \frac{L}{c^2 R}. \tag{68.10}$$

Полный ток I состоит из двух слагаемых, из которых второе, т. е. $-(\mathscr{E}/R)e^{-t/\tau}$, определяет силу экстратока замыкания. При $t \to \infty$ экстраток стремится к нулю, а полный ток I — к своему предельному значению $\mathscr{E}/R$. Таким образом, окончательное значение тока устанавливается постепенно. Быстрота установления определяется временем τ: по истечении времени τ сила экстратока убывает в e раз.

5. Исследуем теперь процесс размыкания тока. Схема опыта изображена на рис. 166. Ключ K сначала замкнут. Направления токов показаны сплошными стрелками. Общий ток распределяется между параллельно включенными самоиндукцией L и омическим сопротивлением R. Если внутреннее сопротивление батареи пренебрежимо мало, то ток в катушке самоиндукции будет равен $I_0 = \mathscr{E}/r$. После размыкания ключа K замкнутым останется только контур $ABCD$. Первоначальный ток, существовавший в катушке самоиндукции, обладал определенным запасом магнитной энергии, которая исчезает не сразу. Магнитное поле начнет убывать. Это возбудит электродвижущую силу и индукционный ток в контуре $ABCD$. Такой ток называется *экстратоком размыкания.* На рис. 166 его направление показано пунктирными стрелками. В катушке

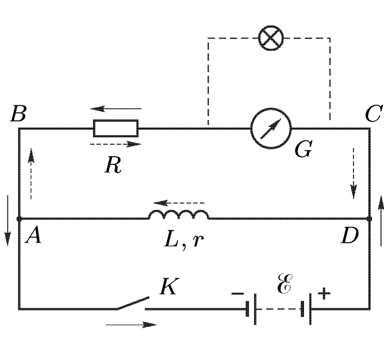


Рис. 166

самоиндукции экстраток течет в том же направлении, что и первоначальный ток, в остальных участках контура $ABCD$ — в противоположном направлении. Если R' — общее сопротивление контура $ABCD$, то сила тока определится из дифференциального уравнения

$$L'\frac{dI'}{dt} + R'I' = 0$$

и начального условия: $I' = I_0'$ при $t = 0$. Это дает

$$I' = I_0' e^{-t/\tau}, \tag{68.11}$$

где τ определяется прежним выражением (68.9). Электродвижущая сила индукции равна

$$\mathscr{E}'^{\text{инд}} = -L'\frac{dI'}{dt} = \frac{L'I_0'}{\tau}\,e^{-t/\tau} = \frac{R'}{r'}\,\mathscr{E}'e^{-t/\tau}. \tag{68.12}$$

Если $R' \gg r'$, то эта величина может значительно превзойти ЭДС батареи. В этом причина электрического пробоя, наблюдающегося иногда при выключении тока в цепях, содержащих большие индуктивности.

Для демонстрации явления можно взять катушку длиной 50–60 см и диаметром 8–10 см с сердечником из железных прутьев и обмоткой из нескольких слоев проволоки диаметром около 1 мм. Параллельно катушке присоединена лампочка, как указано на рис. 166 штриховой линией. Лампочка рассчитана на напряжение, несколько превышающее ЭДС батареи. (При ЭДС батареи в 4 В можно, например, взять лампочку на 12 В.) При замкнутой цепи лампочка горит тускло. При размыкании ключа K она ярко вспыхивает и даже может перегореть, так как ЭДС индукции превосходит в несколько раз ЭДС батареи.

6. Рассмотрим теперь два витка (или две катушки), по которым текут постоянные токи I_1 и I_2. Установим произвольно на этих витках положительные направления обхода. Если в окружающем пространстве нет ферромагнетиков, то магнитные потоки через витки $\varPhi_1$ и $\varPhi_2$ пропорциональны токам и могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \varPhi_1 &= \frac{1}{c}\,L_{11}I_1 + \frac{1}{c}\,L_{12}I_2, \\ \varPhi_2 &= \frac{1}{c}\,L_{21}I_1 + \frac{1}{c}\,L_{22}I_2. \end{aligned} \tag{68.13}$$

Коэффициенты L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22} не зависят от токов, а определяются лишь формой, размерами и взаимным расположением витков. Они называются *коэффициентами индуктивности.* Если $I_2 = 0$, то $\varPhi_1 = L_{11}I_1/c$; если $I_1 = 0$, то $\varPhi_2 = L_{22}I_2/c$. Поэтому L_{11} есть индуктивность первого, а L_{22} — второго витков. Оставшиеся два коэффициента L_{12} и L_{21} называются *взаимными индуктивностями* или *коэффициентами взаимной индукции.* Они, разумеется, измеряются теми же единицами, что и коэффициенты самоиндукции. В практической системе и системе СГСМ множитель c в формулах (68.13) опускают.

Распространение этих понятий на случай системы произвольного числа проволочных витков совершенно тривиально и не нуждается в пояснении. В следующем параграфе будет доказано соотношение $L_{ik} = L_{ki}$, называемое *теоремой взаимности.*

§ 69. Магнитная энергия токов

1. Электрический ток обладает запасом энергии, называемой *магнитной.* При ее вычислении можно полностью отвлечься от сопротивления проводов, по которым текут токи, полагая это сопротивление равным нулю. Это не может отразиться на общности результата, так как *магнитная энергия может зависеть только от величины и распределения токов, а также от магнитных свойств среды, заполняющей пространство.* Считая же провода идеально проводящими, мы упростим рассуждение, так как в расчетах не надо будет учитывать потери энергии на джоулево тепло.

Рассмотрим сначала одиночный неподвижный замкнутый виток проволоки. Пусть в начальный момент сила тока в нем равна нулю. Будем каким-либо способом создавать и наращивать ток в витке I. Тогда будет нарастать и магнитный поток через виток Φ. Возникнет электродвижущая сила индукции. Элементарная работа, которую должен совершить внешний источник против электродвижущей силы индукции, будет

$$\delta A^{\text{внеш}} = -\mathscr{E}^{\text{инд}} I\, dt,$$

или ввиду соотношения (64.1)

$$\delta A^{\text{внеш}} = \frac{1}{c}\, I\, d\Phi. \tag{69.1}$$

Полученное соотношение носит общий характер. Оно справедливо и для ферромагнитных материалов, так как при его выводе относительно магнитных свойств среды не вводилось никаких предположений. Однако если среда не обладает гистерезисом, в частности является пара- или диамагнитной, то работа $\delta A^{\text{внеш}}$ пойдет только на увеличение магнитной энергии W_m, так что

$$dW_m = \frac{I}{c}\, d\Phi. \tag{69.2}$$

В этом параграфе мы будем предполагать, что ферромагнетики отсутствуют. Тогда $\Phi = LI/c$, причем для неподвижного провода самоиндукция L остается постоянной. Используя это и интегрируя, получим

$$W_m = \frac{L}{2}\left(\frac{I}{c}\right)^2 = \frac{1}{2c}\, I\Phi = \frac{\Phi^2}{2L}. \tag{69.3}$$

(В практической системе и системе СГСМ вместо I/c следует писать просто I.) Для справедливости формулы (69.3) несущественно, что во время нарастания тока виток оставался неподвижным, так как энергия зависит только *от состояния системы,* но не от способа, каким было достигнуто это состояние. Например, переход в конечное состояние

можно осуществлять следующим образом. Пока в проводе нет тока, деформируем его, чтобы он принял окончательную конфигурацию. Это не требует затраты работы. Затем, сохраняя провод неподвижным, будем наращивать ток до конечного значения I. На это потребуется работа $LI^2/(2c^2)$. Она и будет равна искомому приращению магнитной энергии. Приведенное рассуждение показывает, что в формуле (69.3) под L следует понимать самоиндукцию витка в конечном состоянии.

Формула (69.3) освобождает понятие самоиндукции от той неопределенности, на которую было указано в § 68. Действительно, ток I и магнитная энергия W_m — величины, определяемые совершенно однозначно. Поэтому по формуле (69.3) можно вычислить также совершенно однозначно и коэффициент самоиндукции L. Более того, эта формула может служить для определения L и в тех случаях, когда провод толстый.

2. Обобщим теперь формулу (69.3) на случай произвольного числа витков. Предполагая опять все витки неподвижными, будем увеличивать токи в них. Тогда для элементарной работы против электродвижущей силы индукции можно по аналогии с формулой (69.1) написать

$$\delta A^{\text{внеш}} = \frac{1}{c}\sum_i I_i\, d\Phi_i, \tag{69.4}$$

где суммирование ведется по всем виткам. Магнитная энергия в конечном состоянии представится интегралом

$$W_m = \frac{1}{c}\int \sum I'_i\, d\Phi'_i,$$

где штрихованными буквами I'_i и Φ'_i обозначены переменные (текущие) значения соответствующих величин. Символы I_i и Φ_i сохранены для обозначения токов и магнитных потоков в конечном состоянии.

Для вычисления интеграла заметим, что его величина не зависит от «пути интегрирования», т. е. от характера изменения силы токов в проводах. Можно, например, возбуждать токи последовательно: сначала создать ток только в первом витке, доведя его значение до величины I_1, затем, не меняя I_1, начать возбуждать ток во втором витке и т. д. Но можно возбуждать токи сразу во всех витках и притом независимо друг от друга. Результат вычисления магнитной энергии во всех случаях будет один и тот же. Чтобы упростить расчет, будем наращивать все токи одновременно и притом так, чтобы они оставались пропорциональными друг другу. Таким образом, в любой момент будет соблюдаться соотношение $I'_i = \lambda I_i$, где λ — переменная величина, не зависящая от i. В начальном состоянии $\lambda = 0$, в конечном $\lambda = 1$. Так как при отсутствии ферромагнитных материалов магнитные потоки связаны с токами линейно, то для них справедливы такие же соотношения, т. е. $\Phi'_i = \lambda\Phi_i$, а потому $d\Phi'_i = \Phi_i\, d\lambda$. Таким образом,

$$W_m = \frac{1}{c}\sum I_i\Phi_i \int_0^1 \lambda\, d\lambda,$$

или после интегрирования

$$W_m = \frac{1}{2c}\sum I_i\Phi_i = \frac{1}{2c^2}\sum\sum L_{ik}I_iI_k. \qquad (69.5)$$

3. При расчете предполагалось, что в процессе намагничивания магнитная проницаемость μ оставалась постоянной. Только при этом условии связь между токами и магнитными потоками будет линейной. Можно показать (см. § 73), что если μ зависит от температуры, то при намагничивании температура магнетика, а с ней и величина μ будут меняться. В этом случае расчет неприменим. Однако он становится применимым, если при намагничивании температуру поддерживать постоянной. Тогда величина W_m будет иметь смысл работы, совершаемой над системой при изотермическом и квазистатическом нарастании тока в проводах. Такая работа в термодинамике называется *свободной энергией.* Таким образом, формулы (69.3) и (69.5) в общем случае определяют не внутреннюю, а *свободную магнитную энергию системы.* Здесь все обстоит так же, как и в аналогичном вопросе электростатики (см. § 28, п. 4).

4. Используя формулы (69.4) и (69.5), докажем теорему взаимности для коэффициентов взаимной индукции, о которой говорилось в предыдущем параграфе. Согласно этой теореме матрица коэффициентов L_{ik} симметрична, т. е.

$$L_{ik} = L_{ki}. \qquad (69.6)$$

Достаточно доказать это соотношение для какой-либо пары индексов, например $i = 1$, $k = 2$. Так как коэффициенты L_{ik} не зависят от токов, то с целью упрощения вычислений можно предположить, что токи текут только по виткам *1* и *2*, а в остальных витках токи равны нулю. Если бесконечно мало изменить токи I_1 и I_2, то на это потребуется затратить работу

$$\delta A^{\text{внеш}} = \frac{1}{c}\,(I_1\,d\Phi_1 + I_2\,d\Phi_2).$$

Она пойдет на приращение магнитной энергии токов $dW_m = \delta A^{\text{внеш}}$. Но эта энергия в рассматриваемом случае дается выражением

$$W_m = \frac{1}{2c}\,(I_1\Phi_1 + I_2\Phi_2),$$

а ее приращение — выражением

$$dW_m = \frac{1}{2c}\,(I_1\,d\Phi_1 + I_2\,d\Phi_2) + \frac{1}{2c}\,(\Phi_1\,dI_1 + \Phi_2\,dI_2).$$

Сравнивая оба выражения для dW_m, получим

$$I_1\,d\Phi_1 + I_2\,d\Phi_2 = \Phi_1\,dI_1 + \Phi_2\,dI_2. \qquad (69.7)$$

Это соотношение справедливо при любых значениях dI_1 и dI_2. Поэтому для сокращения последующих вычислений можно взять $dI_2 = 0$, т. е. $I_2 = \text{const}$. Магнитные потоки определяются выражениями

$$\Phi_1 = \frac{1}{c}\,(L_{11}I_1 + L_{12}I_2), \quad \Phi_2 = \frac{1}{c}\,(L_{21}I_1 + L_{22}I_2).$$

Из них дифференцированием при постоянном I_2 находим

$$d\Phi_1 = \frac{1}{c} L_{11}\, dI_1, \quad d\Phi_2 = \frac{1}{c} L_{21}\, dI_1.$$

Подставляя эти выражения в соотношение (69.7), получим

$$L_{11} I_1\, dI_1 + L_{21} I_2\, dI_1 = (L_{11} I_1 + L_{12} I_2)\, dI_1.$$

Отсюда следует $L_{12} = L_{21}$, и теорема взаимности доказана. При доказательстве сопротивления проводов не учитывались. Но это не имеет значения, так как коэффициенты взаимной индукции L_{ik} зависят только от формы и расположения проводов, а также от распределения плотности электрического тока по их сечениям.

5. В заключение этого параграфа разберем следующий парадокс. Сила $\mathbf{f} = (e/c)[\mathbf{vB}]$, действующая в магнитном поле на движущийся заряд, перпендикулярна к его скорости $\mathbf{v}$, а потому работы не производит. Почему же при движении витка с током (например, якоря электромотора) в магнитном поле механическая работа над проводником, несомненно, производится? Дело в том, что это не есть полная работа магнитного поля над движущимися зарядами, являющимися носителями тока в проводнике. Рассмотрим тождество

$$\frac{1}{c}\,[\mathbf{j}\,\mathbf{B}]\mathbf{v} = -\frac{1}{c}\,[\mathbf{vB}]\,\mathbf{j},$$

где $\mathbf{v}$ — скорость проводника, а $\mathbf{j}$ — плотность электрического тока в нем. Слева стоит работа амперовой силы $\mathbf{f}_{\text{амп}} = (1/c)[\mathbf{j}\,\mathbf{B}]$ над единицей объема проводника в единицу времени, справа — взятая со знаком минус такая же работа электрического поля индукции $\mathbf{E}_{\text{инд}}$, возникающего при движении проводника. Полная работа $A_{\text{полн}} = A_{\text{амп}} + A_{\text{инд}}$ равна нулю. Допустим теперь, что в цепь включена батарея или какой-либо другой источник тока. Тогда добавится работа батареи; $A_{\text{полн}} = A_{\text{амп}} + A_{\text{инд}} + A_{\text{бат}}$. Пусть электродвижущая сила батареи подобрана так, что она в каждый момент времени компенсирует электродвижущую силу индукции, поддерживая ток в цепи постоянным. Тогда $A_{\text{инд}} + A_{\text{бат}} = 0$, и если потери на джоулево тепло пренебрежимо малы, то $A_{\text{полн}} = A_{\text{амп}}$. Таким образом, работа $A_{\text{амп}}$ производится за счет энергии батареи.

§ 70. Локализация магнитной энергии в пространстве

1. Формулы (69.2) выражают магнитную энергию *через токи и магнитные потоки.* В таком виде величина (69.3) может рассматриваться как *потенциальная энергия токов*, взаимодействующих по закону Ампера. Это соответствует представлению о непосредственном действии на расстоянии. Но выражение для магнитной энергии можно преобразовать в другую форму, которая соответствует иному представлению о месте нахождения энергии. Покажем это на примере длинного соленоида, по поверхности которого циркулирует ток с линейной

плотностью $i = I/l$ (l — длина соленоида). Мы не будем пользоваться выражениями (69.3) для энергии токов, так как они справедливы лишь при условии, что векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ связаны соотношением $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, а воспользуемся общей формулой (69.2), справедливость которой предполагает только, что между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ существует какая-то однозначная, но не обязательно линейная функциональная связь (нет гистерезиса). Пренебрегая краевыми эффектами, можно написать для поля H внутри соленоида $H = 4\pi i/c = 4\pi I/(cl)$, откуда $I = clH/(4\pi)$. Пусть S — площадь поперечного сечения соленоида. Тогда $\Phi = BS$, и, следовательно,

$$dW_m = \frac{I}{c}\,d\Phi = \frac{1}{4\pi}\,lSH\,dB = \frac{V}{4\pi}\,(\mathbf{H}\,d\mathbf{B})$$

($V = Sl$ — объем соленоида). Если w_m — магнитная энергия, приходящаяся на единицу объема соленоида, то для ее дифференциала можно написать

$$\delta A^{\text{внеш}} = dw_m = \frac{1}{4\pi}\,(\mathbf{H}\,d\mathbf{B}). \tag{70.1}$$

И в общем случае постоянных электрических токов, произвольным образом текущих в пространстве, можно доказать, что выражение для магнитной энергии может быть преобразовано к виду

$$W_m = \int w_m\,dV, \tag{70.2}$$

где w_m определяется прежней формулой (70.1). Это — чисто математический вопрос, совершенно аналогичный соответствующему вопросу в электростатике. Опуская здесь математические преобразования, остановимся только на физическом смысле формулы (70.2). Ее можно истолковать в том смысле, что *магнитная энергия локализована в пространстве с объемной плотностью* w_m. Это соответствует представлениям теории поля. В рамках учения о постоянных токах и постоянных магнитных полях нельзя указать ни одного опыта, который бы решал вопрос в пользу одного из двух представлений о локализации магнитной энергии: представления теории непосредственного действия на расстоянии и представления теории поля. Здесь дело обстоит совершенно так же, как в электростатике. Лишь явления в быстропеременных полях, например распространение электромагнитных волн, позволяют сделать соответствующий выбор. Они согласуются только с представлением теории поля о локализации магнитной энергии в пространстве. В случае быстропеременных полей формулы (69.3) просто лишены смысла.

В случае пара- и диамагнитных сред $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ и выражение (70.1) можно проинтегрировать. Таким путем получим

$$w_m = \frac{1}{8\pi}\,\mu H^2 = \frac{1}{8\pi}\,\mathbf{HB} = \frac{B^2}{8\pi\mu}. \tag{70.3}$$

2. Приведем теперь математическое доказательство формулы (70.2) Как будет видно из доказательства, можно ограничиться магнитным полем одного витка. Обобщение на случай многих витков чисто формальное и не встречает никаких затруднений. Считая виток неподвижным и полагая в формуле (69.2) $d\Phi = \int\limits_S d\mathbf{B}\, d\mathbf{S}$, получим

$$dW_m = \frac{I}{c}\int\limits_S d\mathbf{B}\, d\mathbf{S},$$

где интегрирование ведется по произвольной поверхности, натянутой на контур тока l. Дальнейшие преобразования используют понятие векторного потенциала. Можно доказать (см. задачи 1 и 2 к этому параграфу), что всякий вектор, дивергенция которого равна нулю, может быть представлен в виде ротора другого вектора. Так как $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, то на этом основании можно написать

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{70.4}$$

Вектор $\mathbf{A}$ и называется *векторным потенциалом* магнитного поля. Из формулы (70.4) следует: $d\mathbf{B} = \operatorname{rot}\, d\mathbf{A}$. Используя это соотношение и применяя теорему Стокса, находим

$$dW_m = \frac{I}{c}\int\limits_S d\mathbf{S}\operatorname{rot}\, d\mathbf{A} = \frac{I}{c}\oint\limits_l (\,d\mathbf{l}\, d\mathbf{A}).$$

Вместо линейного введем объемный элемент тока $\mathbf{j}\,dV = I\,d\mathbf{l}$ и воспользуемся теоремой о циркуляции $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}/c$. Тогда

$$dW_m = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V (d\mathbf{A}\operatorname{rot}\mathbf{H})\, dV,$$

где интеграл распространен по всему пространству, по которому течет ток. Применяя известное тождество векторного анализа (см. задачу 3 к этому параграфу), преобразуем подынтегральное выражение к виду

$$d\mathbf{A}\operatorname{rot}\mathbf{H} = \operatorname{div}[\mathbf{H}\, d\mathbf{A}] + \mathbf{H}\operatorname{rot}\, d\mathbf{A} = \operatorname{div}[\mathbf{H}\, d\mathbf{A}] + \mathbf{H}\, d\mathbf{B}.$$

Интеграл от дивергенции можно преобразовать в поверхностный, взяв в качестве поверхности интегрирования бесконечно удаленную поверхность. Если все токи текут в конечной области пространства, то магнитное поле будет убывать на бесконечности достаточно быстро и рассматриваемый интеграл обратится в нуль.

В результате получится

$$dW_m = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V (\mathbf{H}\, d\mathbf{B})\, dV.$$

Отсюда после интегрирования по $d\mathbf{B}$ получим

$$W_m = \int w_m\, dV, \quad \text{где} \quad w_m = \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{H}\, d\mathbf{B}.$$

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что для произвольного вектора $\mathbf{A}$ справедливо соотношение $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0$.

2. Доказать, что если $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, то вектор $\mathbf{B}$ может быть представлен в виде $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$.

Решение. Содержание теоремы сводится к утверждению, что уравнение $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B}$, где $\mathbf{B}$ — заданный, а $\mathbf{A}$ — неизвестный вектор, имеет решение. Покажем, например, что существует решение, в котором $A_z = 0$. В этом случае рассматриваемое уравнение сводится к системе трех скалярных уравнений:

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} = -B_x, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = B_y, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_z.$$

Первым двум уравнениям можно удовлетворить, полагая

$$A_y = -\int\limits_{z_0}^{z} B_x\,dz + f(x,y), \quad A_x = \int\limits_{z_0}^{z} B_y\,dz,$$

где $f(x,y)$ — произвольная функция. Подставляя это решение в третье уравнение и учитывая, что $\partial B_x/\partial x + \partial B_y/\partial y = -(\partial B_z/\partial z)$, получим

$$\int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial B_z}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial x} = B_z,$$

откуда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = B_z(x,y,z_0)$$

и, далее,

$$f(x,y) = \int B_z(x,y,z_0)\,dx.$$

Таким образом, найдено одно из решений уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B}$, и теорема доказана. Заметим, что это уравнение при условии $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ имеет бесчисленное множество решений, т. е. векторный потенциал определен не однозначно.

3. Доказать тождество

$$\operatorname{div}[\mathbf{AB}] = \mathbf{B}\operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A}\operatorname{rot}\mathbf{B}. \tag{70.5}$$

Решение. В справедливости этого тождества нетрудно убедиться непосредственной проверкой, если записать его в прямоугольных координатах. Однако выкладки получатся более простыми и естественными, если применить символический метод. На основании определения векторного произведения и дивергенции

$$\operatorname{div}[\mathbf{AB}] = \operatorname{div}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

Переставив первую строку полученного определителя со второй, а затем с третьей, соблюдая при этом известное правило знаков, получим два новых определителя:

$$-\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad +\begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.$$

Оба эти определителя, однако, не равны исходному. Это связано с тем, что к рассматриваемому определителю обычное правило перестановки строк неприменимо, так как первая строка его состоит не из чисел, а из операторов.

Пользуясь правилом дифференцирования произведения, нетрудно, однако, заметить, что сумма определителей, полученных в результате перестановки, равна исходному определителю, т. е.

$$\operatorname{div}[\mathbf{AB}] = \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

Очевидно, это соотношение можно переписать так:

$$\operatorname{div}[\mathbf{AB}] = \mathbf{B}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} - \mathbf{A}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix},$$

или

$$\operatorname{div}[\mathbf{AB}] = \mathbf{B}\operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A}\operatorname{rot}\mathbf{B}.$$

§ 71. Теорема о сохранении магнитного потока

Допустим, что виток с током находится в произвольном магнитном поле — постоянном или переменном. Пусть он движется и деформируется произвольным образом. При этом в витке возбуждается индукционный ток

$$I = \frac{\mathscr{E}^{\text{инд}}}{R} = -\frac{1}{cR}\,\frac{d\Phi}{dt}.$$

Если омическое сопротивление R равно нулю, то должно быть $\mathscr{E}^{\text{инд}} = 0$, так как в противном случае в проводнике возникли бы бесконечно большие токи, что физически невозможно. Значит, должно быть $d\Phi/dt = 0$, а потому $\Phi = \text{const}$. Таким образом, *при движении идеально проводящего замкнутого провода в магнитном поле остается постоянным магнитный поток, пронизывающий контур провода.* Это положение называется *теоремой о сохранении магнитного потока.* Такое сохранение обусловлено индукционными токами, которые, согласно правилу Ленца, препятствуют всякому изменению магнитного потока через контур провода. Магнитный поток, обусловленный внешним магнитным полем, не остается постоянным. Магнитный поток, создаваемый индукционными токами, также меняется во времени. Однако сумма этих двух потоков остается постоянной.

Представим себе теперь идеально проводящую жидкость, движущуюся в магнитном поле. Выделим в ней произвольный жидкий замкнутый контур, т. е. контур, движущийся вместе с частицами самой жидкости. Такой контур может играть роль идеально проводящего провода, и к нему применима теорема о сохранении магнитного потока. Из нее следует, что *при любых движениях идеально проводящей жидкости магнитный поток, пронизывающий всякий замкнутый жидкий контур, не меняется во времени.* Идеально проводящая жидкость может свободно течь вдоль магнитных силовых трубок. Но всякое движение ее поперек магнитного поля увлекает и эти силовые трубки.

Явление происходит так, как если бы магнитные силовые линии были *вморожены в вещество* и двигались вместе с ним. Такое представление о вмороженности магнитных силовых линий широко применяется в магнитной гидродинамике при рассмотрении движений жидкостей, обладающих высокой электрической проводимостью. Оно применяется также в астрофизике и физике горячей плазмы, поскольку последняя также обладает высокой электрической проводимостью (см. § 121).

ЗАДАЧИ

1. Сверхсильные магнитные поля можно получать взрывным сжатием отрезка проводящей цилиндрической трубы, внутри которой создано начальное магнитное поле B_0. Определить магнитное поле B в трубе в момент максимального сжатия, если $B_0 = 5 \cdot 10^4$ Гс, начальный внутренний радиус трубы $R = 5$ см, радиус в момент максимального сжатия $r = 0{,}5$ см. Оболочку, окружающую магнитное поле, считать идеально проводящей. Определить также давление $\mathscr{P}$, необходимое для получения такого сжатия.

Ответ. $B = B_0(R/r)^2 = 5 \cdot 10^6$ Гс, $\mathscr{P} = B^2/(8\pi) \approx 10^{12}$ дин/см^2 $= 10^6$ атм.

2. По длинному идеально проводящему соленоиду длины l_0, отключенному от источника напряжения, течет постоянный ток I_0. Как будет меняться ток I в соленоиде при его растяжениях и сжатиях?

Ответ. $I = I_0 l/l_0$, где l — мгновенная длина соленоида.

§ 72. Энергия и силы

1. Наиболее общим методом расчета сил взаимодействия проводов с токами, а также натяжений и давлений, возникающих в среде при наличии магнитного поля, является *энергетический метод.* В этом методе используется выражение для свободной энергии магнитного поля. Как и сама свободная энергия, указанные силы зависят от *величины* и *конфигурации токов*, но не зависят при прочих равных условиях от удельного сопротивления проводов. Поэтому можно упростить вычисления, отвлекаясь от сопротивления проводов, и не принимать во внимание потери энергии на джоулево тепло. Под действием внутренних сил рассматриваемая система тел, вообще говоря, не будет находиться в равновесии и придет в движение. Для предотвращения этого приложим внешние силы, уравновешивающие внутренние силы. Если бесконечно мало нарушить равновесие, то начнется бесконечно медленный (квазистатический) процесс, сопровождающийся перемещениями и деформациями проводов и окружающей среды. Кинетическая энергия, как и во всяком квазистатическом процессе, при этом возникать не будет. Будем поддерживать во время процесса температуру постоянной. Тогда работа внешних сил $\delta A^{\text{внеш}}$ пойдет на приращение свободной энергии системы. Среду между проводами будем предполагать изотропной — жидкой или газообразной. В статических и медленно меняющихся магнитных полях, как это было выяснено в электростатике (см. § 33, п. 5), упругая часть свободной энергии компенсируется членами, содержащими производные магнитной проницаемости

по плотности среды. Поэтому при расчете сил можно отвлечься от наличия упругой части свободной энергии, если при этом одновременно не учитывать зависимость магнитной проницаемости μ от плотности среды. Так мы и поступим. Опуская упругую часть свободной энергии, пишем $\delta A^{\text{внеш}} = \delta W_m$. А так как для квазистатического процесса $\delta A^{\text{внеш}} = -\delta A$, где δA — элементарная работа внутренних сил, то

$$\delta A = -[\delta W_m]_{\Phi=\text{const}}. \tag{72.1}$$

При доказательстве предполагалось, что провода идеально проводящие, а потому магнитные потоки, пронизывающие их, *остаются постоянными.* Это явно отмечено в формуле (72.1). Однако сама формула (72.1) остается справедливой и для проводов с *конечным омическим сопротивлением.* Дело в том, что силы взаимодействия и магнитное поле в среде явно зависят только от сил токов и их распределения по проводам, но *не зависят от сопротивления проводов.* Поэтому если при проведении квазистатического процесса с реальными проводами каким-либо способом поддерживать магнитные потоки Φ неизменными, то при прочих равных условиях работа δA останется той же самой, что и в случае идеально проводящих проводов. Различие заключается только в том, что в случае идеально проводящих проводов магнитные потоки сохраняются автоматически, а в случае проводов с конечным омическим сопротивлением требуются специальные меры, чтобы обеспечить такое сохранение. Но для вычисления сил взаимодействия это обстоятельство не имеет никакого значения.

2. Формула (72.1) является *основной* при расчете сил в магнитном поле энергетическим методом. Однако в ряде случаев более удобна другая формула, в которой варьирование магнитной энергии W_m производится при сохранении постоянными *сил токов* в проводах. Выведем эту формулу.

Для поддержания постоянства токов во всех витках введем внешние электродвижущие силы $\mathscr{E}_i^{\text{внеш}}$, которые бы в каждый момент времени уравновешивали электродвижущие силы индукции, возникающие во время квазистатического процесса. Для этого должно быть $\mathscr{E}_i^{\text{внеш}} = -\mathscr{E}_i^{\text{инд}} = (1/c)\, d\Phi_i/dt$. Работа этих внешних электродвижущих сил

$$\delta A^{\text{внеш}} = \frac{1}{c}\sum \frac{d\Phi_i}{dt}\, I_i\, dt = \frac{1}{c}\sum I_i\, d\Phi_i$$

пойдет на работу системы δA и на приращение магнитной энергии:

$$\delta A + \delta W_m = \frac{1}{c}\sum I_i\, d\Phi_i.$$

(Мы по-прежнему проводим рассуждение в предположении идеальной проводимости проводов.) Но если токи поддерживаются постоянными, то для вариации магнитной энергии можно написать

$$\delta W_m = \delta\left(\frac{1}{2c}\sum I_i \Phi_i\right) = \frac{1}{2c}\sum I_i\, \delta\Phi_i.$$

Введя это выражение в предыдущее соотношение, получим

$$\delta A = [\,\delta W_m]_{I=\mathrm{const}}, \tag{72.2}$$

где вариация магнитной энергии производится уже при постоянных токах. Это и есть *другая основная формула*, на которой основан энергетический метод расчета сил.

Приведем примеры на применение формул (72.1) и (72.2).

3. Магнитное взаимодействие замкнутых постоянных токов в однородной среде. Магнитная энергия двух витков с токами определяется выражением

$$W_m = \frac{1}{2}\,L_{11}I_1^2 + L_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}\,L_{22}I_2^2.$$

Будем пользоваться формулой (72.2). Если произвольным образом, но без деформаций сместить витки *1* и *2*, то ввиду однородности среды коэффициенты самоиндукции L_{11} и L_{22} меняться не будут. Если при этом поддерживать токи в витках постоянными, то единственным переменным слагаемым в выражении для W_m будет $L_{12}I_1I_2$, так что

$$[\delta W_m]_{I=\mathrm{const}} = I_1I_2\,\delta L_{12}. \tag{72.3}$$

Оставляя виток *2* неподвижным, сместим виток *1* как целое на отрезок $\delta\mathbf{r}_1$. Элементарная работа, совершаемая системой, при этом будет $\delta A = \mathbf{F}_1\delta\mathbf{r}_1$, где $\mathbf{F}_1$ — результирующая амперовых сил, действующих на виток *1*. Согласно формуле (72.2) $\mathbf{F}_1\,\delta\mathbf{r}_1 = I_1I_2\,\delta L_{12}$. Сместим теперь виток *2* на отрезок $\delta\mathbf{r}_2 = -\delta\mathbf{r}_1$, сохраняя неподвижным виток *1*. Изменение коэффициента взаимной индукции будет тем же самым, так как этот коэффициент зависит только от взаимного расположения витков. Поэтому $\mathbf{F}_2\,\delta\mathbf{r}_2 = I_1I_2\,\delta L_{12}$. Таким образом, $\mathbf{F}_1\,\delta\mathbf{r}_1 = \mathbf{F}_2\,\delta\mathbf{r}_2$, или $\mathbf{F}_1\,\delta\mathbf{r}_1 = -\mathbf{F}_2\,\delta\mathbf{r}_1$. Отсюда, ввиду произвольности смещения $\delta\mathbf{r}_1$, следует, что $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$. Поворачивая один виток относительно другого, таким же путем докажем, что $\mathbf{M}_1 = -\mathbf{M}_2$, где $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ — моменты амперовых сил, действующих на витки. Таким образом, магнитное взаимодействие замкнутых постоянных токов удовлетворяет принципу равенства действия и противодействия.

4. Так как коэффициент взаимной индукции L_{12} пропорционален магнитной проницаемости μ промежуточной среды, то из приведенного рассуждения следует также, что и *силы взаимодействия между проводами в однородной среде пропорциональны ее магнитной проницаемости.* При одних и тех же токах сила взаимодействия между проводами в вакууме возрастает в μ раз, если все пространство заполнить однородной средой с магнитной проницаемостью μ.

5. Силы, действующие на границе раздела двух магнетиков. Допустим сначала, что магнитное поле перпендикулярно к границе раздела магнетиков. Это можно реализовать, взяв достаточно длинный соленоид, одна половина которого заполнена магнетиком

с магнитной проницаемостью μ_1, а другая — с магнитной проницаемостью μ_2. Магнетики граничат между собой вдоль плоскости, перпендикулярной к оси соленоида (рис. 167). Токи, циркулирующие по боковой поверхности соленоида, можно подобрать так, чтобы поле **B** внутри соленоида вдали от его концов было однородно. Пространство вне соленоида должно быть заполнено соответствующими магнетиками, чтобы последние могли свободно входить и выходить из соленоида. В выражении для магнитной энергии можно отвлечься от краевых эффектов, так как при расчете сил существенна не сама энергия, а ее вариации, возникающие при смещении границы раздела. Эти же вариации, если только соленоид достаточно длинный, не зависят от неоднородности поля вблизи его краев. Для вычисления силы **F**, действующей на границу раздела магнетиков, сместим эту границу вправо на величину δx. При этом система совершит работу $F\,\delta x$. Будем производить это смещение с сохранением магнитного потока, пронизывающего соленоид, или, что то же самое, с сохранением индукции **B**. Тогда согласно формуле (72.1) $F\,\delta x = -[dW_m]_{B=\text{const}}$. При смещении границы на δx вещество первого магнетика будет входить в соленоид, его объем внутри соленоида увеличится на $S\,\delta x$, где S — площадь поперечного сечения соленоида. Вследствие этого магнитная энергия системы увеличится на $Sw_1\,\delta x$. Такой же объем второго магнетика выйдет из соленоида и унесет с собой энергию $Sw_2\,\delta x$. Энергия магнитного поля вне соленоида и вблизи его концов не изменится. Таким образом, увеличение магнитной энергии системы будет $\delta W_m = S(w_1 - w_2)\,\delta x$, где w_1 и w_2 — плотности магнитной энергии по разные стороны границы раздела. Приравнивая эту величину выражению $-F\,\delta x$, получим

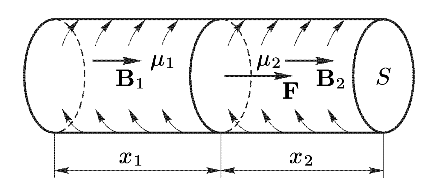


Рис. 167

$$F = S(w_2 - w_1). \qquad (72.4)$$

За положительное мы приняли направление вправо, т. е. от первого магнетика ко второму. Поэтому полученное выражение для F может быть истолковано как *разность натяжений*, действующих на границу раздела со стороны обоих магнетиков. Натяжение, приходящееся на единицу площади, равно плотности магнитной энергии. Так как $B = \text{const}$, то

$$F = S\frac{B^2}{8\pi}\left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right) = \frac{S}{8\pi}\,(\mu_2 H_2^2 - \mu_1 H_1^2). \qquad (72.5)$$

Сила F положительна при $\mu_1 > \mu_2$ и отрицательна при $\mu_1 < \mu_2$. В обоих случаях эта сила направлена от магнетика с большей к магнетику с меньшей магнитной проницаемостью.

Разберем теперь второй случай, когда магнитное поле параллельно границе раздела магнетиков. Здесь удобнее взять соленоид прямоугольной формы, по боковой поверхности которого циркулирует ток,

перпендикулярный к его оси (рис. 168). Пространство внутри соленоида заполнено двумя магнетиками, граничащими друг с другом вдоль плоскости, параллельной одной из боковых граней соленоида. Рассуждения будут такими же, как и в предыдущем случае. Однако теперь удобнее воспользоваться формулой (72.2), т. е. варьировать энергию W_m при постоянном значении поля $\mathbf{H}$. Так как формулы (72.1) и (72.2) отличаются знаками, то вместо выражения (72.4) мы придем к выражению

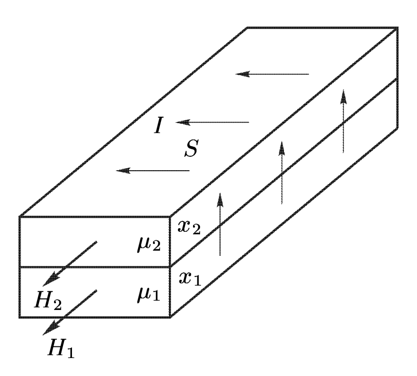


Рис. 168

$$F = S(w_1 - w_2), \tag{72.6}$$

отличающемуся от (72.4) знаком. Оно может быть истолковано как *разность давлений*, действующих на границу раздела со стороны обоих магнетиков. Величина давления равна плотности магнитной энергии в среде. Так как поле $\mathbf{H}$ тангенциально к границе раздела, то в обоих магнетиках его величина одинакова. Поэтому можно написать

$$F = S\frac{H^2}{8\pi}(\mu_1 - \mu_2) = \frac{S}{8\pi}\left(\frac{B_1^2}{\mu_1} - \frac{B_2^2}{\mu_2}\right).$$

Сила F положительна, когда $\mu_1 > \mu_2$, и отрицательна, когда $\mu_1 < \mu_2$. Как и в предыдущем случае, она всегда направлена от магнетика с большей к магнетику с меньшей магнитной проницаемостью.

6. Когда магнитное поле и плотность среды неоднородны и являются непрерывными функциями координат, расчет сил, действующих на среду в магнитном поле, производится аналогично тому, как это было сделано в электростатике (см. § 34). Мы не будем производить этот расчет, а ограничимся приведением окончательного результата. *Механические силы, действующие в магнитном поле, сводятся к натяжению T вдоль поля и к давлению $\mathcal{P}$ в перпендикулярном направлении. Натяжение и давление, отнесенные к единице площади, на которую они действуют, численно одинаковы и равны плотности магнитной энергии в среде*:

$$T = \mathcal{P} = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{HB}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi\mu}. \tag{72.7}$$

7. Поместим одно из колен U-образной трубки с раствором хлористого железа между полюсами электромагнита (рис. 169). При включении тока в обмотке электромагнита жидкость в этом колене поднимается: раствор хлористого железа, как парамагнетик, втягивается в область более сильного магнитного поля. Диамагнетик, наоборот, выталкивается из магнитного поля. Сильным диамагнетизмом обладает висмут. Кусочек висмута, внесенный в пространство между полюсами

электромагнита, выталкивается из него, если включить ток в обмотке электромагнита. Так же ведет себя пламя свечи (углекислый газ диамагнитен). Разумеется, все эти явления наблюдаются только в неоднородных полях. В однородном поле результирующая сила, действующая на внесенное в него тело, равна нулю.

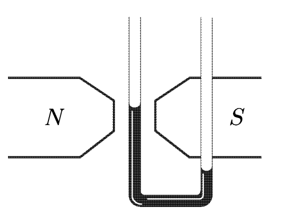


Рис. 169

Продолговатые тела, имеющие, например, форму палочек, подвешенные на нити, устанавливаются вдоль магнитного поля, если они парамагнитны, и поперек поля, если они диамагнитны. Например, палочка висмута устанавливается поперек магнитного поля. Явление наблюдается и в том случае, когда магнитное поле, в которое вносится магнетик, однородно. Это явление объясняется магнитными натяжениями и давлениями, действующими на концах магнетика. Характер явления зависит только от того, что больше — магнитная проницаемость магнетика или окружающей среды. Ампула с раствором хлористого железа в воздухе устанавливается вдоль магнитного поля. Но если ту же ампулу поместить в более сильный раствор хлористого железа, то она установится перпендикулярно к полю.

§ 73. Термодинамика магнетиков

1. Термодинамика магнетиков аналогична термодинамике диэлектриков, изложенной в § 31 нашего курса. Полученные там результаты могут быть перенесены и в термодинамику магнетиков. Надо только выражение для элементарной внешней работы $(1/4\pi)E\,dD$ заменить на $\delta A^{\text{внеш}} = (1/4\pi)H\,dB$. Таким путем в тех же предположениях, которые были введены в § 31, получаем основные уравнения термодинамики магнетиков:

$$\delta Q = dU - \frac{1}{4\pi}H\,dB, \tag{73.1}$$

$$dU = T\,dS + \frac{1}{4\pi}H\,dB, \tag{73.2}$$

$$d\Psi = -S\,dT + \frac{1}{4\pi}H\,dB, \tag{73.3}$$

$$d\Phi = -S\,dT - \frac{1}{4\pi}B\,dH, \tag{73.4}$$

$$dI = T\,dS - \frac{1}{4\pi}B\,dH. \tag{73.5}$$

Роль уравнения состояния играет соотношение $B = f(H, T, \tau)$. Используя его, получаем для свободной энергии магнетика

$$\Psi = \frac{1}{4\pi}\int H\,dB + \Psi_0(T, \tau), \tag{73.6}$$

где Ψ_0 — значение свободной энергии при отсутствии магнитного поля. (При интегрировании температура T и плотность магнетика τ должны оставаться постоянными.) В частности, при справедливости соотношения $B = \mu H$

$$\Psi = \frac{\mu H^2}{8\pi} + \Psi_0 = \frac{B^2}{8\pi\mu} + \Psi_0. \tag{73.7}$$

Внутренняя энергия магнетика определяется выражением

$$U = \left(\mu + T\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)\frac{H^2}{8\pi} + U_0(T,\tau), \tag{73.8}$$

или

$$U = \left(1 + \frac{T}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)\frac{B^2}{8\pi\mu} + U_0(T,\tau), \tag{73.9}$$

где производная $\partial\mu/\partial T$ берется при постоянной плотности τ.

2. Если квазистатически и адиабатически изменять намагниченность I, то температура магнетика, вообще говоря, будет меняться (*магнитокалорический эффект*). Изменение температуры можно рассчитать из условия постоянства энтропии S. Рассматривая последнюю как функцию T и B (τ поддерживается постоянной), имеем

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_B dT + \left(\frac{\partial S}{\partial B}\right)_T dB = 0.$$

Введем теплоемкость единицы объема магнетика при постоянной индукции: $c_B = T(\partial S/\partial T)_B$ и воспользуемся соотношением $(\partial S/\partial T)_T = (1/4\pi)(\partial H/\partial T)_B$, которое вытекает из (73.3). Тогда

$$dT = \frac{TB}{4\pi c_B}\frac{d}{dT}\left(\frac{1}{\mu}\right)dB = -\frac{TB}{4\pi\mu^2 c_B}\frac{d\mu}{dT}\,dB,$$

или

$$dT = -\frac{TB}{\mu^2 c_B}\frac{d\varkappa}{dT}\,dB. \tag{73.10}$$

Если рассматривать S как функцию T и H, то таким же путем можно получить формулу

$$dT = -\frac{TH}{c_H}\frac{d\varkappa}{dT}\,dH, \tag{73.11}$$

где c_H — теплоемкость единицы объема магнетика при постоянной напряженности магнитного поля H (см. § 31).

3. Применим формулу (73.11) к парамагнетикам и воспользуемся законом Кюри, согласно которому магнитная восприимчивость парамагнетика обратно пропорциональна абсолютной температуре (см. § 77): $\varkappa = \mathrm{const}/T$. Отсюда находим $d\varkappa/dT = -\varkappa/T$, и, следовательно,

$$dT = \frac{\varkappa}{c_H}H\,dH.$$

Из этой формулы видно, что при обратимом адиабатическом размагничивании парамагнетик охлаждается. Пренебрежем зависимостью теплоемкости c_H от магнитного поля. Тогда, если начальное магнитное поле равно H, а конечное — нулю, то для изменения температуры из последней формулы получаем

$$\Delta T = -\frac{\varkappa H^2}{2c_H}. \tag{73.12}$$

В качестве примера оценим эффект для парамагнитного газа, к которому применима классическая теория теплоемкостей. Так как мы пренебрегаем зависимостью c_H от H, то под c_H следует понимать теплоемкость при постоянном объеме. Пусть f — число степеней свободы молекулы идеального газа. Тогда по классической теории молярная теплоемкость газа при постоянном объеме будет $C_V = fR/2$, где R — газовая постоянная. Разделив на молярный объем $V = RT/\mathscr{P}$, получим $c_H = f\mathscr{P}/(2T)$, и, следовательно,

$$\Delta T = -\frac{\varkappa H^2}{f\mathscr{P}}\,T. \tag{73.13}$$

Для кислорода ($f = 5$) при нормальных условиях ($T = 293$ K, $\mathscr{P} = 10^6$ дин/см^2) $\varkappa = 0{,}16 \cdot 10^{-6}$. Полагая в формуле (73.13) $H = 3 \cdot 10^4$ Гс, получаем при этих условиях $\Delta T = -0{,}007$ K, т. е. понижение температуры — ничтожное.

Однако при приближении к абсолютному нулю температур теплоемкость очень резко стремится к нулю, и понижение температуры ΔT может стать значительным. (Вблизи самого абсолютного нуля закон Кюри неприменим.) Поэтому П. Дебай (1884–1966) и независимо от него Уильям Джиок (р. 1895) предложили применять обратимое адиабатическое размагничивание для приближения к абсолютному нулю. Этот метод стал основным методом получения сверхнизких температур. Обычно в качестве парамагнетика применяют парамагнитные соли типа квасцов, в которые входят ионы переходных элементов группы железа. Парамагнитная соль, помещенная в сильное магнитное поле, предварительно охлаждается до гелиевых температур, а затем магнитное поле снимается. Таким образом, де Гааз (1878–1960) и Вирсма достигли температуры $3 \cdot 10^{-3}$ K. Еще большее охлаждение можно получить, если вместо электронных брать «ядерные» парамагнетики, т. е. такие вещества, парамагнетизм которых обусловлен ориентацией магнитных моментов атомных ядер. Этим методом Симон с сотрудниками в 1956 г. достигли температуры 10^{-5} K.

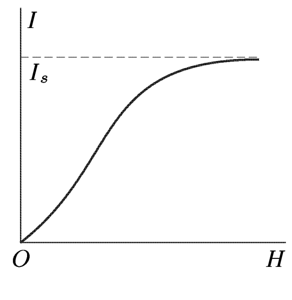
§ 74. Ферромагнетизм

1. По своим магнитным свойствам все вещества можно разделить на *слабомагнитные* и *сильно магнитные.* К слабомагнитным веществам относятся *парамагнетики* и *диамагнетики*, к сильномагнитным — *ферромагнетики*, *антиферромагнетики* и *ферримагнетики.* Пара- и диамагнетиками называются вещества, которые в отсутствие магнитного

поля всегда не намагничены и которые характеризуются однозначной зависимостью между вектором намагничивания **I** и напряженностью (статического) магнитного поля **H**. В частности, в слабых магнитных полях эта зависимость линейна: $\mathbf{I} = \varkappa\mathbf{H}$, причем для парамагнетиков $\varkappa > 0$, а для диамагнетиков $\varkappa < 0$. Магнитные свойства таких веществ с феноменологической точки зрения были рассмотрены в предшествующих параграфах. Сильный магнетизм наблюдается только у веществ в твердом состоянии, и притом далеко не у всех: необходимо (но недостаточно), чтобы в состав кристаллической решетки вещества входили атомы с недостроенными внутренними оболочками. Определение антиферромагнетизма и ферримагнетизма будет дано в § 79, а сейчас мы обратимся к феноменологической характеристике ферромагнетиков и ферромагнетизма.

2. Ферромагнетиками называются твердые тела, которые могут обладать *спонтанной намагниченностью*, т. е. намагничены уже в отсутствие магнитного поля. В этом отношении они аналогичны сегнетоэлектрикам. Типичными представителями ферромагнетиков являются переходные металлы: железо, кобальт, никель — и многие их сплавы. Ферромагнетизмом обладают некоторые элементы группы редких земель при низких температурах (гадолиний, тербий, диспрозий, гольмий, эрбий, тулий).

3. Характерной особенностью ферромагнетиков является сложная нелинейная зависимость между **I** и **H** или между **B** и **H**, впервые систематически исследованная для железа А.Г. Столетовым (1839–1896). Характер этой зависимости представлен на рисунках 170 и 171. Предполагается, что в исходном состоянии тело не намагничено. По



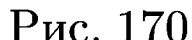


Рис. 170

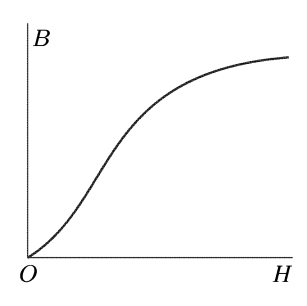


Рис. 171

мере возрастания **H** намагниченность **I** сначала быстро растет, а затем становится практически постоянной: $\mathbf{I} = \mathbf{I}_s$ (насыщение), т. е. кривая $I = I(H)$ переходит в горизонтальную прямую. Магнитная индукция $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{I}$ также растет с возрастанием поля **H**, а в состоянии насыщения $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{I}_s = \mathbf{H} + \text{const}$, т. е. кривая $B = B(H)$ переходит в прямую, наклоненную к **H** и **B** под углом 45° (если H и B откладывать на осях координат в одинаковых масштабах). Ввиду нелинейной связи между **I** и **H**, а также между **B** и **H** для ферромагнетиков нельзя ввести магнитную восприимчивость $\varkappa$ и магнитную проницаемость μ

как определенные постоянные величины. Правда, по-прежнему можно написать $\mathbf{I} = \varkappa \mathbf{H}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, но тогда $\varkappa$ и μ надо рассматривать не как постоянные, а как функции напряженности поля H. Эти функции сначала возрастают с H, затем проходят через максимум, и, наконец, в сильных полях, когда достигнуто состояние насыщения, μ стремится к единице (рис. 172), а $\varkappa$ — к нулю. Значения μ в максимуме у большинства ферромагнетиков при обычных температурах составляют многие сотни и тысячи единиц, а у некоторых специально приготовленных сплавов достигают миллиона. На больших значениях μ основаны технические применения ферромагнетиков, например, в электромагнитах. Следует, однако, заметить, что благодаря насыщению намагничивания использование ферромагнитных сердечников для получения сильных магнитных полей (превышающих 10^4 Гс) не имеет смысла. Здесь сердечники не только бесполезны, но и вредны, так как вносят дополнительные потери энергии. Сильные и сверхсильные магнитные поля получают только с помощью катушек с током без ферромагнитных сердечников.

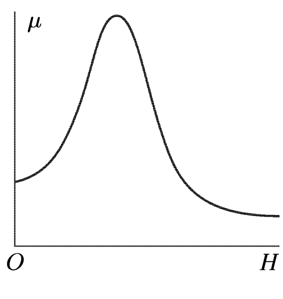


Рис. 172

Монокристаллические образцы в отношении магнитных свойств анизотропны. В каждом монокристалле существует одно или несколько направлений, вдоль которых магнитная восприимчивость особенно велика (направление легкого намагничивания). Существуют также направления трудного намагничивания, вдоль которых магнитная восприимчивость μ минимальна. Однако если тело состоит из мелких поликристалликов, беспорядочно ориентированных в пространстве, то оно в магнитном отношении макроскопически изотропно. К таким телам и относятся кривые на рис. 170 и 171.

4. Вторая характерная особенность ферромагнетиков состоит в том, что для них зависимость $\mathbf{B}$ от $\mathbf{H}$ или $\mathbf{I}$ от $\mathbf{H}$ не однозначна, а определяется предшествующей историей нагмагничивания ферромагнитного образца. Это явление называется *магнитным гистерезисом.* Возьмем ферромагнитный образец в ненамагниченном состоянии и будем намагничивать его, увеличивая магнитное поле от нуля до какого-то значения H_1. Зависимость $B = B(H)$ изобразится кривой OA_1 (рис. 173). Затем будем уменьшать H от $+H_1$ до $-H_1$. Кривая намагничивания, как показывает опыт, не пойдет по прежнему пути A_1O, а пройдет выше, по пути $A_1C_1D_1$. Если дальше изменять поле от $-H_1$ до $+H_1$, то кривая намагничивания пройдет ниже и вернется в прежнюю точку A_1. Получится замкнутая кривая $A_1C_1D_1F_1A_1$, называемая *петлей гистерезиса.* Если первоначальную кривую OA_1 довести до точки A, где намагничивание уже достигло насыщения, то описанным путем получится *наибольшая*, или *предельная*, *петля гистерезиса* $ACDFA$. Из нее видно, что при $H = 0$ индукция B не обращается в нуль, а изображается отрезком OC. Ему соответствует остаточное намагничивание

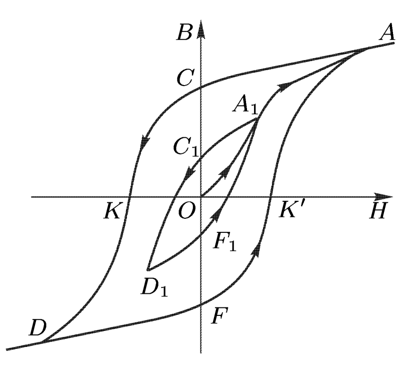


Рис. 173

$I = B/(4\pi) = OC/(4\pi)$. С наличием такого остаточного намагничивания связано существование *постоянных магнитов.* Для того чтобы размагнитить образец, надо довести кривую намагничивания до точки K или K'. Этим точкам соответствует магнитное поле $H_K = |OK|$. Оно называется *задерживающей* или *коэрцитивной силой* ферромагнетика. Значения остаточного намагничивания и коэрцитивной силы для разных ферромагнетиков меняются в широких пределах. Для мягкого железа петля гистерезиса узкая (коэрцитивная сила мала), для стали и всех материалов, идущих на изготовление постоянных магнитов, — широкая (коэрцитивная сила велика). Совершенно такой же характер имеет петля гистерезиса, когда по вертикальной оси откладывается не индукция B, а намагничивание I.

С описанными особенностями кривых намагничивания связан удобный практический прием размагничивания ферромагнетика (например, намагниченных часов). Намагниченный ферромагнетик помещают в катушку, по которой пропускают переменный ток. Плавно уменьшая амплитуду тока, подвергают ферромагнетик циклическим перемагничиваниям, в которых описываются все суживающиеся и суживающиеся петли гистерезиса, пока не будет достигнута точка O, где намагничивание равно нулю.

В демонстрационных опытах петлю гистерезиса легко получить на экране осциллографа. Для этого собирается схема, изображенная на рис. 174, питаемая переменным током. Катушка A, в которой находится исследуемый образец из длинной проволоки или пучок проволок, помещается в переменное магнитное поле, намагничивающее образец. Напряженность магнитного поля H пропорциональна току I в обмотке электромагнита. Поэтому напряжение, подаваемое с сопротивления R на горизонтально отклоняющие пластины осциллографа, пропорционально H. С другой стороны, напряжение, возникающее на концах катушки A, пропорционально производной dB/dt. Это напряжение подается на вход интегрирующей ячейки CR (действие такой ячейки разъяснено в § 122). На конденсаторе последней возникает напряжение, пропорциональное $\int \frac{dB}{dt}\,dt$, т. е. B. Оно подается на вертикально отклоняющие пластины осциллографа. При включении переменного тока на экране осциллографа наблюдается петля гистерезиса. Для исключения влияния краев образца лучше брать замкнутый образец в виде тора и помещать его в тороидальную катушку.

5. Благодаря гистерезису намагничивание и перемагничивание ферромагнетиков сопровождается выделением тепла, называемого *теплотой гистерезиса*. Для бесконечно малого квазистатического

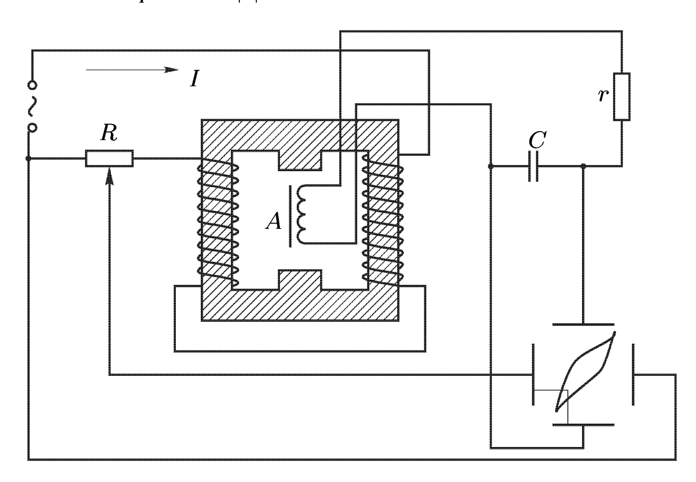


Рис. 174

процесса теплота гистерезиса δQ выражается формулой (73.1). Проинтегрируем ее по одному циклу намагничивания, т. е. вдоль замкнутой петли гистерезиса. Тогда интеграл от dU обратится в нуль, так как в круговом процессе ферромагнетик возвращается в исходное состояние, а потому внутренняя энергия U принимает первоначальное значение. В результате получится

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int H\,dB. \tag{74.1}$$

Отсюда видно, что теплота гистерезиса, выделяющаяся в одном цикле намагничивания, с точностью до множителя $1/(4\pi)$ численно равна площади петли гистерезиса.

Подвесим небольшой стальной цилиндр внутри проволочной катушки, питаемой городским переменным током. Цилиндр, испытывая 50 циклов перемагничивания в секунду, сильно нагреется уже через одну-две минуты. Чтобы доказать, что это нагревание обусловлено гистерезисом, а не токами Фуко, подвесим внутри той же катушки медный цилиндр тех же размеров, что и стальной. Электрическая проводимость меди больше, чем у железа, а потому токи Фуко в ней будут сильнее. Между тем при значительном нагревании стального цилиндра медный остается холодным.

6. Третья характерная особенность ферромагнетиков, которую мы здесь отметим, состоит в том, что для всякого ферромагнетика существует определенная температура $T = T_{\text{К}}$, называемая *температурой*

или *точкой Кюри*, при переходе через которую вещество ферромагнетика претерпевает фазовый переход (второго рода). Вещество является ферромагнетиком только ниже точки Кюри. Выше точки Кюри оно становится парамагнетиком, причем магнитная восприимчивость в окрестности точки Кюри подчиняется закону Кюри–Вейсса

$$\varkappa = \frac{C}{T - T_{\text{К}}}, \tag{74.2}$$

где C — постоянная, зависящая от рода вещества.

Для никеля температура Кюри равна 360 °C (633 K). Возьмем никелевую фольгу, свернутую в трубочку. Подвесим ее вблизи сильного постоянного магнита. Фольга притянется к магниту. Поднесем к фольге зажженную газовую горелку. Когда фольга нагреется выше точки Кюри, она перестанет притягиваться, отойдет от магнита и выйдет при этом из пламени горелки. Через короткое время фольга остынет и снова притянется к магниту, затем отойдет от него и т. д. Такие маятникообразные колебания никелевой фольги будут продолжаться все время, пока горит горелка.

Дальнейшие особенности ферромагнетизма будут рассмотрены в связи с его теорией (см. § 79).

§ 75. Магнитные свойства атомов

1. Переходя к объяснению магнитных свойств материальных сред с атомистической точки зрения, заметим прежде всего, что в последовательно классической теории магнетизм должен отсутствовать. Бор в 1911 г. и независимо от него Ван-Лёвен в 1920 г., пользуясь методами классической статистики, строго доказали следующую теорему. *В состоянии термодинамического равновесия система электрически заряженных частиц (электронов, атомных ядер и пр.), помещенная в постоянное магнитное поле, не могла бы обладать магнитным моментом, если бы она строго подчинялась законам классической физики.* Такая система может быть намагничена только в неравновесном состоянии. Если она перейдет в равновесное состояние, то намагничивание исчезнет. Причина этого, грубо говоря, заключается в том, что постоянное магнитное поле, действуя на заряженную частицу с силой, перпендикулярной к скорости, не может изменить кинетическую энергию частицы. Для объяснения магнетизма вещества требуется привлечение квантовых представлений.

Между тем парамагнетизм и диамагнетизм были объяснены, и притом довольно успешно, Ланжевеном (1872–1946) в 1905 г. без использования квантовых представлений. Причина этого заключается в том, что в классических теориях намагничивания молчаливо вводились представления сугубо квантового характера. Именно, предполагалось, что из электрически заряженных частиц можно построить устойчивые образования — атомы и молекулы. От последовательно классической теории надо требовать объяснения не только намагничивания, но и существования самих атомов, что удалось сделать только квантовой

механике. Поскольку последняя в нашем курсе еще не излагалась, при объяснении намагничивания мы будем пользоваться *полуклассическими представлениями.* Несмотря на свою непоследовательность и недостаточность, полуклассическая теория позволяет в основном уяснить природу намагничивания.

2. Начнем с краткого рассмотрения магнитных свойств атомов. Более подробно этот вопрос будет разобран в т. V нашего курса — в атомной физике. В простейшей боровской модели атома водорода электрон вращается вокруг ядра по окружности. Заряд электрона будем обозначать через $-e$. Вращающийся по окружности электрон в среднем возбуждает магнитное поле как ток $I = -e/T$, где $T = 2\pi r/v$ — период обращения электрона. Поэтому вращающемуся электрону присущ не только орбитальный момент импульса (или механический момент) $L = mrv$, но и магнитный момент $\mathfrak{M} = IS/c = -erv/(2c)$. Отношение этих величин называется *гиромагнитным отношением* и для нашей модели атома равно

$$\Gamma = \frac{\mathfrak{M}}{L} = -\frac{e}{2mc}. \tag{75.1}$$

Тот же результат справедлив для движений электрона по эллиптическим орбитам. Он верен и для многоэлектронных атомов, поскольку для всех электронов отношение e/m одно и то же.

Согласно теории Бора момент импульса атома *квантуется*, т. е. может принимать не непрерывный, а только *дискретный* ряд значений. Допустимыми являются значения $L = n\hbar$, где n — целое число, которое может принимать значения 1, 2, 3, ..., а $\hbar = h/(2\pi) = 1{,}05 \cdot 10^{-27}$ эрг · с — постоянная Планка (1858–1947), деленная на 2π. (Эта величина также называется постоянной Планка и более удобна в теоретических вопросах.) Вместе с механическим моментом магнитный момент также квантуется в соответствии с формулой

$$\mathfrak{M} = -\frac{e\hbar}{2mc}\, n. \tag{75.2}$$

Таким образом, наименьшее значение магнитного момента атома равно

$$\mathfrak{M}_{\text{В}} = \frac{e\hbar}{2mc} = 9{,}28 \cdot 10^{-21} \text{ эрг/Гс}.$$

Эта величина играет роль атома магнитного момента и называется *магнетоном Бора.*

3. Квантовая механика оставила представление о движении электронов по классическим орбитам и уточнила правила квантования теории Бора. Вместо движения самих электронов квантовая механика ввела представление о движении некоторой величины, имеющей смысл *плотности вероятности* нахождения электрона в пространстве. Классическим, однако отнюдь не адекватным аналогом такого представления, может служить облако, в котором масса и соответствующий ей электрический заряд распределены в пространстве непрерывно с определенной плотностью. Существует дискретный ряд так называемых *стационарных состояний*, в которых эти величины не меняются во

времени. К таким стационарным состояниям и относятся квантованные значения физических величин. Классическая формула (75.1) для гиромагнитного отношения справедлива и в квантовой механике, как это непосредственно очевидно, если воспользоваться классическим аналогом квантовомеханического представления, о котором только что говорилось.

В теории Бора электрон, обращающийся по орбите, становится эквивалентным току только после усреднения его положения вдоль орбиты. В квантовой механике, напротив, орбит нет и электрон в атоме, если его уподобить классической модели, вполне аналогичен току, непрерывно распределенному вокруг ядра атома.

В боровской модели невозможны состояния, в которых орбитальные механический и магнитный моменты атомов равны нулю, так как в этом случае электрон должен был бы совершать радиальное движение, в котором он непременно столкнулся бы с ядром. Напротив, в квантовой механике возможны состояния со *сферически симметричным* распределением вероятности нахождения электрона вокруг ядра. В таких состояниях орбитальные механический и магнитный моменты электрона в атоме строго равны нулю.

Наконец в квантовой механике формула $L = n\hbar$ определяет не полный момент количества движения электрона в атоме, а только *проекцию* этого вектора на избранное направление — направление магнитного поля, в которое помещен атом. Остальные две проекции не имеют определенных значений, что, конечно, невозможно представить в рамках классических моделей.

4. Помимо орбитального электрон обладает еще *собственным*, или *спиновым*, *моментом* количества движения (короче, *спином*). В стационарных состояниях проекция спина на избранное направление может принимать только два значения: $+\hbar/2$ и $-\hbar/2$. Спину соответствует магнитный момент, проекция которого на избранное направление равна магнетону Бора. Таким образом, со спином электрона связано гиромагнитное отношение $\Gamma = -e/(mc)$, которое вдвое больше орбитального. Механический и магнитный моменты всякого атома, в том числе и многоэлектронного, векторно складываются из орбитальных и спиновых моментов. Могут существовать состояния, в которых механические и магнитные моменты скомпенсированы, т. е. полный момент атома равен нулю.

§ 76. Объяснение диамагнетизма

1. Диамагнетизм наблюдается у таких веществ, атомы которых в отсутствие магнитного поля не обладают магнитными моментами. Если нет магнитного поля, то на электрон в атоме действуют силы только со стороны атомного ядра и прочих электронов. В постоянном магнитном поле $\mathbf{B}$ к этим силам добавится сила $-(e/c)[\mathbf{vB}]$, где $\mathbf{v}$ — скорость электрона. Определим, как изменится движение атома в стационарном состоянии при наличии этой силы. С этой целью рассмотрим движение относительно системы отсчета, равномерно вращающейся

вокруг направления магнитного поля с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$. Величину $\mathbf{\Omega}$ определим несколько ниже. Сейчас же будем предполагать, что она мала по сравнению с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ собственного вращения электрона вокруг атомного ядра. При этом условии можно пренебречь всеми членами порядка $(\Omega/\omega)^2$, т. е. членами, квадратичными по Ω. Во вращающейся системе отсчета к прежним силам добавятся две силы инерции: сила Кориолиса $2m[\mathbf{v}_{\text{отн}}\mathbf{\Omega}]$ и центробежная сила. Центробежной силой мы пренебрежем, как величиной, пропорциональной Ω^2, а в выражении кориолисовой силы относительную скорость электрона $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ заменим абсолютной скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{отн}} + [\mathbf{\Omega}\mathbf{r}]$. Такая замена также допустима, так как она меняет силу Кориолиса на величину, пропорциональную Ω^2. В этом приближении кориолисова сила представится в виде $2m[\mathbf{v}\mathbf{\Omega}]$. Подберем теперь величину $\mathbf{\Omega}$ так, чтобы выполнялось условие $2m[\mathbf{v}\mathbf{\Omega}] - (e/c)[\mathbf{v}\mathbf{B}] = 0$, т. е. положим

$$\mathbf{\Omega} = \frac{e}{2mc}\,\mathbf{B}. \tag{76.1}$$

Тогда во вращающейся системе отсчета к прежним силам, действующим на электрон, не добавится никаких новых сил. Поэтому во вращающейся системе отсчета атом придет в то же стационарное состояние, в котором он находился в неподвижной системе в отсутствие магнитного поля. Если движение по-прежнему отнести к неподвижной системе отсчета, то получается следующий результат. *При наличии внешнего постоянного магнитного поля внутреннее движение электронов атома не изменяется, но атом в целом получает дополнительное вращение с угловой скоростью* (76.1). Этот результат называется *теоремой Лармора* (1857–1942), а величина $\mathbf{\Omega}$ — *ларморовской частотой.*

Остается проверить, выполняется ли условие $|\Omega| \ll |\omega|$, использованное при доказательстве. Очевидно, это условие можно записать так:

$$B \ll \left|\frac{2mc\omega}{e}\right|. \tag{76.2}$$

Подставляя сюда численные значения $|e| = 4{,}8\cdot 10^{-10}$ СГСЭ-ед., $m = 9{,}11\cdot 10^{-28}$ г, $\omega \sim 10^{15}$ с$^{-1}$, получим $B \ll 10^8$ Гс. Рекордные магнитные поля, полученные до настоящего времени, не превосходят 10^7 Гс. Поэтому условие (76.2) хорошо выполняется.

2. Как видно из формулы (76.1), угловая скорость ларморовского вращения электронов совпадает по направлению с вектором $\mathbf{B}$. Так как заряд электрона отрицательный, то магнитный момент, связанный с этим вращением, направлен против поля $\mathbf{B}$. В результате создается намагничивание среды $\mathbf{I}$, направленное также против поля $\mathbf{B}$. Это и есть диамагнетизм.

Рассчитаем теперь магнитную восприимчивость вещества. Электрон, вращающийся по окружности радиуса r с ларморовской частотой $\mathbf{\Omega}$, обладает моментом импульса $mr^2\mathbf{\Omega}$ и, следовательно, магнитным моментом $-er^2\mathbf{\Omega}/2c = -e^2r^2\mathbf{H}/(4mc^2)$. В последнем выражении вектор $\mathbf{B}$ заменен на $\mathbf{H}$, так как в диамагнетиках различие между этими векторами пренебрежимо мало. Если ось Z перпендикулярна

к плоскости круговой орбиты электрона, то $r^2 = x^2 + y^2$. Чтобы найти магнитный момент атома, надо просуммировать магнитные моменты всех его электронов. Электроны в атомах диамагнетика распределены сферически симметрично. В этом случае $\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = (1/3)\overline{R^2}$, где R — расстояние электрона до ядра. Если атом содержит Z электронов, то его средний магнитный момент в магнитном поле будет

$$\mathfrak{M} = -\frac{Ze^2}{4mc^2}(\overline{x^2} + \overline{y^2})H = -\frac{Ze^2}{6mc^2}\overline{R^2}H,$$

а вектор намагничивания среды

$$\mathbf{I} = -\frac{NZe^2}{6mc^2}\overline{R^2}\,\mathbf{H}, \tag{76.3}$$

где N — число атомов в единице объема. Затем находим

$$\varkappa = -\frac{NZe^2}{6mc^2}\overline{R^2}, \tag{76.4}$$

$$\mu = 1 - \frac{4\pi NZe^2}{6mc^2}\overline{R^2}. \tag{76.5}$$

Энергия теплового движения слишком мала, чтобы изменить внутреннее (квантованное) состояние атома. Поэтому для диамагнетиков величины $\varkappa$ и μ не должны зависеть от температуры. Этот вывод теории находится в согласии с опытом.

Чтобы подтвердить, что теория находится на верном пути, оценим размеры атома, пользуясь значениями восприимчивости $\varkappa$. Величина $\overline{R^2}$ должна вычисляться с помощью квантовой механики.

Однако и без вычислений ясно, что квадратный корень из нее по порядку величины определяет размеры атома. Благородные газы, ввиду сферической симметрии электронных оболочек их атомов, диамагнитны. Диамагнитные свойства удобно характеризовать *магнитной восприимчивостью на моль вещества* $\varkappa_A$. Она связана с $\varkappa$ соотношением $\varkappa_A = V\varkappa$, где V — объем одного моля. Величину $\varkappa_A$ можно вычислять по формуле (76.4), если под N понимать число Авогадро (1776–1856). В случае гелия опыт дает $\varkappa_A = -2{,}2\cdot 10^{-6}$; в случае аргона $\varkappa_A = -2{,}5\cdot 10^{-4}$. Для гелия $Z = 2$, для аргона $Z = 18$. Подставляя эти данные в формулу (76.4), получим: He, $\sqrt{\overline{R^2}} = 0{,}63\cdot 10^{-8}$ см; Ar, $\sqrt{\overline{R^2}} = 0{,}67\cdot 10^{-8}$ см. Эти результаты удовлетворительно согласуются с размерами атомов, найденными другими способами.

3. Необходимо еще выяснить, какие силы сообщают атому ларморовское вращение. Этого не могут сделать магнитные силы, так как они перпендикулярны к скорости электрона и работы не производят. А с ларморовским вращением связана дополнительная кинетическая энергия атома. *Магнитные силы могут только поддерживать, но не создавать ларморовское вращение. Последнее возникает во время включения магнитного поля.* Переменное магнитное поле возбуждает вихревое электрическое поле. Оно-то и сообщает атому ларморовское

вращение. Для пояснения допустим, что электрон вращается по окружности радиуса r, плоскость которой перпендикулярна к (однородному) магнитному полю $\mathbf{B}$. Пусть магнитное поле включается *адиабатически*, т. е. настолько медленно, что за время одного оборота электрона по окружности поле почти остается постоянным. Ввиду симметрии вихревое электрическое поле $\mathbf{E}$ будет направлено по касательной к окружности. На основании закона электромагнитной индукции $2\pi r E = -(1/c)\, d\varPhi/dt$, где $\varPhi$ — магнитный поток, пронизывающий площадь, ограниченную той же окружностью. Отсюда и найдется поле $\mathbf{E}$. Момент сил, действующих на электрон, $M = -reE = (e/2\pi c)\, d\varPhi/dt$. На основании уравнения моментов

$$mr^2 \frac{d\varOmega}{dt} = M = \frac{e}{2\pi c}\, \frac{d\varPhi}{dt}.$$

В начальный момент $B = \varOmega = 0$. Поэтому, интегрируя предыдущее уравнение, получим

$$mr^2 \varOmega = \frac{e}{2\pi c}\, \varPhi,$$

откуда $\varOmega = eB/(2mc)$. Если изменение магнитного поля прекратится, то прекратится и дальнейшее изменение угловой скорости вращения атома. Последний будет продолжать вращаться с постоянной угловой скоростью, определяемой формулой Лармора (76.1).

Из изложенного видно, что *ларморовское вращение есть одно из проявлений электромагнитной индукции.* То обстоятельство, что электромагнитная индукция должна приводить именно к диамагнетизму, а не к парамагнетизму, проще всего понять, руководствуясь *принципом Ленца.* Действительно, в соответствии с этим принципом магнитное поле $\mathbf{B}_{\text{инд}}$, возбуждаемое ларморовским вращением электронов, должно иметь такое направление, чтобы препятствовать всяким изменениям внешнего приложенного поля $\mathbf{B}$. Поэтому поле $\mathbf{B}_{\text{инд}}$, а с ним и вектор намагничивания среды $\mathbf{I}$ должны иметь направление, противоположное направлению внешнего поля $\mathbf{B}$. Явление электромагнитной индукции имеет место во всех средах. Поэтому и обусловленный им диамагнетизм есть *универсальное явление*, которое должно проявляться во всех средах. Однако в тех случаях, когда атомы обладают собственными магнитными моментами, диамагнитный эффект перекрывается значительно более сильным парамагнитным эффектом.

§ 77. Объяснение парамагнетизма

1. Парамагнетизм наблюдается у тех веществ, атомы которых обладают магнитными моментами уже в отсутствие внешнего магнитного поля. Пока нет магнитного поля, атомы совершают беспорядочное тепловое движение, а их магнитные моменты ориентированы в пространстве также беспорядочно. В этом случае тело не намагничено. В магнитном поле магнитные моменты атомов ориентируются преимущественно в направлении поля. Появляется намагничивание и обусловленный им парамагнетизм.

Излагаемая ниже теория парамагнетизма относится к парамагнитным газам, взаимодействие между атомами которых слабое. Качественно результаты этой теории применимы также к твердым и жидким парамагнетикам, электронные оболочки атомов или ионов которых могут более или менее свободно вращаться вокруг атомных ядер. Это имеет место, например, тогда, когда электронные оболочки обладают сферической симметрией. Таковы электронные оболочки атомов благородных газов или ионов с таким же числом электронов, как у благородных газов.

2. Поместим изолированный атом в постоянное магнитное поле $\mathbf{B}$. Отвлечемся от наличия спинов, предполагая, что все спины электронной оболочки скомпенсированы. Пусть $\mathbf{v}$ — скорость какого-либо электрона атома до внесения в магнитное поле. Тогда, согласно теореме Лармора, в магнитном поле скорость того же электрона будет $\mathbf{v}+[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]$, а его кинетическая энергия $(1/2)m(\mathbf{v}+[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}])^2$, где $\boldsymbol{\Omega}$ — ларморовская частота. Если пренебречь квадратами величины $\boldsymbol{\Omega}$, то для приращения кинетической энергии электрона можно написать $m(\mathbf{v}[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}])$ или $m([\mathbf{r}\mathbf{v}]\boldsymbol{\Omega})$. Просуммировав по всем электронам оболочки, находим приращение $\mathscr{E}$ кинетической энергии атома в магнитном поле: $\mathscr{E}=(\mathbf{L}\,\boldsymbol{\Omega})$, где $\mathbf{L}$ — момент импульса электронной оболочки. С помощью формул (75.1) и (76.1) это выражение приводится к виду

$$\mathscr{E}=-(\boldsymbol{\mathfrak{M}}\mathbf{B}). \tag{77.1}$$

Такое же изменение энергии (но уже потенциальной) мы получили бы для магнитного диполя с магнитным моментом $\boldsymbol{\mathfrak{M}}$ при внесении его в магнитное поле. Этого и следовало ожидать, так как, согласно теореме Ампера, во внешнем магнитном поле элементарный виток с током (например, вращающийся по орбите электрон) испытывает те же силы, что и магнитный диполь. Поэтому формула (77.1) для приращения энергии справедлива и в том случае, когда магнитный момент $\boldsymbol{\mathfrak{M}}$ обусловлен спинами, а не орбитальным движением электронов. Вообще, формула (77.1) верна независимо от происхождения магнитного момента атома $\boldsymbol{\mathfrak{M}}$, как это можно подтвердить независимым расчетом (см. п. 8).

3. На основании изложенного ясно, что классическая теория парамагнетизма газов по существу не должна отличаться от соответствующей теории Дебая поляризации газообразных диэлектриков с полярными молекулами, которая была изложена в § 36. Теория парамагнетизма была создана Ланжевеном раньше теории диэлектриков Дебая. Последняя просто копирует теорию Ланжевена. Как видно из формулы (77.1), энергия атома больше, если его магнитный момент ориентирован против магнитного поля, и меньше, если он ориентирован по полю. Поэтому в состоянии статистического равновесия больше магнитных моментов будет ориентировано по полю, чем в противоположном направлении, т. е. будет наблюдаться парамагнетизм. Если выполнено условие

$$\frac{\mathfrak{M}B}{kT}\ll 1, \tag{77.2}$$

то, по аналогии с формулой (36.5), в классической теории можно написать

$$\mathbf{I} = \frac{n\mathfrak{M}^2}{3kT}\mathbf{B}. \tag{77.3}$$

Отсюда, используя соотношения $\mathbf{I} = \varkappa\mathbf{H}$, $\mathbf{B} = (1 + 4\pi\varkappa)\mathbf{H}$, получим

$$\frac{\varkappa}{1 + 4\pi\varkappa} = \frac{n\mathfrak{M}^2}{3kT}. \tag{77.4}$$

Этой формулой и определяется магнитная восприимчивость парамагнетика. Впрочем, магнитная восприимчивость неферромагнитных тел настолько мала, что в предыдущей формуле, как это обычно делается, величиной $4\pi\varkappa$ можно пренебречь по сравнению с единицей [1]. Тогда

$$\varkappa = \frac{n\mathfrak{M}^2}{3kT}. \tag{77.5}$$

4. Обобщим теперь формулы (77.3) и (77.5) на случай сильных магнитных полей или низких температур, когда условие (77.2) не соблюдается. Это было сделано также Ланжевеном. Однако в классической теории Ланжевена не учитывается квантование магнитных моментов атомов, что существенно в области низких температур. Для учета квантования надо считать магнитный момент атома $\boldsymbol{\mathfrak{M}}$ кратным магнетону Бора $\boldsymbol{\mathfrak{M}}_{\text{B}}$ и принять во внимание все ориентации его, допускаемые правилами квантования. Примем, что магнитный момент атома $\boldsymbol{\mathfrak{M}}$ спиновый и равен одному магнетону Бора. Такое предположение не затрагивает ничего существенного, обусловленного квантованием, но сильно упрощает расчет, так как в этом случае в магнитном поле возможны только две ориентации атома: параллельная и антипараллельная. В параллельной ориентации проекция магнитного момента на направление магнитного поля равна $+\mathfrak{M}_{\text{B}}$, а антипараллельной $-\boldsymbol{\mathfrak{M}}_{\text{B}}$. (В дальнейшем значок B будем опускать.) Этим ориентациям соответствуют энергии $-\mathfrak{M}B$ и $+\mathfrak{M}B$. Согласно распределению Больцмана числа атомов (в единице объема) с параллельной и антипараллельной ориентациями будут равны соответственно

$$n_1 = Ce^x, \quad n_2 = Ce^{-x},$$

где введено обозначение

$$x = \frac{\mathfrak{M}B}{kT}. \tag{77.6}$$

Нормировочная постоянная C определится из условия $n_1 + n_2 = n$, где n — полное число атомов в единице объема. Это дает $C(e^x + e^{-x}) = n$.

---

[1] Было бы непоследовательно учитывать различие между **B** и **H** и пренебрегать, как мы всюду делали в этом параграфе, различием между средним макроскопическим полем **B** и полем **B**′, действующим на атом парамагнетика, между квадратом среднего поля **B** и средним квадратом микроскопического поля и т. п. Все эти различия одного и того же порядка.

Для намагничивания получаем $I = (n_1 - n_2)\mathfrak{M}$, откуда

$$I = n\mathfrak{M}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = n\mathfrak{M}\,\mathrm{th}\,x. \tag{77.7}$$

5. Прежде чем исследовать полученную формулу, заметим, что в случае, когда магнитный момент атома больше одного магнетона Бора, расчет проводится по той же схеме. Увеличивается только число возможных ориентаций и значения проекций магнитных моментов атомов на направление магнитного поля. Во всех случаях результат записывается в виде

$$I = n\mathfrak{M}L(x), \tag{77.8}$$

где $L(x)$ называется *функцией Ланжевена.* В разобранном нами случае функция Ланжевена равна $\mathrm{th}\,x$ и обозначается через $L_{1/2}(x)$, поскольку механический момент атома (в единицах $\hbar$) равен $1/2$. В других случаях вид функции $L(x)$ изменяется, но ее общий характер сохраняется. В классическом пределе, когда квантования нет, т. е. допустимы все ориентации магнитных моментов, функцию Ланжевена обозначают через $L_\infty(x)$. Она равна

$$L_\infty(x) = \mathrm{cth}\,x - \frac{1}{x} \tag{77.9}$$

(см. задачу к этому параграфу). Этот результат был получен самим Ланжевеном.

6. Графики функций Ланжевена $L_{1/2}(x)$ и $L_\infty(x)$ приведены на рис. 175. При малых x

$$L_{1/2}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \ldots, \quad L_\infty(x) = \frac{1}{3}\,x + \ldots$$

В соответствии с этим в слабых полях $(x \ll 1)$ **I** зависит от **B** линейно. По формуле (77.7) получается

$$\mathbf{I} = \frac{n\mathfrak{M}^2}{kT}\,\mathbf{B}, \tag{77.10}$$

а по формуле (77.9) — классический результат (77.3), т. е. величина втрое меньшая. Магнитные моменты $\mathfrak{M}$ определяются *внутренним строением атома.* Тепловое движение недостаточно интенсивно, чтобы изменить их. Поэтому, как видно из формулы (77.10) или (77.3), *магнитная восприимчивость парамагнитных газов должна меняться обратно пропорционально абсолютной температуре T.* Такая закономерность была обнаружена экспериментально П. Кюри еще до разработки соответствующей теории и носит название *закона Кюри.* Закон Кюри хорошо согласуется с опытом для газообразных парамагнетиков, а также для ряда твердых парамагнетиков (например, солей редких земель). С другой стороны, для многих жидких и твердых парамагнетиков изложенная элементарная теория недостаточна, поскольку она допускает свободное вращение электронных оболочек атомов вокруг направления магнитного поля. Впрочем, и в тех случаях, когда это

допущение справедливо, в сильных полях ($x \gg 1$) и при очень низких температурах (порядка нескольких Кельвинов) должны наблюдаться отклонения не только от закона Кюри, но и от самой пропорциональности между величинами I и B.

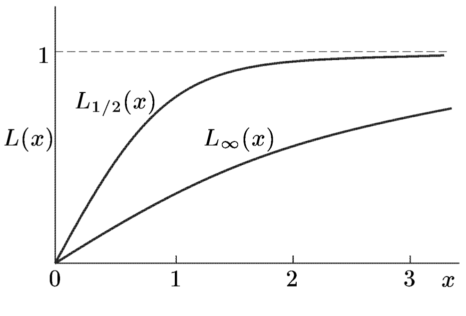


Рис. 175

7. В сильных полях ($x \gg 1$) обе функции $L_{1/2}(x)$ и $L_\infty(x)$ асимптотически стремятся к единице. Этому соответствует *насыщение намагничивания* $I = n\mathfrak{M}$, когда все магнитные моменты устанавливаются параллельно магнитному полю. Однако классическая функция $L_\infty(x)$, как и следовало ожидать, не удовлетворяет тепловой теореме Нернста (1864–1941) (см. т. II, § 84), тогда как функция $L_{1/2}(x)$ согласуется с ней. В самом деле, в отсутствие квантования справедлива классическая теорема о равномерном распределении кинетической энергии по степеням свободы. Согласно этой теореме вращательные степени свободы атома должны быть возбуждены — на каждую из них придется кинетическая энергия $(1/2)kT$ и теплоемкость $(1/2)k$, не зависящая от температуры. При абсолютном нуле получилось бы конечное значение теплоемкости, что противоречит теореме Нернста. Другое противоречие с теоремой Нернста заключается в следующем. Из формул (73.3) и (73.4) следует

$$\left(\frac{\partial S}{\partial B}\right)_T = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_B, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial B}{\partial T}\right)_H.$$

Согласно теореме Нернста все процессы при абсолютном нуле температур не сопровождаются изменениями энтропии. Поэтому левые, а с ними и правые части полученных соотношений при $T = 0$ должны обращаться в нуль:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_B = \left(\frac{\partial B}{\partial T}\right)_H = 0.$$

Если воспользоваться формулой $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{I}$, то полученные результаты можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_B = \left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_H = 0. \tag{77.11}$$

Но классическая формула (77.9) не согласуется с этими соотношениями. Действительно, при $x \gg 1$ справедлива асимптотика $L_\infty(x) = 1 - 1/x$ и, следовательно,

$$I = n\mathfrak{M}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = n\mathfrak{M} - \frac{nkT}{B}.$$

Из нее следует $(\partial I/\partial T)_B = nk/B$, т. е. при абсолютном нуле производная $(\partial I/\partial T)_B$ не обращается в нуль. Но если взять формулу (77.7), то можно воспользоваться асимптотикой $L_{1/2}(x) = 1 - 2e^{-2x}$, и, следовательно, $I = n\mathfrak{M}(1 - 2e^{-2x})$. Отсюда видно, что при $x \to \infty$ I стремится к постоянному значению $n\mathfrak{M}$ (насыщение), а производная $\partial I/\partial x$ — к нулю. Значит, квантовая формула (77.7) согласуется с теоремой Нернста.

8. Чтобы завершить излагаемую теорию, необходимо еще объяснить, *как возникает намагничивание парамагнетика.* Как показано в предыдущем параграфе, в магнитном поле атом в целом вращается с ларморовской частотой, т. е. совершает регулярную прецессию с той же частотой вокруг направления магнитного поля. При такой прецессии угол между магнитным моментом $\mathfrak{M}$ и полем $\mathbf{B}$ остается неизменным. Остается неизменной и проекция вектора $\mathfrak{M}$ на направление магнитного поля. Ясно, что прецессия сама по себе не может привести к намагничиванию парамагнетика. *Намагничивание возникает в результате взаимодействий атомов между собой.* Схематизируя, будем рассматривать эти взаимодействия как столкновения, а атом — как волчок с механическим моментом $\mathbf{L}$ и магнитным моментом $\mathfrak{M} = \Gamma\mathbf{L}$, где Γ — гиромагнитное отношение. Ради конкретности на рис. 176 векторы $\mathbf{L}$ и $\mathfrak{M}$ будем считать направленными в одну сторону, хотя все наши результаты останутся справедливыми и в том случае, когда эти направления противоположны. В магнитном поле на атом действует момент сил $\mathbf{M} = [\mathfrak{M}\mathbf{B}]$, под действием которого и происходит прецессия. Угловая скорость прецессии $\mathbf{\Omega}$ найдется из уравнения моментов $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}$. Подставив в него $\dot{\mathbf{L}} = [\mathbf{\Omega}\mathbf{L}]$, получим $[\mathbf{\Omega}\mathbf{L}] = \Gamma[\mathbf{L}\mathbf{B}]$, откуда

$$\mathbf{\Omega} = -\Gamma\mathbf{B}. \qquad (77.12)$$

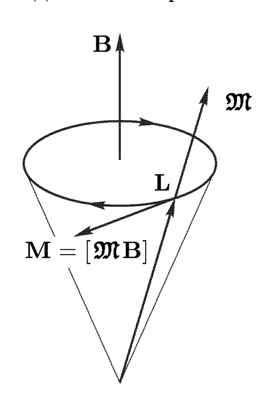


Рис. 176

Если момент $\mathbf{L}$ создается орбитальным движением электронов, то $\Gamma = -e/(2mc)$ и, следовательно, $\mathbf{\Omega} = e\mathbf{B}/(2mc)$, т. е. прецессия происходит с ларморовской частотой. Это показывает, что наша классическая модель приводит к правильному результату. Если же момент $\mathbf{L}$ спиновый, то $\Gamma = -e/(mc)$ и угловая скорость прецессии будет вдвое больше. В остальных случаях явление становится более сложным, но его разбор будет приведен в т. V, ч. 1 нашего курса — в атомной физике.

Учтем теперь столкновения. Если атом получает толчок в направлении прецессионного вращения, то соответствующий ему момент сил вызовет прецессию вокруг оси, перпендикулярной к магнитному полю. С помощью уравнения моментов нетрудно убедиться, что в результате такого толчка угол между векторами $\mathfrak{M}$ и **B** увеличится. Если же толчок произведен в направлении, противоположном прецессионному вращению, то этот угол уменьшится. Толчки первого типа размагничивают, а второго — намагничивают парамагнетик. Однако эффект намагничивания будет преобладать над эффектом размагничивания, так как толчки против прецессионного вращения в среднем сильнее толчков противоположного направления, подобно тому как сила сопротивления, испытываемая человеком, будет больше, когда он бежит против ветра, а не по ветру. Мы видим, что *магнитное поле только поддерживает, а не создает намагничивание парамагнетика. Намагничивание создается и устанавливается в результате столкновений атомов между собой.*

9. Некоторые металлы, например щелочные, обладают парамагнетизмом, но не подчиняются закону Кюри. Магнитная восприимчивость таких металлов в широких пределах не зависит от температуры. Объяснение этого факта было дано Паули (1900–1958) в 1927 г. Он предположил, что парамагнетизм в этих случаях обусловлен не магнитными моментами ионов кристаллической решетки, а *спиновыми магнитными моментами электронов проводимости.* Рассматривая эти электроны как газ, подчиняющийся статистике Ферми–Дирака (см. т. II, § 82), Паули рассчитал его магнитную восприимчивость. Этот расчет будет приведен в § 99. Здесь же заметим, что независимость магнитной восприимчивости электронного газа в металлах от температуры является *следствием теоремы Нернста.* Действительно, при обычных температурах электронный газ в металлах находится в состоянии *вырождения.* Это означает, что для него такие температуры следует считать *близкими к абсолютному нулю* и можно воспользоваться теоремой Нернста. Из формулы (73.4) следует

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial B}{\partial T}\right)_H = \left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T .$$

Правая часть этого соотношения обращается в нуль в силу теоремы Нернста, а левая равна $(H/4\pi)\, d\mu/dT$. Здесь символ H в производной $\partial\mu/\partial T$ опущен, а сама производная написана в виде $d\mu/dT$, так как μ от H не зависит. Таким образом, $d\mu/dt = 4\pi\, d\varkappa/dT = 0$.

ЗАДАЧА

Получить выражение (77.9) для классической функции Ланжевена.

Решение. Число атомов в единице объема, магнитные моменты которых направлены в пределах телесного угла $d\Omega = 2\pi \sin\vartheta\, d\vartheta$, определяется формулой Больцмана

$$dn = C \exp\left(\frac{\mathfrak{M} B}{kT}\cos\vartheta\right)\sin\vartheta\, d\vartheta = Ce^{x\cos\vartheta}\sin\vartheta\, d\vartheta,$$

где ϑ — угол между направлениями магнитного момента $\mathfrak{M}$ и магнитного поля $\mathbf{B}$, а постоянная нормировки C определяется условием $\int dn = n$. В намагничивание среды эти атомы вносят величину $dI = \mathfrak{M}\, dn \cos\vartheta$. Подставив сюда выражение для dn и интегрируя, получим

$$I = n\mathfrak{M} \frac{\int\limits_0^\pi e^{x\cos\vartheta} \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta}{\int\limits_0^\pi e^{x\cos\vartheta} \sin\vartheta\, d\vartheta} = n\mathfrak{M}\left(\operatorname{cth} x - \frac{1}{x}\right),$$

откуда и следует формула (77.9).

§ 78. Гиромагнитные явления

1. Подвесим парамагнитное или ферромагнитное тело на нити, вокруг которой оно может вращаться. При намагничивании в магнитном поле атомы тела и их магнитные моменты поворачиваются, ориентируясь преимущественно в направлении поля. С магнитным моментом атома $\mathfrak{M}$ связан момент импульса электронной оболочки $\mathfrak{M}/\Gamma$, где Γ — гиромагнитное отношение. Магнитный момент тела равен $V\mathbf{I}$, где V — объем тела, а $\mathbf{I}$ — вектор намагничивания. Поэтому в результате намагничивания момент импульса электронных оболочек тела увеличивается на $\mathbf{L}_{эл} = V\mathbf{I}/\Gamma$. Но повороты атомов и магнитных моментов осуществляются под действием столкновений, т. е. *внутренних сил*, которые не могут изменить общий момент импульса тела. Отсюда следует, что кристаллическая решетка тела должна получить такой же момент импульса, но противоположного знака, т. е. $\mathbf{L}_{реш} = -V\mathbf{I}/\Gamma$. Если до намагничивания тело находилось в состоянии покоя, то в результате намагничивания оно должно прийти во вращение. Если Θ — момент инерции тела, то угловая скорость вращения $\boldsymbol{\omega}$ определяется уравнением

$$\Theta\boldsymbol{\omega} = -\frac{V}{\Gamma}\mathbf{I}, \tag{78.1}$$

а само вращение называется *магнитомеханическим явлением.* Оно вполне аналогично вращению скамьи Жуковского, когда сидящий на ней человек поворачивает ось раскрученного велосипедного колеса, которое он держит в руках (см. т. I, § 34, п. 7). Роль велосипедного колеса играют электронные оболочки атомов, роль скамьи Жуковского и сидящего на ней человека — кристаллическая решетка тела.

2. Для оценки эффекта предположим, что тело массы M имеет форму цилиндрика радиуса r и намагничивается до насыщения. Если магнитный момент атома равен одному магнетону Бора $\mathfrak{M}_{\text{B}} = e\hbar/(2mc)$, то магнитный момент тела будет $VI = MN\mathfrak{M}_{\text{B}}/A$, где N — постоянная Авогадро, а A — атомная масса. Допустим, что магнитный момент атома обусловлен орбитальным движением электрона и, следовательно, $\Gamma = -e/(2mc)$. Подставляя эти данные в формулу (78.1) и принимая

во внимание, что $\Theta = (1/2)Mr^2$, получим

$$\omega = \frac{2N\hbar}{Ar^2}.$$

Для железного цилиндрика радиуса $r = 1$ мм ($A = 56$) эта формула дает $\omega = 2{,}25 \cdot 10^{-3}$ рад/с.

Эффект очень мал. Для его усиления Эйнштейн и де Гааз, впервые наблюдавшие этот эффект в 1915 г., воспользовались явлением резонанса. В их опытах небольшой железный цилиндрик подвешивался на тончайшей кварцевой нити и помещался внутри соленоида, по обмотке которого пропускался переменный ток, периодически намагничивавший и размагничивавший цилиндрик (рис. 177).

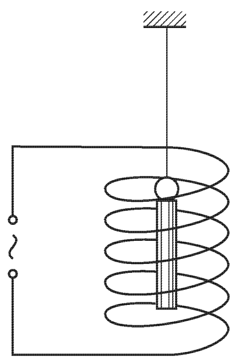


Рис. 177

Повороты цилиндрика отмечались с помощью маленького зеркальца, скрепленного с ним. Уравнение крутильных колебаний цилиндрика записывается в виде

$$\frac{d}{dt}\left(L_{\text{реш}} + L_{\text{эл}}\right) = -f\varphi - \alpha\dot{\varphi},$$

или

$$\Theta\ddot{\varphi} + \alpha\dot{\varphi} + f\varphi = -\frac{dL_{\text{эл}}}{dt} = -\frac{V}{\Gamma}\dot{I},$$

где φ — угол отклонения цилиндрика из положения равновесия, f — модуль кручения нити, α — постоянная, учитывающая сопротивление воздуха и прочие тормозящие силы, которые предполагаются пропорциональными скорости. Если ввести собственную частоту колебаний цилиндрика ω_0 и коэффициент затухания γ по формулам $\omega_0^2 = f/\Theta$, $\gamma = \alpha/(2\Theta)$, то получится

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = -\frac{V}{\Theta\Gamma}\dot{I}. \qquad (78.2)$$

Это уравнение вынужденных крутильных колебаний (см. § 122). Величина, стоящая в правой части уравнения (78.2), играет роль внешней силы. Она возникает в результате намагничивания и перемагничивания цилиндрика и предполагается известной. Эта величина, как и намагничивание I, периодически меняется во времени с периодом, равным периоду переменного тока T. На опыте менялась частота переменного тока $\omega = 2\pi/T$, пока колебания цилиндрика не становились наиболее интенсивными. Это происходило при резонансе, т. е. тогда, когда $\omega = \omega_0$. Зависимость между I и H (или, что то же, между B и H) нелинейна. В этом случае правую часть уравнения (78.2) можно разложить в ряд Фурье. Для нахождения решения вблизи резонанса достаточно сохранить в этом разложении только член с основной частотой ω (см. § 128). Исследуя вынужденные крутильные колебания цилиндрика, можно было найти гиромагнитное отношение Γ.

3. Существует явление, обратное магнитомеханическому. Оно называется *гиромагнитным* и заключается в том, что при вращении парамагнитных и ферромагнитных тел они намагничиваются. Объяснение этого явления, в сущности, уже было дано в конце предыдущего параграфа. В магнитном поле электронная оболочка атома приходит во вращение относительно кристаллической решетки с угловой скоростью $\mathbf{\Omega} = -\Gamma\mathbf{B}$. При наличии такого относительного вращения столкновения между атомами приводят к намагничиванию среды. Получилась бы та же намагниченность, если бы относительное вращение было создано не магнитным полем, а любым другим способом. Отсюда следует, что если решетку привести во вращение с частотой $\boldsymbol{\omega}$, равной, но противоположно направленной $\mathbf{\Omega}$, то намагниченность будет такой же. Иными словами, вращение тела с частотой $\boldsymbol{\omega}$ вызывает то же намагничивание, как и магнитное поле с напряженностью

$$\mathbf{B}_{\text{эфф}} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\Gamma}. \tag{78.3}$$

Явление экспериментально наблюдалось Барнетом (1873–1956) в 1914 г. Для того чтобы составить представление о масштабе явления, допустим, что гиромагнитное отношение связано с орбитальным движением электронов $[\Gamma = -e/(2mc)]$, и предположим, что частота вращения составляет 100 оборотов в секунду ($\omega = 2\pi \cdot 100$ рад/с). Тогда

$$B_{\text{эфф}} = \frac{2mc}{e}\,\omega \approx 7 \cdot 10^{-5}\ \text{Гс}.$$

Для сравнения заметим, что земное магнитное поле на поверхности Земли меняется в пределах 0,28–0,70 Гс.

4. Исследования магнитомеханического и гиромагнитного явлений показали, что гиромагнитное отношение Γ всегда отрицательно. Тем самым было подтверждено, что магнетизм обусловлен движением отрицательных электрических зарядов (электронов). Числовые значения величины Γ, как и следовало ожидать, оказались заключенными между пределами $e/(2mc)$ и $e/(mc)$. Весьма существенно, что для всех исследованных ферромагнетиков (железо, никель, кобальт, ряд сплавов) гиромагнитное отношение оказалось равным не $-e/(2mc)$, а $-e/(mc)$. Это показывает, что *магнетизм ферромагнетиков обусловлен одним только спином электронов, а не их орбитальным движением.*

В настоящее время разработаны значительно более точные методы измерения магнитных моментов электронов и атомных ядер, а также гиромагнитных отношений. Особенно широкие применения получили методы, основанные на *магнитном резонансе* (электронном и ядерном). Это явление будет рассмотрено в т. V, ч. 1 нашего курса — в атомной физике.

§ 79. Формальная теория ферромагнетизма Вейсса

1. Первая количественная теория ферромагнетизма была разработана французским физиком Вейссом (1865–1940) в 1907 г., хотя до

Вейсса сходные идеи высказывались русским физиком Б.Л. Розингом еще в 1892 г. Но работы Розинга были забыты. Теория Вейсса носит полуфеноменологический характер. Вейсс предположил, что атомы ферромагнетика, как и парамагнетика, обладают магнитными моментами и взаимодействуют между собой с силами, зависящими от угла между этими магнитными моментами. Эти силы стремятся установить магнитные моменты соседних атомов параллельно друг другу. В результате ориентации магнитных моментов атомов в определенном направлении и создается намагничивание ферромагнетика. В теории Вейсса силы взаимодействия между атомами формально сводятся к некоторому «эффективному» магнитному полю, которое и ориентирует атомы ферромагнетика. Эффективное поле складывается из обычного макроскопического поля в веществе **H** и некоторого гипотетического «*молекулярного поля*». Последнее, согласно предположению Вейсса, пропорционально намагниченности ферромагнетика **I**, так что эффективное поле может быть представлено в виде

$$\mathbf{B}_{\text{эфф}} = \mathbf{H} + b\mathbf{I}, \tag{79.1}$$

где b — некоторая положительная постоянная, характеризующая свойства различных ферромагнетиков. Она называется *постоянной Вейсса.* Исходя из этих предположений, нетрудно рассчитать намагничивание ферромагнетика I. Для этого надо только в теории Ланжевена поле **H** заменить на эффективное поле $\mathbf{B}_{\text{эфф}}$. Это дает $I = n\mathfrak{M}L(x)$, где $x = \mathfrak{M}(H + bI)/kT$. Разрешая последнее соотношение относительно I и замечая, что $n\mathfrak{M}$ есть намагничивание насыщения I_s, получаем систему двух уравнений:

$$I = I_s L(x), \quad I = \frac{kTn}{I_s b}\,x - \frac{H}{b},$$

из которой нетрудно вычислить намагничивание I. Эту систему удобно исследовать графически, откладывая по горизонтальной оси величину x, а по вертикальной — намагничивание I (рис. 178). Первое уравнение (79.2) представится кривой Ланжевена OA_0A, а второе — прямой CA, пересекающей вертикальную ось в точке C с ординатой $OC = -H/b$.

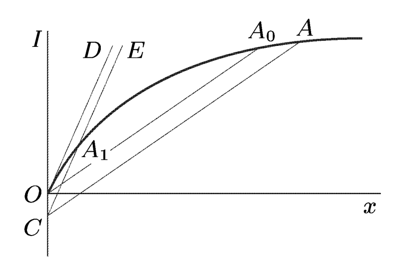


Рис. 178

2. Допустим сначала, что наклон прямой CA меньше наклона кривой Ланжевена в начале координат, т.е. $kTn/(I_s b) < I_s(dL/dx)_{x=0}$, или $T < T_{\text{к}}$, где введено обозначение

$$T_{\text{к}} = \frac{I_s^2 b}{kn}\left(\frac{dL}{dx}\right)_{x=0}. \tag{79.2}$$

Тогда прямая пересечет кривую Ланжевена в точке A, ордината которой и представит намагничивание ферромагнетика I. Будем теперь

уменьшать магнитное поле H до нуля. При этом точка C будет подниматься к точке O, а точка A — перемещаться к точке A_0. Когда магнитное поле H обратится в нуль, ферромагнетик останется намагниченным — его намагничивание представится ординатой точки A_0.

Ферромагнетик будет спонтанно намагничен и в том случае, когда он вообще не вносился ни в какое магнитное поле, так как благодаря гипотетическому взаимодействию между атомами, введенному Вейссом, состояние спонтанного намагничивания «энергетически выгодно». В самом деле, допустим, что вначале магнитные моменты ориентированы хаотически. Если в результате флуктуации магнитные моменты двух или нескольких атомов установятся параллельно в некотором направлении, то появится вейссовское внутреннее поле, которое заставит магнитные моменты остальных атомов предпочесть то же направление. Намагничивание, вообще говоря, не достигнет насыщения, так как этому препятствует тепловое движение. Следует учесть, что благодаря анизотропии кристаллической решетки в ней имеются *оси легкого намагничивания*, вдоль которых и предпочитают выстраиваться магнитные моменты атомов кристалла. Ориентированным атомам нелегко изменить направление, в котором они выстроились, так как для этого им пришлось бы пройти через ряд менее предпочтительных направлений. По этой причине спонтанное намагничивание, раз возникнув в кристалле, сохраняется в нем и в дальнейшем. Таким образом, при $T < T_\text{К}$ ферромагнетик должен быть *спонтанно намагничен*. Энергии теплового движения недостаточно, чтобы разрушить это намагничивание. Величина $T_\text{К}$ называется *температурой* или *точкой Кюри*.

Ниже точки Кюри из-за наличия спонтанного намагничивания обычное определение магнитной восприимчивости и проницаемости с помощью соотношений $\mathbf{I} = \varkappa\mathbf{H}$ и $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ лишено смысла. Величины $\varkappa$ и μ в этом случае определяются соотношениями

$$\varkappa = \frac{dI}{dH}, \quad \mu = \frac{dB}{dH}$$

и являются функциями напряженности поля H.

3. Предположим теперь, что наклон прямой CA больше наклона кривой Ланжевена в точке O. Это будет тогда, когда температура тела выше точки Кюри ($T > T_\text{К}$). Тогда при отсутствии магнитного поля прямая CA займет положение OD, т. е. пересечет кривую Ланжевена только в начале координат, где намагничивание равно нулю. Спонтанного намагничивания не возникнет: намагничивание разрушается тепловым движением. Чтобы намагнитить тело, необходимо приложить магнитное поле. Рассчитаем возникающее при этом намагничивание. Прямая CA в рассматриваемом случае займет положение CE и пересечет кривую Ланжевена в точке A_1, ордината которой численно равна намагниченности тела. Ордината $OC = -H/b$, как показывает анализ экспериментальных данных, мала, а потому мал и участок OA_1 кривой Ланжевена. Заменив этот участок прямой линией, можно написать

$L(x) = (dL/dx)_{x=0}x$, так что

$$I = I_s \left(\frac{dL}{dx}\right)_{x=0} x.$$

Решая это уравнение совместно со вторым уравнением (79.2) и воспользовавшись обозначением (79.3), получим

$$\mathbf{I} = \varkappa \mathbf{H}, \tag{79.3}$$

где

$$\varkappa = \frac{T_{\text{K}}}{b(T - T_{\text{K}})} = \frac{\text{const}}{T - T_{\text{K}}}. \tag{79.4}$$

Намагничивание пропорционально полю, т. е. выше точки Кюри ферромагнетик превращается в парамагнетик, причем зависимость магнитной восприимчивости от температуры определяется *законом Кюри–Вейсса* (79.5).

Можно сказать, что *ниже точки Кюри вещество находится в «упорядоченном состоянии», характеризующемся спонтанным намагничиванием. В точке Кюри происходит фазовое превращение его в «неупорядоченное состояние», в котором намагничивание отсутствует.*

4. Таким образом, теория Вейсса объясняет основные факты из области ферромагнетизма: спонтанную намагниченность, существование температуры Кюри, закон Кюри–Вейсса. Можно было бы предполагать, что поле $b\mathbf{I}$ сводится к обычному взаимодействию магнитных диполей, совершенно аналогичному взаимодействию электрических диполей диэлектрика. Если бы это было так, то, по аналогии с формулой (35.13), молекулярное поле Вейсса, во всяком случае по порядку величины, определялось бы выражением $(4\pi/3)\mathbf{I}$, т. е. постоянная Вейсса была бы порядка единицы. К тому же заключению приводят следующие элементарные соображения. Так как магнитное поле диполя быстро убывает с расстоянием, то поле в центре атома, создаваемое окружающими атомами, было бы порядка поля, создаваемого ближайшим атомом, т. е. $\mathfrak{M}/a^3$, где a — среднее расстояние между атомами. Так как $\mathfrak{M}/a^3$ порядка $\mathbf{I}$, то мы приходим к прежней оценке. Но поле такого порядка совершенно недостаточно, чтобы достигнуть насыщения намагничивания ферромагнетика, так как в парамагнетиках, где ситуация совершенно аналогична, насыщение не наблюдается.

С еще большей убедительностью мы придем к тому же заключению, если на основе экспериментальных данных оценим величину постоянной Вейсса b. Это можно сделать с помощью формулы (79.3). В этой формуле в качестве функции Ланжевена возьмем $L_{1/2}(x) = \operatorname{th} x \approx x$ в соответствии с экспериментально установленным фактом, что ферромагнетизм обусловлен спинами электронов (см. предыдущий параграф). Тогда получим

$$T_{\text{K}} = \frac{I_s^2 b}{kn}. \tag{79.5}$$

Измерив температуру Кюри и намагничивание при насыщении I_s, можно по этой формуле вычислить постоянную b. В результате для b получаются значения порядка 10^3–10^4. Таким образом, внутренние поля, необходимые для объяснения ферромагнетизма, в тысячи и десятки тысяч раз больше магнитных полей, которые могут создать ориентированные магнитные моменты атомов ферромагнетика. Следовательно, ферромагнетизм не может быть объяснен магнитным взаимодействием атомов.

Прямой опыт, поставленный в 1927 г. Я.Г. Дорфманом (1898–1974), доказал, что молекулярное поле, ориентирующее атомы ферромагнетика, не может быть магнитной природы. Между полюсами сильного электромагнита помещалась никелевая фольга толщиной около 20 мкм, расположенная параллельно магнитному полю. Через фольгу перпендикулярно к ее поверхности пропускался пучок быстрых электронов (β-лучей) от радиоактивного источника. После прохождения через фольгу след пучка регистрировался на фотопластинке. Сначала опыт производился с выключенным электромагнитом. При включении магнитного поля электромагнита след пучка смещался в сторону. Если бы молекулярное поле Вейсса было магнитной природы, то смещение вызывалось бы эффективным полем $\mathbf{B}_{\text{эфф}} = \mathbf{H} + b\mathbf{I}$. В этом случае ожидаемое смещение было бы 10 мм. В действительности смещение получилось 0,3 мм и соответствовало действию поля 10^4 Гс, т. е. величине магнитной индукции в образце.

5. Физическая природа молекулярного поля Вейсса была установлена в 1927 г. Я.И. Френкелем (1894–1952) и почти одновременно с ним — Гейзенбергом (1901–1976) на основе квантовой механики. Подробное изложение этого вопроса выходит за пределы нашего руководства. Кратко суть дела заключается в следующем. Если бы к электронам и атомным ядрам ферромагнетика применить обычный закон Кулона, но рассмотреть движение электронов на основе уравнений квантовой механики, то результат оказался бы таким же, какой получился бы в классической механике при наличии, помимо кулоновских сил, некоторых добавочных сил взаимодействия между электронами. Эти добавочные силы, которые надо ввести в классическую теорию, чтобы согласовать ее с квантовой, называются *обменными силами*. Уже из приведенной формулировки видно, что обменные силы не могут быть истолкованы классически, так как в исходные уравнения квантовой механики никакие обменные силы не входят. Они добавляются в классическом рассмотрении для согласования его с квантовым. Обменные силы являются *короткодействующими*, т. е. действуют на расстояниях порядка атомных. При определенных условиях, относящихся к электронному строению атомов, структуре кристаллической решетки и т. п., обменные силы стремятся установить спины электронов соседних атомов параллельно друг другу, чем и объясняется намагничивание ферромагнетиков. Обменное взаимодействие, как показывает расчет, может быть с достаточной точностью учтено введением некоторого эквивалентного молекулярного поля $b\mathbf{I}$. Тем самым теория Вейсса получает настоящее

физическое обоснование, без каких-либо специальных допущений и гипотез.

6. Спонтанное намагничивание, предсказываемое теорией Вейсса, находится в кажущемся противоречии с тем фактом, что даже ниже температуры Кюри железо и другие ферромагнетики, как правило, не намагничены, хотя и существуют постоянные магниты, остаточное намагничивание и пр. Вейсс устранил это противоречие, введя предположение, подтвердившееся дальнейшими исследованиями, что ферромагнетики ниже точки Кюри распадаются в магнитном отношении на множество чрезвычайно малых макроскопических областей. Каждая из таких областей спонтанно намагничена до значения, соответствующего по теории положению точки A_0 на рис. 178. Эти области спонтанного намагничивания получили название *доменов.* Их ни в коем случае не следует смешивать с мельчайшими кристалликами, из которых обычно состоят ферромагнитные тела (поликристаллы). В обычных условиях направления магнитных моментов доменов хаотически распределены в пространстве, так что тело в целом представляется макроскопически ненамагниченным. При включении внешнего магнитного поля домены, ориентированные по полю, растут за счет доменов, ориентированных против поля, т. е. происходит смещение границ доменов. Такое смещение в слабых полях носит *обратимый характер.* В более сильных полях происходит переориентация магнитных моментов в пределах всего домена. Перемагничивание прибретает *необратимый характер* — появляется гистерезис и остаточное намагничивание.

Распад ферромагнетика на домены происходит потому, что этот процесс «энергетически выгоден». Если бы весь ферромагнетик был намагничен в одном определенном направлении, то в этом случае получился бы минимум энергии обменного взаимодействия электронов. Однако такому ферромагнетику соответствовала бы значительная энергия возбуждаемого им магнитного поля. При дроблении ферромагнетика на домены и появлении доменов различной ориентации магнитное поле, возбуждаемое ферромагнетиком, ослабляется. Уменьшается и соответствующая ему энергия. Что касается энергии обменного взаимодействия электронов, то благодаря короткодействующему характеру обменных сил эта энергия остается неизменной для всех электронов, за исключением электронов на границах доменов, где она возрастает из-за различной ориентации спинов электронов соседних доменов. Обменная энергия атомов, расположенных на границах доменов, может рассматриваться как *поверхностная энергия*, поскольку она пропорциональна полной площади поверхностей, вдоль которых граничат домены. По мере дробления доменов поверхностная, а с ней и полная энергия обменного взаимодействия возрастают, а энергия магнитного поля убывает. Дробление доменов прекращается, когда сумма магнитной и обменной энергий достигает минимума. Условием этого минимума и определяется размер доменов.

7. Доменная структура ферромагнетиков доказана экспериментально. Наиболее прямым доказательством является получение так называемых *порошковых фигур.* Тщательно отполированная поверхность ферромагнетика покрывается тонким слоем жидкости, в которой взвешены мельчайшие частицы ферромагнитного порошка (например, Fe_2O_3). Частицы оседают преимущественно в местах максимальной неоднородности магнитного поля, т. е. на границах между доменами. Благодаря этому осевший порошок очерчивает границы доменов. Получившиеся «порошковые фигуры» хорошо видны в микроскоп небольшого увеличения.

Другой, косвенный, метод основан на наблюдении *эффекта Баркгаузена* (1881–1956). Если к ферромагнитному образцу подносить и удалять сильный магнит, то образец будет намагничиваться и перемагничиваться. Перемагничивание осуществляется резким поворотом или опрокидыванием направления вектора намагничивания в пределах всего домена. Такие скачкообразные повороты и опрокидывания вектора намагничивания домена называются *скачками Баркгаузена.* Для их наблюдения ферромагнитный образец в виде длинного стерженька или проволоки помещается в катушке, концы которой через усилитель присоединены к громкоговорителю или к осциллографу. При каждом повороте или опрокидывании магнитного момента домена скачкообразно меняется магнитный поток через катушку, и в последней возбуждается индукционный ток. В громкоговорителе слышен своеобразный шорох, а на осциллограмме осциллографа появляется беспорядочно меняющийся всплеск. В этом и состоит эффект Баркгаузена. Из осциллограмм эффекта Баркгаузена, а также с помощью порошковых фигур оказалось возможным приблизительно определить объем и линейные размеры доменов. Объем домена оказался порядка 10^{-6} см^3. Длина доменов может достигать 2–3 мм.

8. В заключение отметим, что в зависимости от структуры кристалла обменные силы могут вызывать не только параллельную, но и *антипараллельную ориентацию* электронных спинов соседних атомов. В простейшем случае (в отсутствие намагничивающего поля) электронные спины как бы образуют две пространственные подрешетки с противоположно направленными спинами, вставленные одна в другую. Если величина намагничивания обеих подрешеток одинакова, то их магнитные моменты компенсируют друг друга, гак что кристалл в целом не обладает магнитным моментом. Такие тела называются *антиферромагнетиками*, а соответствующее им упорядочение электронных спинов — *антиферромагнетизмом.* Явление антиферромагнетизма было теоретически предсказано Неелем (р. 1904) в 1932 г. и независимо от него Л.Д. Ландау в 1933 г. К антиферромагнетикам относятся некоторые соединения марганца (MnO, MnS, MnF_2), железа (FeF_2, $FeCl_2$, FeO), хрома ($CrSb$, Cr_2O_3) и многих других элементов. При низких температурах антиферромагнетики имеют ничтожно малую магнитную восприимчивость, которая увеличивается с повышением температуры. При некоторой температуре, называемой *антиферро-*

магнитной точкой Кюри или *точкой Нееля*, магнитное упорядочение спинов разрушается и антиферромагнетик превращается в парамагнетик. С дальнейшим повышением температуры, как у всякого парамагнетика, магнитная проницаемость уменьшается. Таким образом, она достигает максимума в антиферромагнитной точке Кюри.

Если величина намагничивания обеих подрешеток неодинакова, то возникает *нескомпенсированный антиферромагнетизм.* В этом случае тело обладает магнитным моментом, который может быть довольно значительным. Такие тела называются *ферримагнетиками.* По своим магнитным свойствам они аналогичны ферромагнетикам. Если при этом ферримагнетики обладают еще полупроводниковыми свойствами, то они называются *ферритами.*

§ 80. Сверхпроводники и их магнитные свойства

1. Явление сверхпроводимости было открыто в 1911 г. Камерлинг-Оннесом (1853–1926) после того, как в 1908 г. им же был ожижен гелий и стала доступной область температур вблизи абсолютного нуля. Исследуя сопротивление ртути постоянному току при приближении к абсолютному нулю, Камерлинг-Оннес обнаружил, что при температуре 4,12 К (по современным измерениям, 4,15 К) сопротивление скачкообразно уменьшалось до нуля или, во всяком случае, до неизмеримо малой величины. Дальнейшие исследования показали, что аналогично ведут себя и многие другие металлы. Это явление назвали *сверхпроводимостью*, а вещества, где оно наблюдается, — *сверхпроводниками.* Температура $T_к$, при которой происходит скачкообразное уменьшение сопротивления, называется *температурой перехода в сверхпроводящее состояние* или *критической температурой.* Состояние сверхпроводника выше критической температуры называется *нормальным*, а ниже — *сверхпроводящим.* В настоящее время известно, что примерно половина металлических элементов переходит в сверхпроводящее состояние. Сверхпроводимость обнаружена также более чем у тысячи сплавов и соединений металлов. Из чистых металлов наибольшей температурой перехода обладает ниобий (9,3 К), а среди сплавов и химических соединений рекордным [1] является соединение ниобия с германием Nb_3Ge ($T_к = 23{,}2$ К).

Наиболее точным методом для количественных оценок сопротивления сверхпроводников в сверхпроводящем состоянии является создание индукционного тока в *сверхпроводящем кольце.* Кольцо из исследуемого материала при температуре выше критической вносится в магнитное поле. Затем оно охлаждается до температуры ниже критической и тем

[1] В 1987 г. были открыты высокотемпературные сверхпроводники с критической температурой $T_к$, превосходящей температуру кипения жидкого азота при атмосферном давлении (77,4 К). К 1990 г. наивысшее надежно установленное значение $T_к$ равно примерно 125 К. Речь идет при этом о довольно сложных слоистых соединениях меди и кислорода. (*Примеч. ред.*)

самым переводится в сверхпроводящее состояние. После этого магнитное поле выключается и в кольце возбуждается индукционный ток. В обычном нормальном металле индукционный ток быстро затухает. По быстроте этого затухания можно судить о сопротивлении кольца. Если же кольцо сверхпроводящее, то ток продолжается практически неограниченно долго. Наблюдая такой ток (по величине возбуждаемого им магнитного поля), можно оценить верхний предел сопротивления кольца. Таким путем найдено, что удельное сопротивление свинца в сверхпроводящем состоянии меньше $4\cdot 10^{-23}$ Ом · см, т. е. по крайней мере в 10^{17} раз меньше удельного сопротивления меди при комнатной температуре. При переходе через критическую температуру скачок сопротивления составляет по крайней мере 14 порядков. Это позволяет с полным основанием считать, что в сверхпроводящем состоянии электрическое сопротивление постоянному току действительно исчезает.

2. Сверхпроводник ниже критической температуры не оказывает никакого электрического сопротивления только тогда, когда ток *постоянный.* В случае переменных токов сопротивление отлично от нуля и тем больше, чем выше частота переменного тока. Этот факт проще всего понять на основе так называемой *двухжидкостной модели сверхпроводника.* Согласно этой модели электроны, создающие электрический ток в сверхпроводнике, разделяются на две группы: *сверхпроводящие* и *нормальные.* Сверхпроводник как бы пропитан двумя электрическими жидкостями, откуда и произошло название модели. Сверхпроводящие электроны при своем движении не встречают никаких сил сопротивления, они движутся по инерции, а потому для поддержания сверхпроводящего тока не требуется никакого электрического поля. Напротив, нормальные электроны испытывают столкновения с атомами решетки, как в обычных металлах, и для тока нормальных электронов справедлив обычный закон Ома. При включении электрического поля ускоряются как сверхпроводящие, так и нормальные электроны. Когда ток становится постоянным, электрическое поле в сверхпроводнике должно исчезнуть, так как в противном случае сверхпроводящие электроны непрерывно ускорялись бы, а создаваемый ими ток неограниченно возрастал бы. Но при отсутствии электрического поля нормальные электроны не могут создать никакого тока. Ток создается только сверхпроводящими электронами, а потому и не возникает никакого электрического сопротивления. Если же сила тока меняется, то в сверхпроводнике должно существовать электрическое поле, ускоряющее как сверхпроводящие, так и нормальные электроны. Появляется ток нормальных электронов и связанные с ним электрическое сопротивление и джоулево тепло. Правда, для обычных переменных токов, с которыми имеет дело электротехника (частота $\nu \sim 50$ Гц), на долю тока нормальных электронов приходится ничтожная часть. Однако с повышением частоты эта доля непрерывно возрастает. Когда частота ν становится достаточно высокой, начинают проявляться квантовые эффекты, еще больше увеличивающие потери энергии на джоулево тепло. Это происходит тогда, когда энергии

кванта $h\nu$ достаточно для перевода сверхпроводящего электрона на более высокий энергетический уровень, т. е. в группу нормальных электронов. Частоту ν легко оценить, заметив, что, когда температура достигает критической, энергия теплового движения kT становится достаточной для такого перехода. Поэтому должно быть $h\nu \gtrsim kT_{\text{к}}$. Так как $T_{\text{к}} \sim 1$ К, то отсюда получаем $\nu \gtrsim 10^{11}$ Гц, т. е. указанный процесс начинает происходить в области инфракрасных частот. С изложенной точки зрения понятно, почему сверхпроводники, даже при температуре ниже критической, в оптическом отношении ведут себя как обычные металлы.

3. Перейдем теперь к рассмотрению магнитных свойств сверхпроводников. До 1933 г. считалось, что в магнитном отношении сверхпроводники ведут себя просто как идеальные проводники, т. е. тела, электропроводность которых бесконечно велика. В идеальном проводнике, как известно (см. § 71), сохраняется магнитный поток через любой «жидкий» контур, движущийся вместе с проводником. Если проводник твердый (а все сверхпроводники твердые) и неподвижен, то и всякий «жидкий» контур в нем также неподвижен и недеформируем. Так как контур можно взять бесконечно малым и любым, то из сохранения потока $\int \mathbf{B}\, d\mathbf{S}$ следует и сохранение вектора $\mathbf{B}$. Таким образом, индукция $\mathbf{B}$ в твердом идеальном проводнике не может изменяться.

Применим доказанную теорему к сверхпроводникам. Будем характеризовать внешние условия, в которых находится сверхпроводник, температурой T и внешним приложенным магнитным полем B_e (создаваемым, например, электромагнитом), откладывая эти параметры на осях координат (рис. 179). Переведем сверхпроводник (имеющий, на-

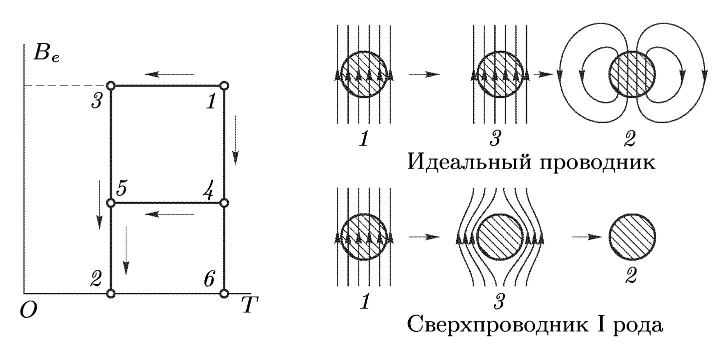


Рис. 179

пример, форму шара) из несверхпроводящего состояния *1* в сверхпроводящее состояние *2* по пути *132*. Сначала, не меняя магнитного поля B_e, охладим тело до точки *3*, переведя его в сверхпроводящее состояние. Все сверхпроводники не ферромагнитны, так что их магнитная проницаемость очень близка к единице. Поэтому при указанном охлаждении поле внутри и вне сверхпроводника не изменится. В точке *3*, сохраняя температуру постоянной, выключим внешнее приложенное

поле B_e, т. е. перейдем в точку *2*. В силу доказанной теоремы магнитное поле внутри сверхпроводника не изменится. Вне сверхпроводника останется неоднородное магнитное поле, так как должно выполняться граничное условие — непрерывность нормальных составляющих вектора индукции на границе тела. Произведем теперь переход в ту же точку *2* по пути *1452*. В наших рассуждениях ничего не изменится — достаточно в качестве исходной взять просто точку *4*, где внешнее приложенное поле B_e слабее, чем в точке *1*. В точке *2* внутри и вне тела получится такая же картина поля, что и раньше, только поле всюду будет слабее. В частности, если переход произвести по пути *1462*, то магнитное поле в конечном состоянии всюду будет равно нулю. Таким образом, заданием внешних параметров T и B_e состояние сверхпроводника не определяется однозначно. Сверхпроводник может перейти в любое из бесчисленного множества состояний в зависимости от «пути перехода», т. е. от способа, каким достигнуты значения параметров T и B_e.

4. Реальные сверхпроводники ведут себя иначе. Вальтер Мейсснер (1882–1974) совместно с Оксенфельдом показал в 1933 г., что *в сверхпроводящем состоянии магнитное поле внутри сверхпроводника равно нулю* ($\mathbf{B} = \mathbf{H} = 0$). Это значит, что *при охлаждении сверхпроводника ниже критической температуры магнитное поле вытесняется из него* (*эффект Мейсснера–Оксенфельда*). Поэтому картина изменения магнитного поля при изменении внешних параметров T и B_e, изображенная в верхнем ряду рис. 179, не соответствует реальному поведению сверхпроводника. Действительное поведение показано на том же рисунке в нижнем ряду. Состояние сверхпроводника *однозначно* определяется параметрами T и B_e и *не зависит от пути перехода* в это состояние. Позднее было показано, что не все сверхпроводники ведут себя в соответствии с результатом, установленным Мейсснером и Оксенфельдом. Сверхпроводники, для которых эффект Мейсснера–Оксенфельда имеет место в описанной форме, называются *сверхпроводниками I рода*, а сверхпроводники, где явление протекает иначе, — *сверхпроводниками II рода*. Более точное определение будет дано ниже (см. п. 9). Сейчас же заметим, что к сверхпроводникам I рода относятся все чистые металлы, за исключением ниобия, ванадия и технеция, которые являются сверхпроводниками II рода. Сначала мы будем предполагать, что имеем дело со сверхпроводниками I рода.

Так как в сверхпроводнике нет магнитного поля, то в его объеме не могут течь и электрические токи, т. е. внутри сверхпроводника $\mathbf{j} = 0$. Это непосредственно следует из теоремы о циркуляции $\operatorname{rot} \mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{j}$. Все токи должны течь по поверхности сверхпроводника. Эти поверхностные токи возбуждают магнитное поле, компенсирующее внутри проводника внешнее приложенное поле. Таков механизм вытеснения магнитного поля из сверхпроводника, о котором говорится в эффекте Мейсснера–Оксенфельда.

Эффект Мейсснера–Оксенфельда очень наглядно проявляется в *парении магнита* над поверхностью сверхпроводника. На тарелку из

сверхпроводника (например, свинцовую), охлажденную до температуры ниже критической, опускается небольшой магнит. При этом в тарелке возбуждаются незатухающие индукционные токи. Отталкивая магнит, эти токи и заставляют его «парить» над тарелкой на определенной высоте. Явление наблюдается и в том случае, когда магнит кладется на тарелку, температура которой выше критической, а затем охлаждением тарелка приводится в сверхпроводящее состояние. Дело в том, что вытеснение магнитного поля из сверхпроводника также сопровождается изменениями магнитных потоков, а следовательно, и возбуждением индукционных токов. Эти токи определяются только взаимным расположением магнита и тарелки и совсем не зависят от того, каким способом было достигнуто это расположение. Поэтому явление будет выглядеть так же, как и при первой постановке опыта.

5. В действительности ток у границы сверхпроводника течет не по поверхности, а *в слое конечной толщины*. В тот же слой должно проникать и магнитное поле, как это видно из уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{j}$. Наиболее простая оценка *глубины проникновения магнитного поля* в сверхпроводник была дана братьями Фрицем и Гансом Лондонами, разработавшими первую феноменологическую теорию сверхпроводимости. Приведем эту оценку. Будем предполагать, что имеем дело с полями, медленно меняющимися во времени. Так как сверхпроводники не ферромагнитны, то можно пренебречь разницей между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ и записать фундаментальные уравнения электродинамики в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\,\dot{\mathbf{B}}, \tag{80.1}$$

причем мы будем также пренебрегать разницей между частной и полной производными по времени. Предполагая, что токи создаются движением только сверхпроводящих электронов, напишем далее $\mathbf{j} = -n_s e\mathbf{v}_s$, где n_s — концентрация таких электронов. После дифференцирования по времени получим $d\mathbf{j}/dt = -n_s e\dot{\mathbf{v}}_s$. Ускорение электрона $\dot{\mathbf{v}}_s$ найдется из уравнения $m\dot{\mathbf{v}}_s = -e\mathbf{E}$, если пренебречь действием магнитного поля. Тогда

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = -\frac{c^2}{4\pi\Lambda^2}\,\mathbf{E}, \tag{80.2}$$

где введено обозначение

$$\Lambda = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}}. \tag{80.3}$$

Продифференцировав первое уравнение (80.1) по t, исключим из уравнений (80.1) и (80.2) величины $\mathbf{E}$ и $d\mathbf{j}/dt$. Тогда получим

$$\dot{\mathbf{B}} = -\Lambda^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{B}}.$$

Этому уравнению удовлетворяет $\mathbf{B} = \text{const}$. Но такое решение не согласуется с эффектом Мейсснера–Оксенфельда, так как внутри сверхпроводника должно быть $\mathbf{B} = 0$. Лишнее решение получилось потому,

что при выводе дважды применялась операция дифференцирования по времени. Чтобы автоматически исключить это решение, Лондоны ввели гипотезу, что в последнем уравнении производную $\mathbf{B}$ следует заменить самим вектором $\mathbf{B}$. Это дает

$$\mathbf{B} = -\Lambda^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B}. \tag{80.4}$$

Для определения глубины проникновения магнитного поля внутрь сверхпроводника допустим, что последний ограничен плоскостью и занимает все полупространство по одну сторону от нее. Направим ось Z внутрь сверхпроводника нормально к его границе. Пусть магнитное поле параллельно оси X, так что $B_y = B_z = 0$. Тогда

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial z}\mathbf{e}_y, \quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B} = -\frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2}\mathbf{e}_x$$

и уравнение (80.4) дает

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2} - \frac{\mathbf{B}}{\Lambda^2} = 0.$$

Решение этого уравнения, обращающееся в нуль при $z \to \infty$, имеет вид

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{-z/\Lambda}. \tag{80.5}$$

Постоянная интегрирования $\mathbf{B}_0$ дает поле на поверхности сверхпроводника. На протяжении длины Λ магнитное поле убывает в e раз. Величина Λ и принимается за меру глубины проникновения магнитного поля в металл.

Для получения численной оценки примем, что на каждый атом металла приходится один сверхпроводящий электрон, полагая $n_s \approx 5 \cdot 10^{22}$ см$^{-3}$. Тогда по формуле (80.3) найдем $\Lambda \approx 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ см, что по порядку величины совпадает со значениями, полученными непосредственными измерениями. Концентрация сверхпроводящих электронов убывает по мере приближения к критической температуре $T_\text{к}$. В соответствии с этим при возрастании температуры от 0 до $T_\text{к}$ глубина проникновения Λ монотонно растет и обращается в бесконечность при $T = T_\text{к}$ (см. рис. 180, где представлена зависимость Λ от T для олова).

6. *При увеличении напряженности внешнего возбуждающего поля* $\mathbf{B}_e$ *выше определенного предела сверхпроводимость разрушается*, *т. е. сверхпроводник переходит в нормальное состояние*, *а магнитное поле проникает внутрь сверхпроводника.* Магнитное поле, при котором это происходит, называется *критическим полем* и обозначается $\mathbf{B}_\text{к}$. Критическое поле зависит от температуры. Его легко определить из термодинамических соображений. Чтобы освободиться от осложняющих обстоятельств, не имеющих отношения к существу вопроса, будем предполагать, что сверхпроводящее тело имеет форму длинного цилиндра, а внешнее приложенное поле однородно и направлено параллельно оси цилиндра. Тогда магнитное поле внутри цилиндра (когда он находится в нормальном состоянии), а также намагничивание последнего

будут также однородными. Для определенности предположим, что поле $\mathbf{B}_e$ создается длинным соленоидом, по боковой поверхности которого

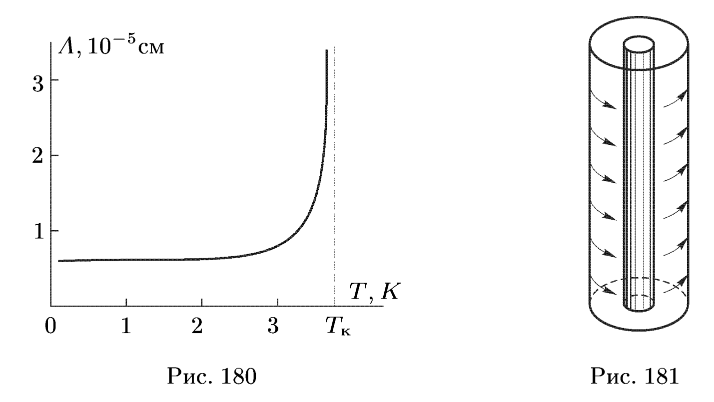


Рис. 180 Рис. 181

циркулирует постоянный ток I, а ось цилиндра совпадает с осью соленоида (рис. 181) Длины цилиндра и соленоида для простоты примем одинаковыми и равными l. Влияние краев цилиндра и соленоида при достаточно большом l можно не принимать во внимание. Магнитную проницаемость сверхпроводника будем считать равной единице как в сверхпроводящем, так и в нормальном состоянии. Пусть ψ_s и ψ_n — объемные плотности свободной энергии сверхпроводника в сверхпроводящем и нормальном состоянии при отсутствии магнитного поля. Поскольку температура ниже критической, реализуется сверхпроводящее состояние; оно является более устойчивым, а потому должно быть $\psi_s < \psi_n$.

Критическое магнитное поле $\mathbf{B}_к$ можно определить как такое поле $\mathbf{B}_e$, когда при заданной температуре сверхпроводящая и нормальная фазы находятся в равновесии друг с другом. Тогда полная свободная энергия всей системы будет одна и та же независимо от того, в какой фазе находится сверхпроводящий цилиндр. Пусть цилиндр квазистатически переходит из сверхпроводящего в нормальное состояние, и притом так, что во время перехода температура T, внешнее приложенное поле $\mathbf{B}_e$, а с ним и ток I в соленоиде поддерживаются постоянными ($\mathbf{B}_e = \mathbf{B}_к$). Так как магнитное поле в сверхпроводник не проникает (мы пренебрегаем глубиной проникновения), то свободная энергия сверхпроводящего цилиндра будет $V_1\psi_s$, где V_1 — объем цилиндра. Сюда надо добавить энергию магнитного поля, локализованную вне цилиндра, т. е. $(V - V_1)B_к^2/(8\pi)$, где V — объем соленоида. Полная свободная энергия системы в начальном состоянии будет

$$\Psi_1 = V_1\psi_s + \frac{1}{8\pi}(V - V_1)B_к^2.$$

Во время перехода будет меняться магнитный поток Φ через поперечное сечение цилиндра и возбуждаться электродвижущая сила индукции $\mathscr{E}^{инд} = -(1/c)\,d\Phi/dt$. Для поддержания силы тока в соленоиде I

постоянной должна быть затрачена элементарная работа

$$-\mathscr{E}^{\text{инд}} I\,dt = \frac{1}{c}\,I\,d\Phi.$$

Поскольку ток I постоянен, полная затраченная работа во время перехода будет

$$A = \frac{1}{c}\,I\Phi = \frac{1}{c}\,ISB_e,$$

где S — площадь поперечного сечения соленоида. А так как $B_e = B_{\text{к}} = 4\pi I/l$, то $A = lSB_{\text{к}}^2/(4\pi) = V_1 B_{\text{к}}^2/(4\pi)$. В результате для свободной энергии системы в конечном состоянии получаем

$$\Psi_2 = \Psi_1 + A = V_1\left(\psi_s + \frac{1}{8\pi}\,B_{\text{к}}^2\right) + \frac{V}{8\pi}\,B_{\text{к}}^2.$$

Результат, разумеется, не зависит от способа перехода системы в конечное состояние, поскольку свободная энергия есть функция состояния. Но в конце перехода сверхпроводящий цилиндр перешел в нормальное состояние, а магнитное поле заполняет весь объем соленоида. Поэтому для Ψ_2 можно написать также

$$\Psi_2 = V_1\psi_n + \frac{V}{8\pi}\,B_{\text{к}}^2.$$

Сравнивая оба выражения для Ψ_2, находим

$$\psi_s + \frac{1}{8\pi}\,B_{\text{к}}^2 = \psi_n. \tag{80.6}$$

Этим соотношением и определяется критическое поле, при котором начинается разрушение сверхпроводимости.

Сверхпроводимость разрушается также электрическим током, когда последний превосходит известный предел (*критический ток*). Однако этот эффект является простым следствием только что рассмотренного. Действительно, ток, протекающий по сверхпроводнику, возбуждает магнитное поле. Когда оно достигает критического значения, начинается разрушение сверхпроводимости.

7. Состояние сверхпроводника однозначно определяется заданием внешнего приложенного поля $\mathbf{B}_e$ и температуры T (при условии, что давление, объем и прочие параметры поддерживаются постоянными), т. е. точкой на плоскости (T, B_e). На соответствующей диаграмме состояния (рис. 182) кривая равновесия делит плоскость на две части: одной соответствует сверхпроводящая фаза, а другой — нормальная. Кривая равновесия имеет параболическую форму. На ней располагаются точки $(T_{\text{к}}, B_{\text{к}})$. Из кривой равновесия видно, как магнитное поле понижает температуру перехода в сверхпроводящее состояние. Ранее введенную критическую температуру мы обозначаем теперь через $T_{\text{к}0}$, чтобы подчеркнуть, что это есть температура перехода в сверхпроводящее состояние при отсутствии магнитного поля ($B_e = 0$). Аналогичный смысл имеет обозначение $B_{\text{к}0}$.

8. До сих пор предполагалось, что сверхпроводящий образец имеет форму длинного цилиндра, а внешнее возбуждающее поле $\mathbf{B}_e$ однородно и параллельно оси образца. В этом случае магнитное поле на

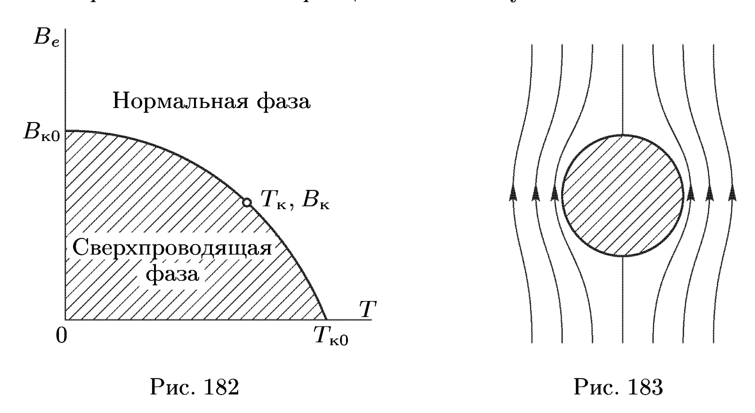


Рис. 182 Рис. 183

поверхности образца имеет одинаковое значение во всех точках. При возрастании магнитного поля оно во всех этих точках достигнет критической величины $B_{\text{к}}$ одновременно. Когда это произойдет, сверхпроводящее состояние будет разрушено во всем объеме образца. Последний целиком перейдет в нормальное состояние.

Сложнее ведут себя образцы другой формы, так как в этих случаях критическое поле $\mathbf{B}_{\text{к}}$ в различных точках поверхности образца достигается при различных значениях $\mathbf{B}_e$. Рассмотрим простейший случай, когда образец имеет форму шара и внесен в однородное магнитное поле $\mathbf{B}_e$ (рис. 183). Максимального значения магнитное поле на поверхности шара достигает на экваторе, где оно составляет $(3/2)B_e$ (см. задачу 8). Поэтому разрушение сверхпроводимости $(3/2)B_e = B_{\text{к}}$. Но при таком значении поля B_e в нормальное состояние не может перейти весь шар. В противном случае (так как $\mu = 1$) магнитное поле во всем пространстве стало бы однородным и равным $\mathbf{B}_e = (3/2)\mathbf{B}_{\text{к}}$, т. е. меньше критического, а потому шар должен был бы вернуться в сверхпроводящее состояние. Разрушение сверхпроводимости в магнитном поле происходит путем «распада» шара на чередующиеся тонкие слои, а в случае тел более сложной формы — на малые области (*домены*) из сверхпроводящей и нормальной фаз, подобные доменам, на которые распадается ферромагнетик. Такое состояние распада сверхпроводника на сверхпроводящие и нормальные домены, связанное с его формой и обусловленное магнитным полем, называется *промежуточным состоянием.* Его существование было доказано прямыми опытами.

9. Одним из существенных факторов, определяющих поведение сверхпроводника, является *поверхностная энергия*, связанная с наличием границ раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами. Эта энергия аналогична энергии поверхностного натяжения на границе раздела двух жидкостей. Однако в случае сверхпроводников поверхностная энергия может быть и положительной и отрицательной.

Сверхпроводники, для которых поверхностная энергия положительна, называются *сверхпроводниками* I *рода*, а сверхпроводники с отрицательной поверхностной энергией — *сверхпроводниками* II *рода.* Долгое время считалось, что все сверхпроводники являются сверхпроводниками I рода. Возможность существования сверхпроводников II рода была теоретически предсказана в 1957 г. А.А. Абрикосовым (р. 1928).

Допустим, что сверхпроводящий образец имеет форму длинного цилиндра, а внешнее магнитное поле прилагается параллельно его оси. В таком случае никакого промежуточного состояния, связанного с формой образца, не возникнет. Однако при возрастании магнитного поля $\mathbf{B}_e$ сверхпроводники I и II рода будут вести себя по-разному. Если внешнее приложенное поле $\mathbf{B}_e$ достигает критического значения $\mathbf{B}_к$, то в случае сверхпроводников I рода сверхпроводящая фаза становится термодинамически неустойчивой и весь образец переходит в более устойчивую — нормальную — фазу. Дробление сверхпроводника на малые сверхпроводящие и нормальные домены не наблюдается, так как на образование границ между ними требуется дополнительная затрата энергии. В соответствии с этим на диаграмме состояния сверхпроводника I рода существуют только две области: *сверхпроводящая* и *нормальная* (рис. 182). Не то будет в случае сверхпроводников II рода. Так как здесь поверхностная энергия отрицательна, то имеется возможность понижения полной свободной энергии системы путем дробления образца на сверхпроводящие и нормальные домены. Такое дробление не связано с формой образца, а является *внутренним свойством* сверхпроводников II рода. Кроме того, в отличие от промежуточного состояния, где доменная структура сравнительно грубая и видна невооруженным глазом, домены в сверхпроводниках II рода значительно мельче (порядка 10^{-5} см и меньше). Описанное состояние сверхпроводника II рода, в котором он существует в виде сверхпроводящих и нормальных доменов, называется *смешанным состоянием.* На диаграмме состояния сверхпроводника II рода (рис. 184) различают три области: *сверхпроводящую*, *область смешанного состояния* и *нормальную область.* Границы между этими областями определяют «*нижнее*» $B_{к1}$ и «*верхнее*» $B_{к2}$ *критические поля.* Сверхпроводники II рода (сверхпроводящие сплавы) нашли применения в качестве соленоидов, предназначенных для получения сильных магнитных полей (около 100 кГс). Сверхпроводники I рода для этой цели не годятся из-за низких значений критических магнитных полей, разрушающих сверхпроводимость.

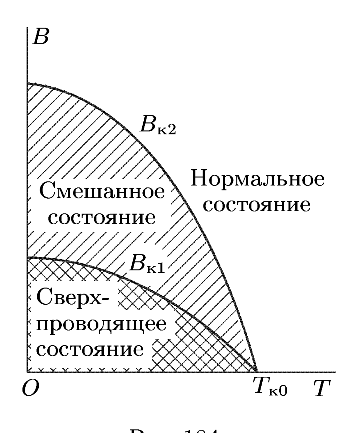


Рис. 184

10. Физическая природа сверхпроводимости была понята только в 1957 г. Еще задолго до этого Ландау была создана *теория сверхтекучести* гелия II. Оказалось, что сверхтекучесть — это *макроскопический квантовый эффект.* Однако перенести теорию Ландау на явление сверхпроводимости мешало то обстоятельство, что атомы гелия, обладая нулевым спином, подчиняются *статистике Бозе* (1894–1974)–*Эйнштейна.* Электроны же, обладая половинным спином, подчиняются *принципу Паули* и *статистике Ферми–Дирака* (см. т. II, § 82). Для таких частиц невозможна *бозе–эйнштейновская конденсация*, необходимая для возникновения сверхтекучести. Решающий шаг в понимании сверхпроводимости был сделан американскими физиками Бардином (р. 1908), Купером (р. 1930) и Шриффером (р. 1931). Их теория в математическом отношении была усовершенствована советским физиком Н.Н. Боголюбовым (р. 1909). Основная идея заключается в следующем.

Между электронами металла существует кулоновское отталкивание. Однако оно в значительной степени ослаблено экранирующим действием положительных ионов решетки. Между тем взаимодействие электронов с колебаниями решетки приводит к слабому притяжению между ними. Это притяжение есть *квантовый эффект.* Оно при определенных условиях может превзойти кулоновское отталкивание между электронами, и тогда электроны группируются в пары (*куперовские пары*). Эти пары, обладая нулевым спином, ведут себя как *бозе-частицы* и переносят электрический ток в сверхпроводниках. Ограничимся этим замечанием, так как здесь невозможно входить в теорию сверхпроводимости по существу.

ЗАДАЧИ

1. Сверхпроводящие катушки с самоиндукциями L_1 и L_2 соединены параллельно и включены в цепь гальванической батареи с электродвижущей силой $\mathcal{E}$ (рис. 185). Найти установившиеся токи в катушках I_1 и I_2 и ток в общей цепи I, если коэффициентом взаимной индукции катушек можно пренебречь.

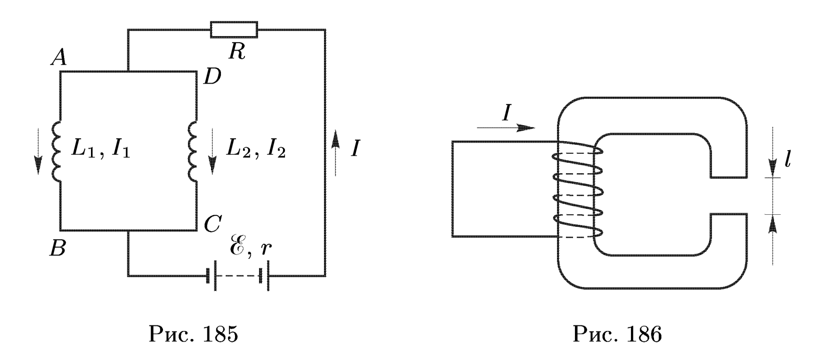


Рис. 185 Рис. 186

Решение. По закону Ома $I = \mathcal{E}/(R + r)$. До включения батареи магнитный поток через сверхпроводящий контур $ABCD$ был равен нулю.

Он сохранится таковым и после включения тока, т. е. $L_1 I_1 - L_2 I_2 = 0$, откуда

$$I_1/I_2 = L_2/L_1. \tag{80.7}$$

Присоединив сюда уравнение $I_1 + I_2 = I$, найдем токи I_1 и I_2 в отдельности.

2. В замкнутой сверхпроводящей обмотке электромагнита возбужден постоянный ток I (рис. 186). В магнитопроводе из мягкого железа с магнитной проницаемостью μ имеется небольшой зазор толщины l, так что рассеянием магнитного поля в зазоре можно пренебречь. Длина магнитопровода (вместе с зазором) равна L. Чему будет равен ток I_0 в обмотке электромагнита, если в зазор вставить пластину толщины l из того же железа?

Ответ. $I_0 = \dfrac{I}{1 + (\mu - 1)l/L}$.

3. Длинный сверхпроводящий цилиндр (из сверхпроводника I рода) внесен в постоянное однородное магнитное поле $\mathbf{B}$, направленное параллельно оси цилиндра. Определить силу f, действующую на единицу площади боковой поверхности цилиндра.

Ответ. $f = B^2/(8\pi)$ (давление, направленное к оси цилиндра).

4. Кольцо из тонкой проволочки помещено в однородное магнитное поле $\mathbf{B} = 10$ Гс, перпендикулярное к плоскости кольца, и охлаждением переведено в сверхпроводящее состояние. Найти силу тока в кольце после выключения магнитного поля, если радиус кольца $R = 5$ см, а радиус проволоки $a = 1$ мм.

Указание. Самоиндукция тонкого проволочного кольца (если ток течет по его поверхности) в гауссовой системе дается выражением

$$L = 4\pi R[\ln (8R/a) - 2].$$

Ответ. $I = c\pi R^2 B/L = 9{,}4 \cdot 10^{10}$ СГСЭ-ед. = 31 А.

5. Над плоской поверхностью сверхпроводника I рода параллельно этой поверхности подвешен тонкий прямолинейный провод на расстоянии h от плоскости, по которому течет постоянный ток I. Найти линейную плотность сверхпроводящего тока i, текущего по поверхности сверхпроводника.

Указание. Применить метод зеркальных изображений.

Ответ. $i = Ih/(\pi r^2)$, где r — расстояние между проводом и точкой наблюдения. Сверхпроводящий ток параллелен току I и течет в противоположном направлении.

6. Над плоской поверхностью сверхпроводника I рода на изолирующем слое толщины $h = 5$ мм лежит тонкое сверхпроводящее кольцо радиуса $R = 10$ см, по которому течет постоянный ток I. При каком токе I кольцо начнет парить над сверхпроводником, если масса кольца $m = 1$ г?

Ответ. $I \geqslant c\sqrt{mgh/(2\pi R)} = 8{,}4 \cdot 10^{10}$ СГСЭ-ед. = 25 А.

7. На какой высоте h постоянный магнитик с магнитным моментом $\mathfrak{M} = 10^3$ Гс $\cdot$ см^3 и массой $m = 10$ г будет парить в горизонтальном положении над плоской горизонтальной поверхностью сверхпроводника I рода? Магнитик считать точечным диполем.

Указание. Применить метод зеркальных изображений. Воспользоваться выражением для взаимной потенциальной энергии двух точечных диполей.

Ответ. $h = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3\mathfrak{M}^2}{mg}\right)^{1/4} \approx 2{,}1$ см.

8. Шар радиуса a из сверхпроводника I рода внесен в постоянное однородное магнитное поле $\mathbf{B}_0$. Определить магнитное поле $\mathbf{B}$ вне шара, если поле $\mathbf{B}_0$ еще разрушает сверхпроводимость в шаре. Найти также поверхностную плотность тока сверхпроводимости r.

Решение. Введем предположение, оправдываемое последующим расчетом, что вне шара на однородное поле $\mathbf{B}_0$ накладывается поле точечного диполя $\mathfrak{M}$, помещенного в центре шара (рис. 187). Тогда

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \frac{3(\mathfrak{M}r)}{r^5}\, r - \frac{\mathfrak{M}}{r^3}. \qquad (80.8)$$

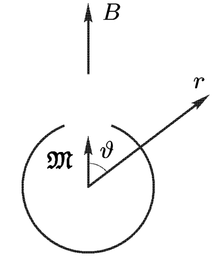


Рис. 187

Момент $\mathfrak{M}$ определится из условия, чтобы нормальная составляющая вектора $\mathbf{B}$ на поверхности шара обращалась в нуль:

$$\mathbf{B}_r = \mathbf{B}_0 \cos\vartheta + \frac{2\mathfrak{M}}{a^3}\cos\vartheta = 0.$$

Этому условию при любых значениях угла ϑ удовлетворяет

$$\mathfrak{M} = -\frac{a^3}{2}\,\mathbf{B}_0. \qquad (80.9)$$

На экваторе, т. е. при $r = a$, $\vartheta = 90^\circ$, получаем $\mathbf{B} = (3/2)\mathbf{B}_0$. Поверхностный ток сверхпроводимости течет вдоль параллелей $\vartheta = \text{const}$, причем по теореме о циркуляции $i = (3c/8\pi)B_0 \sin\vartheta$.

9. Бесконечно длинный цилиндр радиуса a из сверхпроводника I рода внесен в постоянное однородное магнитное поле $\mathbf{B}_0$, перпендикулярное к оси цилиндра. Определить магнитное поле $\mathbf{B}$ вне цилиндра, если поле $\mathbf{B}_0$ еще не разрушает сверхпроводимость в цилиндре. Найти также поверхностную плотность тока сверхпроводимости i.

Ответ.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 - \frac{2a^2(\mathbf{B}_0\mathbf{r})}{r^4}\,\mathbf{r} + \frac{a^2}{r^4}\,\mathbf{B}_0, \qquad (80.10)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, перпендикулярный к оси цилиндра, проведенный от оси к точке наблюдения. Поле на поверхности цилиндра максимально при $\vartheta = 90^\circ$ и равно $\mathbf{B} = 2\mathbf{B}_0$ (см. рис. 187). Поверхностный ток течет параллельно оси цилиндра, причем $i = (c/2\pi)B_0 \sin\vartheta$.

10. Сверхпроводящий шарик летит по направлению к соленоиду вдоль его оси. Поле в центре соленоида $B = 1000$ Гс. Какова должна быть начальная скорость v шарика, чтобы он смог пролететь через соленоид насквозь? Диаметр соленоида много больше диаметра шарика. Плотность материала шарика $\rho = 8$ г/см^3.

Решение. Пользуясь результатом решения задачи 8, легко показать, что потенциальная энергия в центре соленоида равна $\frac{1}{2}(\mathfrak{M}\mathbf{B}) = \frac{1}{4}B^2R^3$. Применяя далее уравнение энергии, находим

$$v \geqslant B\sqrt{3/(4\pi\rho)} \approx 170 \text{ см/с}.$$

11. Для получения сверхсильных магнитных полей в катушках применяются обмотки из сверхпроводников II рода. Концы обмоток (пока проволока находится в нормальном состоянии) присоединяются к источнику тока. Затем катушки охлаждаются до гелиевых температур и переходят в сверхпроводящее (или смешанное) состояние. После этого катушки отключаются от источника тока и замыкаются накоротко.

Сверхпроводящий короткозамкнутый многослойный соленоид с внутренним радиусом $a = 2$ см, наружным $b = 4$ см и длиной $l = 20$ см создает внутри поле $B_0 = 100$ кГс. Оценить количество жидкого гелия, которое испарится

при переходе соленоида из сверхпроводящего (или смешанного) в нормальное состояние. Теплота испарения гелия $q = 0{,}7$ кал/см^3.

Решение. Пренебрегаем краевыми эффектами. Ток в обмотке аппроксимируем током с постоянной объемной плотностью, что в оценочных вычислениях допустимо. Применяя теорему о циркуляции, находим магнитное поле B на различных расстояниях r от оси соленоида:

$$B = \begin{cases} B_0 & \text{при } r \leqslant a, \\ B_0(b-r)/(b-a) & \text{при } a \leqslant r \leqslant b. \end{cases}$$

После этого легко находится магнитная энергия W системы:

$$W = \frac{lB_0^2}{48}\,[3a(a+b) - b(b-a)] \approx 1{,}17 \cdot 10^{11} \text{ эрг} \approx 2{,}8 \cdot 10^3 \text{ кал}.$$

Количество испарившегося гелия $W/q \approx 4 \cdot 10^3$ см^3 $= 4$ л.

Глава IV

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

§ 81. Ток смещения

1. Основные уравнения электромагнитного поля в неподвижных средах, применимые не только к постоянным, но и к переменным электромагнитным полям, были установлены Максвеллом. К уравнениям Максвелла можно прийти путем последовательного обобщения опытных фактов. Надо решить, какие из полученных ранее уравнений могут быть сохранены, какие должны быть отброшены и какие надо обобщить. Есть один руководящий принцип, который позволяет продвинуться в этом направлении. Следует исключить из числа основных такие уравнения, в основе которых лежит представление о непосредственном действии на расстоянии. К ним относятся законы Кулона, Био и Савара и пр. Эти законы несовместимы с экспериментально подтвержденным представлением о конечной скорости распространения взаимодействий, а потому не могут оставаться верными во всех случаях. Можно сохранить только такие уравнения, которые не противоречат представлениям теории поля. Так мы и поступали во всем предшествовавшем изложении. Мы выдвинули в качестве гипотезы, что теорема Гаусса (13.4), уравнение (58.1) и закон электромагнитной индукции (66.1) являются общими законами электродинамики. То обстоятельство, что они удовлетворяют требованиям теории поля, следует из того, что их можно представить в дифференциальной форме (13.5), (58.2) и (66.4). К основным уравнениям электродинамики мы присоединим и закон сохранения электрического заряда. В дифференциальной форме он имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \qquad (81.1)$$

Если электромагнитное поле стационарно, то это уравнение переходит в

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \qquad (81.2)$$

2. Теорема о циркуляции

$$\oint\limits_L \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\, \mathbf{I} \qquad (81.3)$$

также может быть преобразована в дифференциальную форму:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\, \mathbf{j}, \qquad (81.4)$$

а потому удовлетворяет требованиям теории поля. Однако она не может входить в число основных уравнений электродинамики. Действительно, дивергенция всякого ротора тождественно равна нулю. Поэтому, взяв дивергенцию от обеих частей уравнения (81.4), получим $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$. Но это соотношение справедливо только для стационарных токов. В общем случае оно противоречит уравнению (81.1). Сомневаться в справедливости уравнения (81.1) нет оснований, так как оно выражает *закон сохранения электрического заряда.* Отсюда следует, что уравнения (81.3) и (81.4) могут быть верны только для стационарных токов. Для переменных электромагнитных полей они должны быть обобщены.

Чтобы прийти к обобщенным уравнениям, воспользуемся следующим наводящим рассуждением. Поскольку дивергенция левой части уравнения (81.4) тождественно равна нулю, в правой части этого уравнения должен стоять вектор, дивергенция которого также всегда равна нулю. В случае стационарных электромагнитных полей этот вектор должен переходить в $\mathbf{j}$. Легко указать вектор, удовлетворяющий этим условиям. Дифференцируя по времени соотношение $\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho$, получаем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} - \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\dot{\mathbf{D}} = 0,$$

или ввиду уравнения (81.1)

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi}\dot{\mathbf{D}}\right) = 0. \qquad (81.5)$$

Величину

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi}\dot{\mathbf{D}} \qquad (81.6)$$

Максвелл назвал *током* (точнее, *плотностью тока*) *смещения*, а сумму $\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{см}}$ — *полным током.* Таким образом,

$$\operatorname{div}(\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{см}}) = 0, \qquad (81.7)$$

т. е. *полный ток всегда соленоидален.* Поэтому противоречие с уравнением (81.1) устранится, если в уравнении (81.4) ток проводимости $\mathbf{j}$ заменить полным током, т. е. написать

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{см}}). \qquad (81.8)$$

Так и поступил Максвелл.

Приведенные рассуждения ни в какой мере не могут служить доказательством уравнения (81.8). На них следует смотреть только как на один из бесконечного множества способов устранения математического противоречия между уравнениями (81.1) и (81.4). А что таких способов бесконечно много, видно уже из того, что не возникает новых математических противоречий, если в правой части уравнения (81.8) добавить произвольный вектор, дивергенция которого равна нулю. Настоящим доказательством уравнения (81.8) могут служить только опытные факты, подтверждающие это уравнение.

3. К необходимости обобщения уравнений (81.3) и (81.4) можно прийти также с помощью других соображений. Приведем два примера.

Пример 1. Пусть в неограниченную однородную среду помещен металлический шар, которому сообщен электрический заряд Q (рис. 188). Если среда проводящая, то появятся электрические токи, текущие в радиальных направлениях. Они будут возбуждать магнитное поле. При попытке указать его направление возникает следующая трудность. Вектор $\mathbf{B}$ не может иметь радиальной составляющей. Система сферически симметрична. Если бы радиальная составляющая вектора $\mathbf{B}$ существовала, то она была бы одной и той же во всех точках всякой сферы S, концентрической с поверхностью шара. Радиальная составляющая $\mathbf{B}$ на сфере S была бы всюду направлена либо от центра, либо к центру шара. В обоих случаях поток вектора $\mathbf{B}$ через сферу S был бы отличен от нуля, что противоречит уравнению (58.1). Следовательно, вектор $\mathbf{B}$ должен быть перпендикулярен к радиусу, проведенному из центра шара к рассматриваемой точке. А это также невозможно, так как все направления, перпендикулярные к радиусу, ничем не выделены — все они совершенно равноправны. Единственная возможность, допускаемая симметрией шара, состоит в том, что векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ всюду должны равняться нулю. Но в таком случае должен равняться нулю и ток $\mathbf{j}$, как это непосредственно следует из уравнения (81.4). Значит, уравнение (81.4) и эквивалентное ему уравнение (81.3) в рассматриваемом случае не могут быть верными.

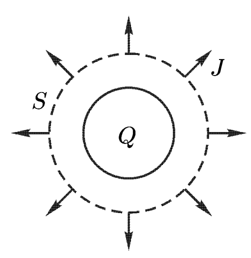


Рис. 188

Для устранения возникшего противоречия необходимо допустить, что магнитные поля возбуждаются не только токами проводимости, а еще чем-то. К току проводимости I надо что-то добавить, чтобы уничтожить возбуждаемое им магнитное поле. Эта добавка и есть ток смещения. Его значение $I_{\text{см}}$ определится из условия $I + I_{\text{см}} = 0$. Полный ток проводимости, текущий от заряженного шара, связан с зарядом Q соотношением $I = -dQ/dt$, а потому $I_{\text{см}} = dQ/dt$. По закону Кулона $Q = r^2 D$. Дифференцируя это выражение и разделив результат на поверхность сферы $4\pi r^2$, найдем плотность тока смещения:

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\dot{\mathbf{Q}}}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi}\dot{\mathbf{D}}.$$

Это выражение совпадает с (81.6).

4. Пример 2. Соединим проводом обкладки плоского заряженного конденсатора (рис. 189). По проводу потечет электрический ток. Допущение, что в этом случае применима формула (81.3), снова приводит к трудностям. Циркуляция вектора $\mathbf{H}$, стоящего в левой части уравнения (81.3), зависит только от формы и расположения контура L. Она — величина вполне определенная. Между тем ток I, стоящий в правой части того же уравнения, таким свойством не обладает. Для

определения I надо мысленно натянуть на контур L какую-то поверхность S и найти пронизывающий ее ток. Однако сила переменного тока может меняться вдоль провода. В этих случаях величина I будет зависеть от того, в каком месте поверхность S пересекается с проводом. С особой отчетливостью указанная неопределенность проявится, если поверхность S провести между обкладками конденсатора, нигде не пересекая провода. Тогда $I = 0$. Для устранения неопределенности к току I в уравнении (81.3) надо добавить какое-то слагаемое $I_{\text{см}}$, чтобы сумма $I + I_{\text{см}}$ не зависела от выбора вспомогательной поверхности S. Это слагаемое и есть ток смещения.

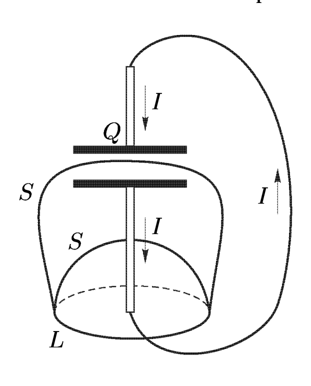


Рис. 189

Независимость полного тока $I + I_{\text{см}}$ от формы поверхности, натянутой на один и тот же контур L, эквивалентна утверждению, что полный ток через любую замкнутую поверхность всегда равен нулю. Токи, удовлетворяющие этому условию, не совсем удачно называются *замкнутыми.* Замкнутость токов не следует понимать в смысле замкнутости линий тока. Если линии тока замкнуты, то и сами токи также замкнуты. Обратное справедливо не всегда: линии тока в случае замкнутых токов не обязательно должны быть сами замкнутыми. Таким образом, формальное содержание гипотезы Максвелла сводится к утверждению, что *полные токи всегда замкнуты.* Токи проводимости, если они не замкнуты, замыкаются токами смещения.

Из условия замкнутости полного тока можно получить и выражения для тока смещения и его плотности. Обратимся снова к примеру с конденсатором. Идеализируя систему, можно сказать, что по проводу течет только ток проводимости, а через конденсатор — только ток смещения. Ток смещения дополняет ток проводимости до замкнутого тока. Поэтому ток проводимости в проводе должен быть равен току смещения в конденсаторе: $I_{\text{см}} = \dot{Q}$, где Q — заряд на той пластине конденсатора, к которой течет ток. Очевидно, $Q = S\sigma = SD/(4\pi)$. Дифференцируя по времени и разделив на S, снова получаем

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi}\dot{\mathbf{D}}.$$

Таким образом, тремя различными способами мы приходим к одному и тому же выражению для плотности тока смещения.

5. Токи смещения существуют только там, где меняется электрическое поле (точнее, электрическое смещение $\mathbf{D}$). Поэтому физическое содержание гипотезы Максвелла о токах смещения сводится к утверждению, что *переменные электрические поля являются источниками магнитных полей.* Это открытие принадлежит всецело Максвеллу.

Оно вполне аналогично открытию электромагнитной индукции, согласно которому переменные магнитные поля возбуждают поля электрические.

6. Ток смещения в диэлектрике состоит из двух существенно различных слагаемых. По определению вектора электрической индукции $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$, а потому

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi}\,\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{P}}. \tag{81.9}$$

Величина $\dot{\mathbf{P}}$ называется *плотностью тока поляризации.* Вектор поляризации определяется выражением $\mathbf{P} = \sum e_i\mathbf{r}_i$. Суммирование ведется по всем связанным зарядам, находящимся в единице объема вещества. Дифференцируя это выражение по времени, получим

$$\mathbf{j}_{\text{пол}} \equiv \dot{\mathbf{P}} = \sum e_i\mathbf{v}_i,$$

где $\mathbf{v}_i$ — скорость движения i-го заряда. Таким образом, *ток поляризации есть электрический ток, обусловленный движением связанных зарядов.* Последние принципиально ничем не отличаются от свободных зарядов. Поэтому нет ничего неожиданного в том, что токи поляризации возбуждают магнитное поле. Принципиально новое содержится в утверждении, что и вторая часть тока смещения $(1/4\pi)\dot{\mathbf{E}}$, которая не связана ни с каким движением зарядов, а обусловлена только изменениями электрического поля по времени, также является источником магнитного поля. *Даже в вакууме всякое изменение электрического поля во времени возбуждает в окружающем пространстве магнитное поле.* Открытие этого обстоятельства — наиболее существенный и решающий шаг, сделанный Максвеллом при построении своей электродинамики.

ЗАДАЧИ

1. Пространство между обкладками длинного цилиндрического конденсатора заполнено однородным диэлектриком со слабой электрической проводимостью. Когда конденсатор заряжен, в диэлектрике от одной обкладки к другой течет электрический ток. Пренебрегая краевыми эффектами, найти напряженность магнитного поля между обкладками.

Ответ. $H = 0$.

2. Заряженный и отключенный от источника электричества плоский конденсатор медленно разряжается объемными токами проводимости, возникающими в диэлектрике между обкладками из-за наличия слабой электрической проводимости. Пренебрегая краевыми эффектами, вычислить напряженность магнитного поля внутри конденсатора.

Решение. Если σ — поверхностная плотность электричества на положительной обкладке, то $D = 4\pi\sigma$ и, следовательно, $j_{\text{см}} = (1/4\pi)\dot{D} = \dot{\sigma}$. По закону сохранения электрического заряда $j = -\dot{\sigma}$. Следовательно, $j + j_{\text{см}} = j_{\text{полн}} = 0$. Магнитное поле в конденсаторе равно нулю.

3. Заряженный и отключенный от источника электричества плоский конденсатор, состоящий из двух одинаковых дисков радиуса R, пробивается электрической искрой вдоль своей оси. Считая разряд квазистационарным

и пренебрегая краевыми эффектами, вычислить мгновенное значение напряженности магнитного поля внутри конденсатора (в зависимости от расстояния r до его оси), если сила тока в электрической искре в рассматриваемый момент времени равна I.

Решение. В силу симметрии магнитные силовые линии будут коаксиальными окружностями с общей осью, совпадающей с осью конденсатора. Поле H найдется по формуле

$$\oint H\,dl = 2\pi r H = \frac{4\pi}{c}\,(I + i_{\text{см}}),$$

где $i_{\text{см}} = Ir^2/R^2$ — ток смещения, пронизывающий круг радиуса r. В результате получим

$$H = \frac{2I}{cr}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

4. Плоский конденсатор состоит из двух одинаковых металлических дисков, пространство между которыми заполнено однородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε. Расстояние между внутренними поверхностями дисков равно d. Между обкладками конденсатора поддерживается переменное напряжение $V = V_0 \sin \omega t$. Пренебрегая краевыми эффектами, найти магнитное поле в пространстве между обкладками конденсатора.

Ответ. $H = \dfrac{\varepsilon\omega r}{2cd} V_0 \cos \omega t$, где r — расстояние от оси конденсатора. Магнитные силовые линии имеют форму коаксиальных окружностей с общей осью, совпадающей с осью конденсатора.

§ 82. Система уравнений Максвелла

1. Дополнив основные факты из области электромагнетизма установлением магнитных действий токов смещения, Максвелл смог написать *систему фундаментальных уравнений электродинамики.* Таких уравнений четыре. В интегральной форме они имеют вид

$$\oint_L \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\int_S \left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) d\mathbf{S}, \tag{82.1}$$

$$\oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,d\mathbf{S}, \tag{82.2}$$

$$\oint_S (\mathbf{D}\,d\mathbf{S}) = 4\pi \int \rho\,dV, \tag{82.3}$$

$$\oint_S (\mathbf{B}\,d\mathbf{S}) = 0. \tag{82.4}$$

В дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{82.1a}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \tag{82.2a}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho, \tag{82.3a}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \tag{82.4a}$$

В число фундаментальных не включено уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения электрического заряда, так как это уравнение является следствием уравнений (82.1) и (82.3). Действительно, возьмем бесконечно малый контур L, натянем на него произвольную конечную поверхность S, а затем стянем этот контур в точку, оставляя поверхность S конечной. В пределе циркуляция $\oint \mathbf{H}\,d\mathbf{l}$ обратится в нуль, S превратится в замкнутую поверхность, а уравнение (82.1) перейдет в

$$\oint\left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi}\,\dot{\mathbf{D}}\right)\,d\mathbf{S} = 0.$$

Интеграл $\oint (\mathbf{j}\,d\mathbf{S})$ есть ток I, вытекающий из объема V, ограниченного поверхностью S. Кроме того, записав уравнение (82.3) в виде

$$\oint (\mathbf{D}\,d\mathbf{S}) = 4\pi q$$

и дифференцируя его по времени, получим

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\oint (\dot{\mathbf{D}}\,d\mathbf{S}).$$

В результате получится уравнение

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -I,$$

выражающее закон сохранения электрического заряда. Тот же закон можно получить из дифференциальных уравнений (82.1a) и (82.3a). Достаточно взять дивергенцию от обеих частей уравнения (82.2a) и воспользоваться уравнением (82.3a). Тогда получится уравнение (81.1).

Уравнения Максвелла показывают, что *источниками электрического поля могут быть либо электрические заряды, либо магнитные поля, меняющиеся во времени. Магнитные же поля могут возбуждаться либо движущимися электрическими зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями.* Уравнения не симметричны относительно электрического и магнитного полей. Это связано с тем, что в природе существуют электрические заряды, но, насколько известно в настоящее время, нет зарядов магнитных. Стремление достигнуть симметрии уравнений электродинамики заставило Дирака выдвинуть гипотезу о существовании магнитных зарядов — *единичных магнитных полюсов*, или *монополей.* Логических возражений против такой гипотезы нет. Если бы она оправдалась, то потребовалось бы обобщение уравнений Максвелла. К источникам магнитного поля добавились бы магнитные заряды, а к источникам электрического поля — магнитные токи, обусловленные движением

таких зарядов. Справедливость же самих уравнений Максвелла была бы ограничена теми областями пространства, в которых нет магнитных зарядов и магнитных токов. Однако многочисленные попытки экспериментально обнаружить магнитные монополи не привели к положительному результату.

2. Уравнения Максвелла в интегральной форме справедливы и в тех случаях, когда существуют *поверхности разрыва*, на которых свойства среды или напряженности электрического и магнитного полей меняются скачкообразно. Поэтому в этой форме уравнения Максвелла обладают большей общностью, чем в дифференциальной форме, которая предполагает, что все величины в пространстве и во времени меняются непрерывно. Можно, однако, достигнуть полной математической эквивалентности обеих форм уравнений Максвелла. Для этого надо дифференциальные уравнения дополнить *граничными условиями*, которым должно удовлетворять электромагнитное поле на границе раздела двух сред. Эти условия содержатся в интегральной форме уравнений Максвелла. Они были выведены в соответствующих местах курса и имеют вид

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma, \tag{82.5}$$

$$B_{1n} = B_{2n}, \tag{82.6}$$

$$E_{1t} = E_{2t}, \tag{82.7}$$

$$[\mathbf{nH}_2] - [\mathbf{nH}_1] = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{i}. \tag{82.8}$$

Здесь σ — поверхностная плотность электрических зарядов, а $\mathbf{i}$ — поверхностная плотность тока проводимости на рассматриваемой границе раздела. В частном случае, когда поверхностных токов нет, последнее условие переходит в

$$H_{1t} = H_{2t}. \tag{82.9}$$

Подчеркнем еще раз, что рассуждения, с помощью которых мы пришли к уравнениям Максвелла, ни в коей мере не могут служить их доказательством. Существенно новые принципы никогда не содержатся в старой теории и не могут быть выведены из нее логически. В этом смысле нельзя вывести и уравнения Максвелла. На них следует смотреть как на *основные аксиомы электродинамики*, *полученные путем обобщения опытных фактов.*

3. Фундаментальные уравнения Максвелла в форме (82.1)–(82.4) или (82.1а)–(82.4а) не составляют еще полной системы уравнений электромагнитного поля. Среди них два уравнения векторных и два скалярных. Если их записать в координатной форме, то получится всего восемь уравнений, связывающих 16 величин: пятнадцать составляющих векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{j}$ и скаляр ρ. Ясно, что для 16 величин восьми уравнений недостаточно. Фундаментальные уравнения Максвелла не содержат никаких постоянных, характеризующих свойства среды, в которой возбуждено электромагнитное поле. Необходимо дополнить эти

уравнения такими соотношениями, в которые входили бы величины, характеризующие индивидуальные свойства среды. Эти соотношения называются *материальными уравнениями.*

Принципиальный способ получения материальных уравнений дают молекулярные теории поляризации, намагничивания и электрической проводимости среды. В основе таких теорий лежат какие-то идеализированные модели среды. Применяя к ним уравнения классической или квантовой механики, а также методы статистической физики, можно установить связь между векторами $\mathbf{P}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{j}$, с одной стороны, и векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ — с другой. Таким путем, в зависимости от характера среды и электромагнитного поля, получаются более или менее сложные соотношения, которые и дополняют фундаментальные уравнения Максвелла до полной системы уравнений электродинамики.

Наиболее просты материальные уравнения в случае слабых электромагнитных полей, сравнительно медленно меняющихся в пространстве и во времени. В этом случае для изотропных неферромагнитных и несегнетоэлектрических сред материальные уравнения могут быть записаны в виде

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \tag{82.10}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \tag{82.11}$$

$$\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}, \tag{82.12}$$

где ε, μ, λ — постоянные, характеризующие электромагнитные свойства среды. Они называются *диэлектрической* и *магнитной проницаемостью* и *электрической проводимостью среды.* Такими материальными уравнениями пользовался сам Максвелл. Разумеется, он не связывал величины ε, μ, λ с атомными и молекулярными константами вещества, а рассматривал их как постоянные, вводимые в теорию *феноменологически.* Электронная теория показала, что справедливость таких материальных уравнений связана с выполнением двух условий. Во-первых, за времена порядка собственных периодов внутриатомных и внутримолекулярных колебаний электромагнитное поле должно меняться мало. Во-вторых, поле должно меняться мало на протяжении межатомных и межмолекулярных расстояний. Это и есть та «медленность» изменения полей, о которой говорилось выше.

Иногда уравнения (82.10)–(82.12) также включают в систему уравнений Максвелла. Мы не будем этого делать, так как эти уравнения не обладают той общностью и фундаментальностью, которая свойственна уравнениям Максвелла. Под уравнениями Максвелла мы будем понимать только четыре уравнения: (82.1)–(82.4) или (82.1а)–(82.4а).

Когда поля стационарны ($\partial\mathbf{D}/\partial t = \partial\mathbf{B}/\partial t = 0$), уравнения Максвелла распадаются на две группы независимых уравнений. Первую группу составляют уравнения электростатики

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho, \tag{82.13}$$

вторую — уравнения магнитостатики

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \tag{82.14}$$

В этом случае электрическое и магнитное поля независимы друг от друга. Источниками электрического поля будут только электрические заряды, источниками магнитного поля — только токи проводимости.

§ 83. Скорость распространения электромагнитных возмущений

1. Из уравнений максвелловской электродинамики следует существование принципиально нового физического явления, предсказанного самим Максвеллом. Это — *электромагнитные волны*, или *возмущения*, распространяющиеся в пространстве с определенной скоростью. Убедимся в этом на простейшем примере. Рассмотрим бесконечно протяженную однородную диэлектрическую среду с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε и μ. Поместим в нее бесконечную равномерно заряженную плоскость, которую примем за координатную плоскость XY (рис. 190). Пока плоскость вместе с зарядами на ней неподвижна, электрическое поле в окружающем пространстве будет нормально к плоскости и равно $E = 2\pi\sigma/\varepsilon$, как это следует из теоремы Гаусса и соображений симметрии (σ — поверхностная плотность заряда, см. § 6 и 13). Приведем теперь плоскость вместе с зарядами на ней в движение в направлении оси X с произвольно меняющейся скоростью. Тогда, как будет показано ниже, появится магнитное поле и поперечная составляющая электрического поля, т. е. составляющая, параллельная заряженной плоскости. Это — *переменные поля*, которые и будут интересовать нас в настоящем параграфе. Что касается нормальной составляющей вектора $\mathbf{E}$, то она останется без изменений, так как рассуждения, с помощью которых была получена формула (6.1), сохраняют силу и в рассматриваемом случае, если только величину E заменить на D_n. Нормальная составляющая вектора $\mathbf{E}$ есть просто статическое электрическое поле заряженной плоскости, накладывающееся на переменное электромагнитное поле движущихся зарядов. Так как статическое поле нас не интересует, то можно совсем не обращать внимания на наличие нормальной составляющей поля $\mathbf{E}$, что мы и будем делать. Можно было бы совсем избавиться от нормальной составляющей, поместив бесконечно близко от заряженной плоскости вторую такую же неподвижную плоскость, заряженную противоположно. Электрическое поле такой плоскости было бы чисто статическим и уничтожило бы нормальную составляющую,

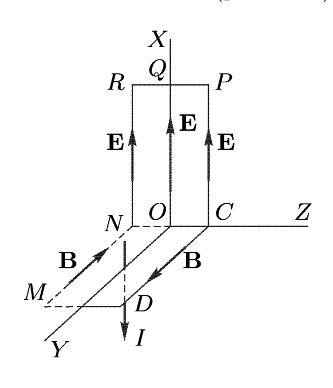


Рис. 190

о которой мы говорили. В то же время новая заряженная плоскость, поскольку заряды на ней неподвижны, не оказала бы никакого влияния на переменное поле электромагнитной волны.

2. Исследуем теперь, какое электромагнитное поле возбуждается заряженной плоскостью *благодаря ее движению.* Заряды, движущиеся вместе с плоскостью, эквивалентны электрическому току I, текущему параллельно оси X (на рис. 190 ток течет в отрицательном направлении оси X). Электрический ток возбуждает магнитное поле, силовые линии которого обвиваются вокруг тока. В случае поверхностного тока, текущего по бесконечной плоскости, магнитное поле будет параллельно оси Y: при $z > 0$ оно направлено в положительную, а при $z < 0$ — в отрицательную сторону оси Y. В силу симметрии магнитные поля по разные стороны заряженной плоскости на одинаковых расстояниях от нее одинаковы по абсолютной величине, но противоположны по направлению. При переходе через заряженную плоскость магнитное поле, в согласии с формулой (82.8), испытывает скачок непрерывности, связанный с поверхностным током.

Магнитные потоки через прямоугольные, симметрично расположенные неподвижные контуры $OCPQ$ и $NOQR$ одинаковы по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Так как эти потоки меняются во времени, то по закону электромагнитной индукции возникнет электрическое поле, циркуляция которого вдоль рассматриваемых контуров отлична от нуля. Электрическое поле будет параллельно оси X, так как вдоль оси Z, как выяснено выше, переменное электрическое поле не возбуждается, а электрического поля вдоль оси Y не будет в силу симметрии. Так как магнитный поток через контур $NCPR$ равен нулю, то будет равна нулю и циркуляция вектора $\mathbf{E}$ по тому же контуру. Отсюда следует, что переменное электрическое поле по разные стороны заряженной плоскости на одинаковых расстояниях от нее будет одинаково не только по величине, но и по направлению. На самой плоскости поле $\mathbf{E}$, вообще говоря, будет иметь другое значение. В противном случае циркуляции вектора $\mathbf{E}$ по контурам $OCPQ$ и $NOQR$ обратились бы в нуль, а, следовательно, магнитные потоки, пронизывающие эти контуры, все время оставались бы постоянными.

Электрическое поле $\mathbf{E}$, возбужденное переменным магнитным полем, в свою очередь создаст переменный электрический поток (поток вектора $\mathbf{D}$) через прямоугольный контур $CNMD$ (см. рис. 190). Иначе говоря, возникнет ток смещения, который также будет возбуждать магнитное поле, параллельное оси Y. Направление этого магнитного поля определяется правилом Ленца: оно будет препятствовать всяким изменениям уже существующего магнитного поля. Если остановить заряженную плоскость, то ток I прекратится. Однако возбужденное им электромагнитное поле останется. Электрическое и магнитное поля будут взаимно поддерживать друг друга: всякое изменение магнитного поля возбуждает поле электрическое, и наоборот. Таким образом, по разные стороны заряженной плоскости после ее остановки останутся

два электромагнитных поля, симметрично расположенных относительно этой плоскости. Как будет показано ниже, они не останутся на месте, а будут распространяться от заряженной плоскости в противоположных направлениях. Это и есть *электромагнитные волны*, или *электромагнитные возмущения.* Из предыдущего следует, что они поперечны как относительно вектора **E**, так и относительно вектора **B**.

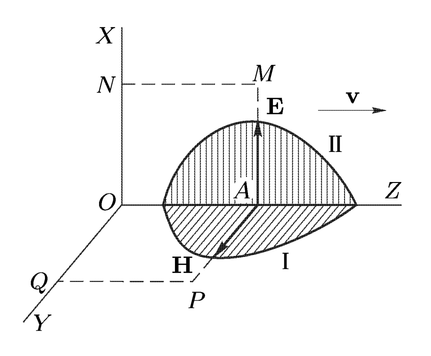


Рис. 191

3. Возьмем одно из этих возмущений, например возмущение, расположенное справа от заряженной плоскости (рис. 191). Электрическое поле в рассматриваемый момент представлено кривой I, расположенной в вертикальной плоскости, а магнитное поле — кривой II, расположенной в горизонтальной плоскости. Введем предположение, оправдываемое последующими расчетами, что эта картина электромагнитного поля без изменения формы перемещается вправо с какой-то скоростью **v**. Возьмем два неподвижных прямоугольных контура $OAMN$ и $OQPA$ и запишем уравнения Максвелла в виде

$$\oint\limits_{OAMN} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_{\text{м}}}{\partial t}, \qquad \oint\limits_{OQPA} \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_{\text{эл}}}{\partial t},$$

где $\Phi_{\text{м}}$ — магнитный поток, а $\Phi_{\text{эл}}$ — поток вектора **D** через соответствующие контуры. Возьмем для простоты длину стороны AM равной единице. Тогда, так как на контуре $OAMN$ поле **E** отлично от нуля только на стороне AM, первое из этих уравнений принимает вид

$$E \equiv E_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_{\text{м}}}{\partial t}.$$

Аналогично, второе уравнение преобразуется к виду

$$H \equiv H_y = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_{\text{эл}}}{\partial t}.$$

Согласно нашему предположению, за время dt электромагнитное поле переместится на расстояние $v\,dt$. Магнитный поток $vB\,dt$ выйдет за пределы контура $OAMN$, а электрический поток $vD\,dt$ — за пределы контура $OQPA$. Вследствие этого потоки $\Phi_{\text{м}}$ и $\Phi_{\text{эл}}$ через указанные контуры изменятся на $d\Phi_{\text{м}} = -vB\,dt$, $d\Phi_{\text{эл}} = -vD\,dt$. Отсюда $\partial\Phi_{\text{м}}/\partial t = -vB$, $\partial\Phi_{\text{эл}}/\partial t = -vD$, и из предыдущих уравнений получаем

$$E = \frac{v}{c}B, \quad H = \frac{v}{c}D. \qquad (83.1)$$

До сих пор не были использованы материальные уравнения $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. Если их принять во внимание, то можно исключить D и B.

Это дает

$$E = \frac{v}{c}\,\mu H, \quad H = \frac{v}{c}\varepsilon E. \tag{83.1a}$$

Отсюда

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{83.2}$$

Для скорости v получилось вполне определенное конечное выражение, отличное от нуля. Это оправдывает введенное выше допущение о характере изменения электромагнитного возмущения во времени и пространстве. Действительно, предположив, что электромагнитное возмущение распространяется без изменения формы, мы не фиксировали скорость этого распространения, а определили ее из требования, чтобы возмущение удовлетворяло уравнениям Максвелла. Это возможно только тогда, когда v определяется выражением (83.2). Возмущение не может стоять на месте, так как тогда величина v была бы равна нулю. Оно не может распространяться и мгновенно, так как тогда наше рассуждение привело бы к результату $v = \infty$. Таким образом, уравнения Максвелла допускают решения в виде электромагнитных возмущений, распространяющихся со скоростью $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

4. Формулы (83.1) можно представить в векторной форме:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\,[\mathbf{vB}], \quad \mathbf{H} = \frac{1}{c}\,[\mathbf{vD}]. \tag{83.3}$$

Здесь $\mathbf{v}$ дает не только скорость распространения возмущения по величине, но и ее направление. Те же самые соотношения справедливы и для возмущения, распространяющегося влево. В обоих случаях векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{v}$ находятся в правовинтовом соотношении между собой (рис. 192). Если изменить направление одного из векторов $\mathbf{E}$ или $\mathbf{B}$ на противоположное, то направление распространения возмущения также изменится на противоположное.

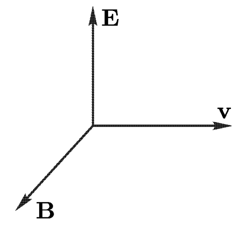


Рис. 192

Формулы (83.3) описывают так называемое *плоское возмущение*, т. е. такое возмущение, в котором электромагнитное поле одно и то же во всех точках плоскости, перпендикулярной к его распространению (эта плоскость называется *фронтом волны*). Для более полной характеристики его называют также *бегущим возмущением* (или *бегущей волной*), поскольку оно распространяется только в одном направлении. В нашем примере электрический вектор был параллелен оси X, а магнитный — оси Y. Конечно, возможно и возмущение с электрическим вектором вдоль оси Y и магнитным вдоль оси X. Ввиду линейности и однородности уравнений Максвелла суперпозиция таких возмущений будет также решением этих уравнений. Эта суперпозиция представляет также *плоскую бегущую электромагнитную волну*, для которой справедливы соотношения (83.3).

Электрический и магнитный векторы в такой волне всегда перпендикулярны между собой, а также к направлению ее распространения. Однако не обязательно, чтобы электрический вектор все время лежал в одной и той же плоскости, его направление в пространстве может изменяться. То же относится и к магнитному вектору. В частном случае, когда электрический (а следовательно, и магнитный) вектор во всех точках пространства лежит в одной плоскости, волна называется *линейно поляризованной.*

5. Рассмотренный нами мысленный пример возбуждения электромагнитных волн наиболее прост в теоретическом отношении. Совсем не обязательно брать бесконечную заряженную плоскость и приводить ее в движение. Мы поступили так только потому, чтобы возмущение получилось плоским. Для возбуждения же электромагнитных волн существенно только наличие *электрических зарядов, движущихся ускоренно.* В передающих радиостанциях электромагнитные волны возбуждаются быстропеременными электрическими токами, текущими по системе проводов (в антеннах). Волны, возбуждаемые таким образом, конечно, не будут плоскими. Только на больших расстояниях от излучающей антенны небольшие участки таких волн могут рассматриваться как приблизительно плоские. Вот почему на примере плоских возмущений выявляются все наиболее важные особенности электромагнитных волн.

6. Из формул (83.1a) следует

$$\varepsilon E^2 = \mu H^2. \tag{83.4}$$

Это означает, что *в бегущей плоской электромагнитной волне электрическая энергия в любой момент равна магнитной.* Аналогичное положение имеет место в случае упругой бегущей волны, где полная энергия также распределяется поровну между кинетической и потенциальной (см. т. I, § 82). Таким свойством обладают все возмущения, подчиняющиеся *принципу суперпозиции.* Для электромагнитных волн это свойство можно было бы доказать тем же методом, каким оно было получено для упругих волн в механике (см. т. I, § 82, п. 2). Надо только рассмотреть возмущения, получающиеся из начального состояния, в котором отлично от нуля либо только электрическое, либо только магнитное поле.

7. В вакууме $\varepsilon = \mu = 1$, и формула (83.2) дает $v = c$. Опыты Вильгельма Вебера (1804–1891) и Рудольфа Кольрауша (1809–1858) по измерению электродинамической постоянной c, а также все последующие измерения показали, что *электродинамическая постоянная равна скорости света в вакууме.* Таким образом, *в вакууме электромагнитные волны должны распространяться со скоростью света.* Это обстоятельство, по-видимому, навело Максвелла на мысль об электромагнитной теории света. Согласно этой теории *свет есть частный случай электромагнитных волн.* От всех остальных электромагнитных волн свет отличается только количественно — длиной волны. Сам Максвелл не предпринял попыток получить электромагнитные волны

на опыте, хотя он и был не только величайшим теоретиком, но и первоклассным экспериментатором. Максвеллу не суждено было дожить до экспериментального подтверждения своего открытия, он умер в 1879 г. в возрасте 48 лет. На опыте электромагнитные волны впервые были получены Герцем в 1887–1888 гг. Он показал, что электромагнитные волны распространяются, отражаются, преломляются, огибают препятствия, интерферируют. Он измерил скорость распространения электромагнитных волн и показал, что их свойства правильно описываются уравнениями Максвелла. Начиная с этого момента, теория Максвелла быстро получила всеобщее признание. (Опыты Герца будут описаны в § 142 после того, как мы познакомимся с переменными токами и электромагнитными колебаниями.) Открытие Максвелла и Герца вскоре привело к изобретению радио А.С. Поповым (1859–1906).

8. Уравнение Ньютона $md^2r/dt^2 = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ в случае консервативных сил не меняется, если изменить знак времени, т. е. заменить t на $-t$. С этой симметрией уравнений механики связано следующее свойство консервативных систем. *Если в некоторый момент времени изменить на противоположные направления скоростей всех материальных точек замкнутой консервативной системы, то система повторит свое движение в обратном порядке.*

Аналогичной симметрией обладают и уравнения Максвелла в непроводящих (непоглощающих) средах. Действительно, в таких средах уравнения Максвелла (с учетом материальных уравнений) записываются в виде

$$\operatorname{rot}\frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad (83.5)$$
$$\operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0.$$

Если в этих уравнениях изменить знаки у времени t и вектора $\mathbf{B}$, то они перейдут в

$$\operatorname{rot}\left(\frac{-\mathbf{B}}{\mu}\right) = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial(-t)}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial(-\mathbf{B})}{\partial(-t)}, \qquad (83.6)$$
$$\operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0.$$

т. е. в уравнения, тождественные с исходными уравнениями (83.5). Таким образом, *уравнения Максвелла в непроводящих средах не меняются при одновременном изменении знаков у t и $\mathbf{B}$. То же самое имеет место при одновременном изменении знаков у t и $\mathbf{E}$.*

Возьмем теперь произвольное решение уравнений (83.5):

$$\mathbf{E}(t,\mathbf{r}) = \mathbf{F}(t,\mathbf{r}), \quad \mathbf{B}(t,\mathbf{r}) = \boldsymbol{\Phi}(t,\mathbf{r}). \qquad (83.7)$$

Тогда

$$\mathbf{E}_1(t,\mathbf{r}) = \mathbf{F}(-t,\mathbf{r}), \quad \mathbf{B}_1(t,\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\Phi}(-t,\mathbf{r}) \qquad (83.8)$$

будет также решением тех же уравнений, так как оно удовлетворяет уравнениям (83.6), тождественным с уравнениями (83.5). Заданием

во всем пространстве векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в начальный (произвольно выбранный) момент времени $t = 0$ решение системы уравнений (83.5) определяется однозначно. Решение (83.7) удовлетворяет начальным условиям

$$\mathbf{E}_{t=0} = \mathbf{F}(0, \mathbf{r}), \quad \mathbf{B}_{t=0} = \boldsymbol{\Phi}(0, \mathbf{r}),$$

а решение (83.8) — начальным условиям

$$\mathbf{E}_{1,t=0} = \mathbf{F}(0, \mathbf{r}), \quad \mathbf{B}_{1,t=0} = -\boldsymbol{\Phi}(0, \mathbf{r}).$$

Эти решения, очевидно, связаны соотношениями

$$\mathbf{E}_1(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(-t, \mathbf{r}), \quad \mathbf{B}_1(t, \mathbf{r}) = -\mathbf{B}(-t, \mathbf{r}),$$

выражающими следующий результат. *Если в некоторый момент времени изменить на противоположное направление магнитного вектора во всех точках пространства, то при отсутствии проводящих тел электромагнитное поле повторит свою историю в обратном порядке, с той только разницей, что вектор* $\mathbf{B}$ *в соответствующие моменты времени будет направлен противоположно по сравнению с его направлением в исходном процессе.*

§ 84. Энергия и поток энергии

1. Уравнения Максвелла необходимо дополнить соотношениями, выражающими закон сохранения энергии. Пусть среда, в которой возбуждается электромагнитное поле, неподвижна. При изменении электромагнитного поля и прохождении электрического тока в единице объема совершается элементарная внешняя работа

$$\delta A^{\text{внеш}} = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{E}\,d\mathbf{D} + \mathbf{H}\,d\mathbf{B}) + (\mathbf{jE})\,dt. \tag{84.1}$$

Отдельные слагаемые этого выражения были получены в электростатике и в учении о магнитных полях постоянных токов. Отметим особо, что при получении работы намагничивания $(1/4\pi)\mathbf{H}\,d\mathbf{B}$ была использована теорема о циркуляции без учета тока смещения. Однако это не обязательно должно отразиться на общности окончательного результата $(1/4\pi)\mathbf{H}\,d\mathbf{B}$, так как и исходное выражение для элементарной работы (69.1) получено также без учета тока смещения. Поэтому отмеченное обстоятельство не препятствует распространению выражения (84.1) и на случай переменных электромагнитных полей. Выражение (84.1) должно рассматриваться как один из постулатов макроскопической теории электричества.

2. Работа (84.1) идет на приращение внутренней энергии за вычетом теплоты, уходящей из единицы объема среды вследствие теплопроводности. От теплопроводности можно отвлечься, предполагая, что она равна нулю. Это не сказывается на общности окончательного результата. Таким образом, если u — внутренняя энергия единицы объема

среды, то $\delta A^{\text{внеш}} = du$, или

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{B}}) + (\mathbf{jE}). \tag{84.2}$$

Под u мы понимаем плотность *всей* внутренней энергии, а не только электромагнитную часть ее. Поэтому уравнение (84.2) справедливо для любых сред, в том числе ферромагнитных и сегнетоэлектрических. Оно учитывает не только джоулево тепло (слагаемое $\mathbf{jE}$), но и тепло ферромагнитного и диэлектрического гистерезиса. Используя уравнения Максвелла (82.1а) и (82.2а), преобразуем правую часть уравнения (84.2) к виду

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{4\pi}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{j}\right) + \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\dot{\mathbf{B}} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H} - \mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E}).$$

В силу известного векторного тождества

$$\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H} - \mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\operatorname{div}[\mathbf{EH}].$$

Поэтому, если ввести обозначение

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}], \tag{84.3}$$

то уравнение (84.2) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{S} = 0. \tag{84.4}$$

Для физической интерпретации этого уравнения сравним его с уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \tag{84.5}$$

в котором ρ означает плотность вещества или электричества, а $\mathbf{j}$ — плотность потока вещества или электрического тока.

Формальная аналогия между уравнениями (84.4) и (84.5) приводит к представлению, что энергия течет в пространстве подобно жидкости, причем вектор $\mathbf{S}$ играет роль *плотности потока электромагнитной энергии.* Математически это представление выражается более наглядно и непосредственно, если уравнение (84.4) записать в интегральной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V u\,dV = \oint S_n\,dF, \tag{84.4a}$$

где V — произвольный объем среды, ограниченный замкнутой поверхностью F, а $\mathbf{n}$ — внутренняя нормаль к этой поверхности. В такой форме уравнение означает, что приращение внутренней энергии в объеме V происходит за счет электромагнитной энергии, втекающей в этот объем из окружающего пространства через поверхность F.

Представление о течении энергии сохраняется также при учете теплопроводности и упругих свойств среды, но к плотности потока

электромагнитной энергии в этом случае надо добавить *плотность потока теплоты* и *плотность упругой энергии.*

Общее представление о потоке энергии в пространстве впервые было введено Н. А. Умовым (1846–1915) в 1874 г. Поэтому вектор плотности потока энергии без конкретизации ее физической природы называется *вектором Умова.* Конкретные выражения для этого вектора были получены Умовым, естественно, только для упругих сред и вязких жидкостей. Через 11 лет идеи Умова были разработаны Пойнтингом (1852–1914) применительно к электромагнитной энергии. Пойнтингом было получено и выражение (84.3), а потому вектор **S** называется *вектором Пойнтинга.* Формула (84.4), или (84.4а), выражает закон сохранения энергии в электродинамике и носит название *теоремы Умова–Пойнтинга.* Отметим замечательную простоту и общность формулы (84.3). Вектор Пойнтинга выражается только через напряженности полей **E** и **H** и не содержит никаких величин, характеризующих индивидуальные свойства среды, в которой течет электромагнитная энергия.

3. Допустим теперь, что нет гистерезиса. Тогда вектор **D** будет однозначной функцией вектора **E**, а вектор **B** — однозначной функцией вектора **H**. Теплоты гистерезиса не будет, и элементарная работа $\delta A^{\text{внеш}}$ пойдет только на выделение джоулева тепла $(\mathbf{jE})\,dt$ и на приращение электромагнитной энергии. Поэтому в соответствии с формулой (84.1) выражение

$$dw = \frac{1}{4\pi}\,(\mathbf{E}\,d\mathbf{D} + \mathbf{H}\,d\mathbf{B}) \tag{84.6}$$

должно быть истолковано как приращение плотности электромагнитной энергии w. Сама величина w представится интегралом

$$w = \frac{1}{4\pi}\int(\mathbf{E}\,d\mathbf{D} + \mathbf{H}\,d\mathbf{B}). \tag{84.7}$$

В частном случае, когда справедливы соотношения $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, отсюда получаем

$$w = \frac{1}{8\pi}\,(\varepsilon E^2 + \mu H^2), \tag{84.8}$$

или

$$w = \frac{1}{8\pi}\,(\mathbf{ED} + \mathbf{HB}). \tag{84.9}$$

4. Приведем примеры на течение электромагнитной энергии.

Пример 1. Поток энергии в плоской электромагнитной волне (см. рис. 192). Поскольку волна распространяется в одном направлении, электромагнитная энергия должна распространяться в том же направлении. Поток энергии численно равен количеству энергии, переносимому в одну секунду через квадратный сантиметр, перпендикулярный к направлению распространения волны. Если v — скорость распространения волны, то $S = vw$. Согласно соотношению (83.4) в плоской бегущей волне плотность электрической энергии равна плотности магнитной, а потому $w = (\varepsilon/4\pi)E^2$. В силу того же соотношения $\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H$. Поэтому $w = (1/4\pi)\sqrt{\varepsilon\mu}EH$. Если учесть еще

формулу (83.2), то получится

$$S = vw = \frac{c}{4\pi} EH.$$

Так как волна распространяется в направлении вектора $[\mathbf{EH}]$, то это выражение совпадает с выражением (84.3).

Пример 2. Выделение джоулева тепла в проводе. По цилиндрическому проводу радиуса r течет постоянный ток I (рис. 193). Магнитное поле обвивается вокруг тока и на поверхности провода равно $H = 2I/(cr) = 2j\pi r/c$. Электрическое поле $\mathbf{E}$ параллельно оси провода. Таким образом, вектор Пойнтинга $\mathbf{S}$ направлен внутрь провода нормально к его боковой поверхности. Следовательно, электромагнитная энергия втекает внутрь провода из окружающего пространства. Площадь боковой поверхности провода равна $2\pi rl$, где l — его длина. Количество электромагнитной энергии, ежесекундно вступающей в провод, будет

$$S \cdot 2\pi rl = \frac{c}{4\pi} EH \cdot 2\pi rl = \pi r^2 ljE = VjE,$$

где $V = \pi r^2 l$ — объем провода. Но такое же количество теплоты выделяется в проводе при прохождении электрического тока. Таким образом, *электромагнитная энергия из окружающего пространства вступает внутрь провода и в нем превращается в джоулево тепло.*

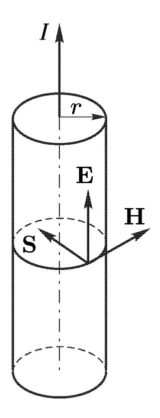


Рис. 193

Пример 3. Зарядка конденсатора. Допустим, что конденсатор плоский с круговыми обкладками, а зарядка производится квазистатически. Отвлечемся от неоднородностей электромагнитного поля вблизи краев конденсатора. Тогда расчет производится так же, как в предыдущем примере. Надо только плотность тока проводимости $\mathbf{j}$ заменить на плотность тока смещения $\dot{\mathbf{D}}/(4\pi)$. Сделав это, найдем, что из окружающего пространства ежесекундно в конденсатор втекает электромагнитная энергия $(V/4\pi)(\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}})$, где V — объем конденсатора. Приращение энергии конденсатора за время dt будет

$$dW = \frac{V}{4\pi} (\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}})\, dt = \frac{V}{4\pi} (\mathbf{E}\, d\mathbf{D}).$$

Интегрируя это выражение в предположении, что справедливо соотношение $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, получим

$$W = \frac{V}{8\pi} (\mathbf{ED}).$$

Рассуждение существенно не изменится, если принять во внимание неоднородности электрического и магнитного полей вблизи краев конденсатора. Вблизи краев у поля $\mathbf{E}$ имеется радиальная слагающая, а у поля $\mathbf{H}$ — слагающая, параллельная оси конденсатора. Это приводит к появлению дополнительных потоков энергии, параллельных оси

конденсатора. Однако, ввиду симметрии, поток энергии, направленный вверх, будет компенсирован потоком, направленным вниз. Поэтому полный поток энергии, вступающей в конденсатор, определяется только осевой слагающей вектора **E** и азимутальной слагающей вектора **H**. Если пренебречь изменениями этих слагающих вблизи краев конденсатора, то получится результат, найденный выше.

Таким же путем можно получить выражение для магнитной энергии соленоида, по которому течет постоянный ток. Это рекомендуется сделать читателю.

5. Относительно приведенного вывода выражения для плотности потока электромагнитной энергии необходимо сделать следующее принципиальное замечание. Уравнения (84.4) и (84.4а) не изменятся, если вектор $\mathbf{S}$ заменить на $\mathbf{S} + \operatorname{rot}\mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ — произвольный вектор. Действительно, дивергенция ротора любого вектора тождественно равна нулю. Тождественно равен нулю и поток вектора $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ через произвольную замкнутую поверхность. Таким образом, приведенными рассуждениями вектор плотности потока электромагнитной энергии определяется не однозначно. Это не создает никаких трудностей в применениях закона сохранения энергии, так как при этом речь идет всегда о потоках энергии через *замкнутые поверхности.* Трудности возникают, во всяком случае в дорелятивистской физике, когда представление о потоке энергии применяется к *незамкнутым поверхностям.* В дорелятивистской физике хотя и вводилось представление о локализации энергии в пространстве, но на саму энергию никогда не смотрели как на какую-то субстанцию, которой присущи определенная масса и движение. Теория относительности устранила это принципиальное различие между массой и энергией и показала, что *всякая энергия обладает массой: масса равна энергии, деленной на квадрат скорости света.* Но поток вещества и связанный с ним поток массы являются величинами вполне определенными и однозначными. Поэтому той же определенностью и однозначностью должен обладать и поток энергии.

Вместе с тем поток энергии должен быть связан с *потоком импульса.* Определим плотность потока импульса $\mathbf{g}$ для электромагнитного поля и ограничимся полем в вакууме, чтобы в дальнейшем избежать усложнений, вносимых наличием вещества. Пусть w — плотность электромагнитной энергии. Соответствующая ей плотность массы будет w/c^2. Если энергия движется со скоростью v, то с этим движением связан импульс, значение которого в единице объема среды дается выражением $\mathbf{g}_{\text{эл}} = w\mathbf{v}/c^2$. Этот импульс называется *электромагнитным импульсом* или *импульсом электромагнитного поля.* Замечая, что wv есть плотность потока $\mathbf{S}$ электромагнитной энергии, получаем для плотности электромагнитного импульса

$$\mathbf{g}_{\text{эл}} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c}\,[\mathbf{EH}]. \tag{84.10}$$

Понятие электромагнитного импульса было введено Максом Абрагамом (1875–1922) еще до возникновения теории относительности.

6. Рассмотрим теперь случай, когда электромагнитное поле $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ статическое, т. е. не меняется во времени. Согласно формуле (84.3) должен существовать поток электромагнитной энергии во всех точках пространства, где векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ не коллинеарны. Так как для стационарных процессов $\partial u/\partial t = 0$, то из уравнения (84.4) следует $\operatorname{div} \mathbf{S} = 0$. Это значит, что энергия течет подобно несжимаемой жидкости: во всякий объем пространства втекает столько же энергии, сколько и вытекает. Непосредственно такое течение электромагнитной энергии не проявляется ни в каких физических явлениях. Однако оно приводит к следствиям, допускающим экспериментальную проверку, если учесть, что с потоком электромагнитной энергии связан электромагнитный импульс и его момент. Пример, приводимый ниже, показывает, что это действительно так.

Рассмотрим заряженный цилиндрический конденсатор, помещенный в постоянное однородное магнитное поле $\mathbf{H}$, параллельное оси конденсатора (рис. 194 *а*). Поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ взаимно перпендикулярны. Век-

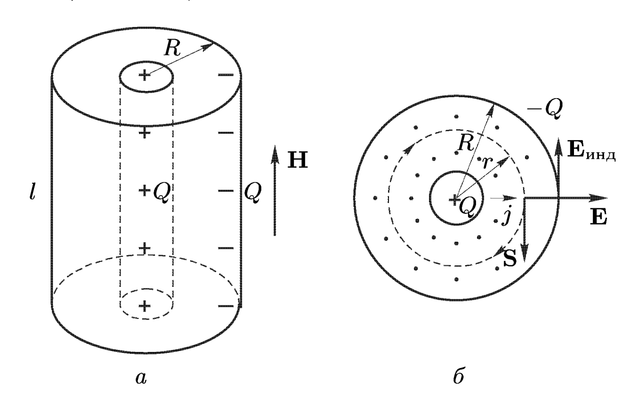


Рис. 194

тор Пойнтинга $\mathbf{S}$ направлен по касательным к коаксиальным окружностям, центры которых расположены на оси конденсатора, а плоскости перпендикулярны к этой оси (рис. 194 *б*). Таким образом, происходит непрерывная циркуляция электромагнитной энергии вдоль этих окружностей. Полный электромагнитный импульс системы, ввиду ее аксиальной симметрии, равен нулю. Однако момент этого импульса $\mathbf{L}_{\text{эл}}$ относительно оси системы отличен от нуля. Именно

$$L_{\text{эл}} = \int r g_{\text{эл}}\, dV = \frac{1}{4\pi c} \int r E H\, dV.$$

Подставив сюда $E = 2Q/(lr)$, $dV = 2\pi r l\, dr$ и выполнив интегрирование, получим

$$L_{\text{эл}} = \frac{QH}{c} \int_0^R r\, dr = \frac{QH}{2c} R^2,$$

где l — длина конденсатора, Q — его заряд, а R — радиус наружной обкладки. Для упрощения вычислений радиусом внутренней обкладки мы пренебрегаем, предполагая его малым. Как видно из рисунка, вектор $\mathbf{L}_{\text{эл}}$ направлен против поля $\mathbf{H}$, когда внутренняя обкладка заряжена положительно, и по полю $\mathbf{H}$, когда она заряжена отрицательно. Будем предполагать, что положительный заряд находится на внутренней обкладке, и напишем

$$\mathbf{L}_{\text{эл}} = -\frac{QR^2}{2c}\,\mathbf{H}. \tag{84.11}$$

Допустим теперь, что в конденсаторе от внутренней обкладки к наружной течет радиальный электрический ток, медленно разряжающий конденсатор. Для этого надо предположить, что конденсатор заполнен слабо проводящей средой, диэлектрическая и магнитная проницаемости которой практически не отличаются от единицы. После разряда электромагнитный момент импульса (84.10) исчезнет, и конденсатор должен получить такой же по величине и по направлению механический момент импульса. Если конденсатор был подвешен на нити, то после разряда нить должна закрутиться. Что это действительно так, показывает следующее рассуждение.

Если $\mathbf{j}$ — объемная плотность радиального тока, то на элемент объема диэлектрика действует амперова сила $d\mathbf{F} = (1/c)[\mathbf{jH}]\,dV$. Момент $d\mathbf{M}$ этой силы относительно оси конденсатора численно равен $(1/c)rjH\,dV$ и направлен против поля $\mathbf{H}$, как это видно из рис. 194 *б*. Таким образом, в векторной форме $d\mathbf{M} = -(1/c)rj\mathbf{H}\,dV$. Подставив сюда $dV = 2\pi rl\,dr$, $j = I/(2\pi rl)$, после интегрирования получим

$$\mathbf{M} = -\frac{I\mathbf{H}}{c}\int\limits_0^R r\,dr = -\frac{IR^2}{2c}\,\mathbf{H}.$$

Под действием момента $\mathbf{M}$ механический момент импульса конденсатора будет изменяться в соответствии с уравнением

$$d\mathbf{L} = \mathbf{M}\,dt = -\frac{R^2\mathbf{H}}{2c}\,I\,dt = -\frac{R^2\mathbf{H}}{2c}\,dQ.$$

Выполнив интегрирование, найдем, что после разрядки момент импульса конденсатора будет

$$\mathbf{L} = -\frac{QR^2}{2c}\,\mathbf{H}, \tag{84.12}$$

в согласии с прежним результатом.

К тому же результату мы придем, если, оставляя конденсатор заряженным, выключим магнитное поле $\mathbf{H}$. При выключении магнитного поля возникнет кольцевое электрическое поле. На окружности радиуса R напряженность этого поля определится по закону электромагнитной индукции:

$$2\pi R E_{\text{инд}} = -\frac{1}{c}\,\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}\,\pi R^2\frac{dH}{dt},$$

откуда

$$E_{\text{инд}} = -\frac{R}{2c}\,\frac{dH}{dt}.$$

На отрицательный заряд $-Q$ такое поле будет действовать с моментом

$$\mathbf{M} = \frac{Q}{2c}\,R^2\frac{d\mathbf{H}}{dt}.$$

Поэтому

$$d\mathbf{L} = \mathbf{M}\,dt = \frac{Q}{2c}\,R^2\,d\mathbf{H}.$$

Интегрируя в пределах от $\mathbf{H}$ до 0, получаем прежний результат (84.12).

Разобранный здесь эффект крайне мал, но в принципе может наблюдаться.

ЗАДАЧИ

1. Плоский воздушный конденсатор, обкладками которого являются два одинаковых диска, заряжен до высокой разности потенциалов и затем отключен от источника напряжения. В центре конденсатора происходит пробой (проскакивает электрическая искра), в результате чего конденсатор разряжается. Считая разряд квазистационарным и пренебрегая неоднородностью поля на краях конденсатора, определить полный поток электромагнитной энергии, вытекающей из пространства между обкладками. Обсудить явление с точки зрения сохранения и превращения энергии.

Ответ. Поток энергии равен нулю (см. задачу 3 к § 81).

2. Плоскому конденсатору емкости C, обкладками которого являются два одинаковых диска, сообщен заряд Q. Затем конденсатор был отключен от источника электричества. После этого пластины были соединены длинным цилиндрическим проводом, проходящим вне конденсатора, и конденсатор разрядился. Пренебрегая неоднородностью поля на краях конденсатора, показать непосредственным расчетом, что полный поток электромагнитной энергии из конденсатора равен полному потоку электромагнитной энергии, втекающей внутрь провода. Проанализировать явление с точки зрения представления о движении, превращении и сохранении энергии.

Указание. См. примеры 2 и 3 из текста настоящего параграфа.

Ответ. Электрическая энергия вытекает из конденсатора через его края, втекает внутрь провода и там превращается во внутреннюю (тепловую) энергию.

3. Плоский воздушный конденсатор, состоящий из двух одинаковых дисков, заряжен электричеством и помещен внутри соленоида, создающего однородное постоянное магнитное поле $B = 1000$ Гс. Магнитное поле создается батареей, посылающей постоянный ток в обмотку электромагнита. Электрическое поле между пластинами конденсатора равно $E = 10000$ В/см. Объем воздушного пространства между пластинами конденсатора равен $V = 100$ см^3. Конденсатор пробивается электрической искрой вдоль его оси и в результате этого разряжается. Как изменится механический импульс системы после пробоя? Обсудить результат с точки зрения закона сохранения импульса.

Решение. Ввиду осевой симметрии полный электромагнитный импульс поля равен нулю. В результате разряда конденсатора он измениться не может. Поэтому не может измениться и полный механический импульс системы. Но в результате разряда электромагнитный импульс, локализованный

в конденсаторе, уменьшается на $(V/4\pi c)[\mathbf{EH}]$, а электромагнитный импульс поля вне конденсатора увеличивается на такую же величину. В соответствии с этим конденсатор приобретает механический импульс $(V/4\pi c)[\mathbf{EH}]$, равный 10^{-4} г · см/с. Соленоид получит такой же, но противоположно направленный импульс. Искру можно рассматривать как ток проводимости. Если бы все электрическое поле конденсатора было локализовано только внутри него, то магнитное поле искры вне конденсатора было бы полностью компенсировано магнитным полем тока смещения (см. задачу 3 к § 81). На самом деле часть тока смещения проходит вне конденсатора и создает там магнитное поле. Это магнитное поле действует на токи, текущие в соленоиде, и меняет импульс последнего.

4. В предыдущей задаче конденсатор не пробивается, а разрывается цепь батареи, питающей соленоид. Как в результате этого изменится механический импульс системы?

Ответ. Так же, как в предыдущей задаче.

§ 85. Международная система единиц (СИ)

1. В механике строго научная система единиц (СГС), в которой за основные величины приняты *длина*, *масса* и *время*, была разработана на основе законов Ньютона. В худшем положении оказалась электродинамика, основные принципы которой (уравнения Максвелла) были установлены и получили признание только в конце XIX века. До этого времени уже получили широкое распространение случайно выбранные практические единицы: *вольт*, *ампер*, *ом* и их производные, никак не связанные с системой единиц в механике. Естественно было ввести единую систему единиц для механических и электромагнитных величин. Здесь физика и электротехника пошли разными путями. Физика не вводила новых основных величин, а рассматривала электрические и магнитные величины как *производные механических.* Построенные по такому принципу системы единиц называются *абсолютными.* К таким системам относится и *гауссова система СГС*, которая в настоящем курсе принята за основную. Электротехника, сохранив механические величины, не захотела жертвовать и практическими электрическими единицами: вольтом, ампером, омом и пр. Последнее условие — довольно жесткое. Удовлетворить ему оказалось возможным только ценой *существенного ухудшения* системы единиц. Это относится и к так называемой *Международной системе единиц* (сокращенно *СИ*), разработанной за последнее время и рекомендованной в качестве основной. Ниже изложены основы построения системы СИ, а затем отмечены ее принципиальные недостатки.

В СИ изменен масштаб основных механических величин: вместо сантиметра введен *метр*, вместо грамма — *килограмм.* Особой выгоды в этом нет, так как все равно невозможно удовлетворить требованию, чтобы величина единицы была всегда одинаково удобна. Одна и та же единица в одних случаях будет слишком велика, в других слишком мала. Этот вопрос удовлетворительно решается введением приставок «микро», «милли», «мега» и т. д., а также степеней 10. Но, разумеется, изменение масштабов основных величин принципиально

ничего не меняет и в этом смысле никаких возражений не вызывает. Принципиальными являются два момента.

Во-первых, к трем основным механическим величинам — длине, времени и массе — в СИ добавлена в качестве независимой четвертая, чисто электрическая, величина, имеющая *самостоятельную размерность.* Такой величиной выбрана *сила электрического тока*, а ее единицей — *ампер.* Количество электричества есть величина производная с единицей *ампер-секунда*, называемой *кулоном.*

Во-вторых, уравнения Максвелла в СИ записываются в так называемой *рационализированной форме*, т. е. в форме, не содержащей никаких числовых множителей. В интегральной форме эти уравнения пишутся так:

$$\oint (\mathbf{H}\, d\mathbf{l}) = I + \int \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\, d\mathbf{S}\right), \tag{85.1}$$

$$\oint (\mathbf{E}\, d\mathbf{l}) = -\int \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\, d\mathbf{S}\right), \tag{85.2}$$

$$\oint (\mathbf{D}\, d\mathbf{S}) = q, \tag{85.3}$$

$$\oint (\mathbf{B}\, d\mathbf{S}) = 0, \tag{85.4}$$

а в дифференциальной так:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{85.1 a}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{85.2 a}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \tag{85.3 a}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \tag{85.4 a}$$

Идея «рационализации» уравнений Максвелла принадлежит Хевисайду (1850–1925). Хевисайд исходил из того, что уравнения Максвелла — это *фундаментальные уравнения*, а потому целесообразно освободить их от численных множителей типа 4π. Для этого достаточно изменить величины единиц электрического заряда, а также напряженностей электрического и магнитного полей. Практической выгоды от такой рационализации нет. Исчезая из одних формул, численные коэффициенты появляются в других, так что общее число коэффициентов практически остается неизменным. Идея Хевисайда была поддержана Лоренцем. В *системе Хевисайда–Лоренца* уравнения Максвелла выглядят так же, как и в гауссовой системе, с тем единственным отличием,

что безразмерный множитель 4π в них всюду заменен другим безразмерным множителем — единицей. Поэтому никакими принципиальными преимуществами перед гауссовой системой система Хевисайда–Лоренца не обладает. Обе системы одинаково хороши. «Рационализация» в СИ идет дальше: опускается не только безразмерный коэффициент 4π, но и *размерная величина* — скорость света в вакууме c.

2. Уравнениями (85.1)–(85.4) в СИ уже предопределены размерность и единицы векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$, а именно:

$$[\mathbf{D}] = \text{Кл}/\text{м}^2 = \text{А}\cdot\text{с}/\text{м}^2, \quad [\mathbf{H}] = \text{А}/\text{м}.$$

Связь с механикой устанавливается посредством *силовых векторов* $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Последние определяются соотношениями

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}, \tag{85.5}$$

$$\mathbf{F}_m = q[\mathbf{vB}], \tag{85.6}$$

где $\mathbf{F}_e$ и $\mathbf{F}_m$ — силы, действующие на заряд q в электрическом и магнитном полях. Отсюда получаем

$$[\mathbf{E}] = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{с}^3} = \frac{\text{В}}{\text{м}}, \quad [\mathbf{B}] = \frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{Кл}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{А}\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2}.$$

Единица индукции $\mathbf{B}$ называется *тесла*. Единицы $\mathbf{E}, \mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ не получили специальных названий. В соответствии с размерностью их называют *вольт на метр*, *кулон на квадратный метр* и *ампер на метр*. Размерности всех четырех векторов $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$ разные. Даже в вакууме векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ с одной стороны, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$, с другой, в СИ — величины разные. В вакууме они связаны соотношениями

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}. \tag{85.7}$$

Величины ε_0 и μ_0 называются *электрической* и *магнитной постоянными.*

Из уравнения (85.3) следует, что в СИ электрическое поле точечного заряда q в вакууме определяется формулой

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} \quad \text{или} \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Поэтому закон Кулона в вакууме должен писаться так:

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{85.8}$$

Аналогично, теорема о циркуляции (85.1) для прямого тока в вакууме дает

$$H = \frac{I}{2\pi r}, \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Следовательно, для силы взаимодействия двух тонких параллельных проводов, по которым текут токи I_1 и I_2, получаем

$$F = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi r}\, l, \tag{85.9}$$

где l — длина участка одного из проводов, к которому приложена сила $\mathbf{F}$.

Формулы (85.8) и (85.9) позволяют определить постоянные ε_0 и μ_0. Действительно, пусть $q_1 = q_2 = 1$ Кл, $r = 1$ м. Тогда по формуле (85.8) находим $F = 1/(4\pi\varepsilon_0)$ ньютонов. Вычислим ту же силу по закону Кулона $F = q_1q_2/r^2$ в гауссовой системе единиц. В этом случае $r = 100$ см, а по определению кулона $q_1 = q_2 = 10c$ СГСЭ-ед., где $c \approx 10^8$ м/с — скорость света в вакууме в м/с. Таким образом, $F = c^2 \cdot 10^{-2}$ дин $= c^2 \cdot 10^{-7}$ Н. Путем сравнения с предыдущим результатом находим

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \approx 8{,}854 \cdot 10^{-12} \ \text{Ф/м}. \tag{85.10}$$

Аналогично поступаем для определения магнитной постоянной μ_0. В формуле (85.9) полагаем $I_1 = I_2 = 1$ А, $l = r = 1$ м. Тогда $F = \mu_0/(2\pi)$ Н. Воспользуемся теперь для вычисления той же силы формулой в гауссовой системе единиц $F = 2I_1I_2l/r(100c)^2$. (В знаменателе мы написали $100c$, а не c, так как предполагаем, что скорость c измеряется в м/с, а не в см/с, как должно делаться в гауссовой системе.) Полагая в этой формуле $l = r = 100$ см, $I_1 = I_2 = 10c$ СГСЭ-ед., получим $F = 2 \cdot 10^{-2}$ дин $= 2 \cdot 10^{-7}$ Н. Сравнивая полученный результат с предыдущим, находим

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1{,}256 \cdot 10^{-6} \ \text{Г/м} \tag{85.11}$$

Сами постоянные ε_0 и μ_0 никакого реального физического смысла не имеют, а являются только *размерными коэффициентами*, искусственно введенными для перевода значений по существу одних и тех же величин ($\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ в вакууме) из одних единиц в другие. Однако эти коэффициенты связаны соотношением

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}, \tag{85.12}$$

где скорость света должна измеряться в м/с. Только комбинация $\varepsilon_0\mu_0$ имеет реальный физический смысл.

3. Материальные уравнения в средах в СИ записываются в виде

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}, \tag{85.13}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}, \tag{85.14}$$

$$\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}. \tag{85.15}$$

Диэлектрическая и магнитная проницаемости ε и μ безразмерные и равны соответствующим величинам в гауссовой системе. В системе СИ их называют *относительными*, а произведения $\varepsilon_0\varepsilon$ и $\mu_0\mu$ — *абсолютными проницаемостями среды.* Электрическая проводимость λ имеет размерность

$$[\lambda] = \left[\frac{I}{ES}\right] = \left[\frac{I}{\varphi l}\right] = \frac{\text{А}}{\text{В} \cdot \text{м}} = \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}.$$

Плотность энергии в СИ

$$w = \frac{1}{2}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB}), \tag{85.16}$$

вектор Пойнтинга

$$\mathbf{S} = [\mathbf{EH}]. \tag{85.17}$$

Электрический дипольный момент определяется прежним выражением $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ и измеряется в кулон-метрах.

По-прежнему определяется и вектор поляризации $\mathbf{P}$, как дипольный момент единицы объема среды. Как и вектор $\mathbf{D}$, он имеет размерность заряда, деленного на площадь. Поэтому вектор $\mathbf{D}$ определяется выражением

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}. \tag{85.18}$$

Множитель ε_0 введен сюда для уравнивания размерностей обоих слагаемых в правой части. Вектор $\mathbf{P}$ связан с $\mathbf{E}$ соотношением $\mathbf{P} = \varepsilon_0\alpha\mathbf{E}$, где α — безразмерная величина, называемая *поляризуемостью среды.* Она связана с ε соотношением

$$\varepsilon = 1 + \alpha. \tag{85.19}$$

Отсюда видно, что поляризуемость α в СИ в 4π раз больше ее значения в гауссовой системе.

Поляризуемость молекулы β определяют формулой $\mathbf{p} = \varepsilon_0\beta\mathbf{E}$. Величина β имеет размерность объема и связана с α соотношением $\alpha = N\beta$, где N — число молекул в единице объема среды.

Магнитный момент $\mathfrak{M}$ витка с током определяется выражением $\mathfrak{M} = I\mathbf{S}$. Поэтому вектор намагничивания $\mathbf{I}$, или магнитный момент единицы объема магнетика, имеет ту же размерность, что и вектор $\mathbf{H}$. В соответствии с этим вектор $\mathbf{H}$ определяется выражением

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{I}. \tag{85.20}$$

Магнитная восприимчивость $\varkappa$ безразмерна, причем по определению $\mathbf{I} = \varkappa\mathbf{H}$. Она связана с магнитной проницаемостью μ соотношением

$$\mu = 1 + \varkappa. \tag{85.21}$$

Значит, магнитная восприимчивость $\varkappa$ в СИ в 4π раз больше, чем в гауссовой системе.

4. Можно указать однообразный систематический прием для перевода электродинамических формул из гауссовой системы в СИ и обратно. Для этого каждой физической величине в гауссовой системе сопоставляется определенный *«переводной» коэффициент.* После замены каждой величины такой же величиной, умноженной на соответствующий переводной коэффициент, уравнения гауссовой системы переходят в уравнения СИ. Задача нахождения таких коэффициентов *не однозначна.* Действительно, если найден какой-либо один набор коэффициентов, то после умножения их на одну и ту же величину получится

другой набор, также пригодный для выполнения требуемого преобразования. Так как уравнения механики в обеих системах единиц записываются одинаково, то нет надобности вводить переводные коэффициенты для чисто механических величин. Коэффициенты нужны только для электрических и магнитных величин. Умножение любой величины на произвольную механическую величину оставляет переводной коэффициент без изменения. Так, электрическому полю $\mathbf{E}$ и потенциалу φ сопоставляется один и тот же переводной коэффициент, так как в силу соотношения $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ поле $\mathbf{E}$ получается из потенциала путем деления на механическую величину — длину. Одинаковые коэффициенты будут иметь заряд q, его плотность ρ, ток I, его плотность $\mathbf{j}$, поляризация $\mathbf{P}$ и т. д. Скорость света c в СИ явно не входит. Она заменяется на $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. Относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости, как величины, одинаковые в обеих системах, не преобразуются.

После этих разъяснений перейдем к нахождению системы переводных коэффициентов e, d, ..., сопоставляемых величинам $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, ... согласно следующей схеме:

$\mathbf{E}$	$\mathbf{D}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{H}$	I, q	c
e	d	b	h	i	$1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$

Для решения задачи можно было бы воспользоваться системой уравнений Максвелла. Однако проще исходить из выражений для плотности энергии, ее потока и силы:

$$w_e = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{ED}), \quad w_m = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{HB}), \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}], \quad \mathbf{F} = q\mathbf{E}.$$

Преимущество такого подхода состоит в том, что в написанных соотношениях слева стоят чисто механические величины, которые не должны преобразовываться. После умножения на переводные коэффициенты эти соотношения переходят в

$$w_e = \frac{ed}{8\pi}(\mathbf{ED}), \quad w_m = \frac{hb}{8\pi}(\mathbf{HB}), \quad \mathbf{S} = \frac{eh}{4\pi\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}[\mathbf{EH}], \quad \mathbf{F} = eiq\mathbf{E}.$$

Переводные коэффициенты надо подобрать так, чтобы эти соотношения переходили в

$$w_e = \frac{1}{2}(\mathbf{ED}), \quad w_m = \frac{1}{2}(\mathbf{HB}), \quad \mathbf{S} = [\mathbf{EH}], \quad \mathbf{F} = q\mathbf{E}.$$

Для этого должно быть

$$\frac{ed}{4\pi} = \frac{hb}{4\pi} = \frac{eh}{4\pi\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = ie = 1.$$

Так как один из этих коэффициентов можно выбрать произвольно, то мы наложим дополнительное «условие симметрии» $e/\sqrt{\varepsilon_0} = h/\sqrt{\mu_0}$.

После этого найдем

$$e = \sqrt{4\pi\varepsilon_0}, \quad h = \sqrt{4\pi\mu_0}, \quad d = \sqrt{\frac{4\pi}{\varepsilon_0}}, \quad b = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}, \quad i = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}.$$

Легко проверить, что все фундаментальные уравнения Максвелла с помощью найденных коэффициентов преобразуются правильно. Возьмем, например, уравнение (82.1а). После умножения его на переводные коэффициенты получим

$$\sqrt{4\pi\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 4\pi\frac{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}\mathbf{j} + \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\frac{4\pi}{\varepsilon_0}}\,\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t},$$

а после сокращения

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t},$$

а это есть уравнение Максвелла (85.1а) в системе СИ.

Пользуясь найденными коэффициентами, легко найти переводные коэффициенты и для остальных физических величин. Некоторые из них приведены в табл. 1. Коэффициенты обратного преобразования от системы СИ к гауссовой равны обратным значениям коэффициентов, служащих для прямого преобразования. Пусть, например, соотношение

Таблица 1. Таблица перевода выражений и формул из гауссовой системы в систему СИ и обратно

Наименование	Гауссова система	Система СИ
Скорость света	c	$1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$
Напряженность электрического поля	$\mathbf{E}$	$\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,\mathbf{E}$
Потенциал	φ	$4\pi\varepsilon_0\varphi$
Электрическое смещение	$\mathbf{D}$	$\sqrt{4\pi/\varepsilon_0}\,\mathbf{D}$
Заряд, плотность заряда, ток, плотность тока, поляризованность	q, ρ, I, $\mathbf{j}$, $\mathbf{P}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}\,(q,\ \rho,\ I,\ j,\ \mathbf{P})$
Магнитная индукция, магнитный поток	$\mathbf{B}$, Φ	$\sqrt{4\pi/\mu_0}\,(\mathbf{B},\ \Phi)$
Напряженность магнитного поля	$\mathbf{H}$	$\sqrt{4\pi\mu_0}\,\mathbf{H}$
Магнитный момент, намагниченность	$\mathfrak{M}$, $\mathbf{I}$	$\sqrt{\mu_0/4\pi}$, $(\mathfrak{M},\ \mathbf{I})$
Электрическая проницаемость, магнитная проницаемость (относительные)	ε, μ	ε, μ
Электрическая поляризуемость, магнитная восприимчивость	α, $\varkappa$	$(4\pi)^{-1}\,(\alpha,\ \varkappa)$
Удельная проводимость	λ	$\lambda/(4\pi\varepsilon_0)$
Сопротивление	R	$4\pi\varepsilon_0 R$
Емкость	C	$(4\pi\varepsilon_0)^{-1}c$
Индуктивность	L	$(4\pi/\mu_0)L$

системы СИ $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ требуется перевести в гауссову систему. Произведя соответствующую замену, получим

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{4\pi}}\,\mathbf{D} = \varepsilon_0\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}\,\mathbf{E} + \sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,\mathbf{P},$$

или после сокращения $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$.

5. Приведем еще табл. 2 для перевода численных значений физических величин из СИ в гауссову систему и обратно. Множители 3 (кроме входящих в показатели степени) при точных расчетах следует заменить на 2,99792458 в соответствии с точным значением скорости света. Например, в строке «электрическая индукция» вместо $12\pi\cdot10^5$ при точных расчетах следует брать значение $2{,}997924582\cdot4\pi\cdot10^5$. В тех случаях, когда для гауссовых единиц существует общепринятое наименование, оно приведено в таблице. В остальных случаях приведено только число таких единиц.

Таблица 2. Таблица перевода численных значений физических величин из системы СИ в гауссову систему

Наименование	Обозначение	Система СИ	Гауссова система
Длина	l	1 м (метр)	10^2 см
Масса	m	1 кг (килограмм)	10^3 г
Время	t	1 с (секунда)	1 с
Сила	$\mathbf{F}$	1 Н (ньютон)	10^5 дин
Работа, энергия	A, $\mathscr{E}$	1 Дж (джоуль)	10^7 эрг
Мощность	P	1 Вт (ватт)	10^7 эрг/с
Давление	$\mathscr{P}$	1 Па (паскаль)	10 дин/см^2
Сила электрического тока	I	1 А (ампер)	$3\cdot10^9$
Электрический заряд	q	1 Кл (кулон)	$3\cdot10^9$
Напряженность электрического поля	$\mathbf{E}$	1 В/м (вольт на метр)	$\frac{1}{3}\cdot10^{-4}$
Электрический потенциал	φ	1 В (вольт)	$\frac{1}{3}\cdot10^{-2}$
Поляризованность	$\mathbf{P}$	1 Кл/м^2 (кулон на квадратный метр)	$3\cdot10^5$
Электрическое смещение	$\mathbf{D}$	1 Кл/м^2 (кулон на квадратный метр	$12\pi\cdot10^5$
Электрическая емкость	C	1 Ф (фарад)	$9\cdot10^{11}$ см
Электрическое сопротивление	R	1 Ом (ом)	$\frac{1}{9}\cdot10^{-11}$ с · см$^{-1}$

Продолжение табл. 2

Наименование	Обозначение	Система СИ	Гауссова система
Удельное электрическое сопротивление	ρ	1 Ом · м (ом-метр)	$\frac{1}{9}\cdot 10^{-9}$ с
Электрическая проводимость	$\Lambda = \frac{1}{R}$	1 См (сименс)	$9\cdot 10^{11}$ см · $с^{-1}$
Удельная электрическая проводимость	λ	1 См/м (сименс на метр)	$9\cdot 10^{9}$ $с^{-1}$
Магнитный поток	Φ	1 Вб (вебер)	10^8 Мкс
Магнитная индукция	$\mathbf{B}$	1 Т (тесла)	10^4 Гс
Напряженность магнитного поля	$\mathbf{H}$	1 А/м (ампер на метр)	$4\pi\cdot 10^{-3}$ Э
Намагниченность	$\mathbf{I}$	1 А/м (ампер на метр)	$\frac{1}{4\pi}\cdot 10^4$ Гс
Индуктивность	L	1 Г (генри)	10^9 см

6. Постоянство СИ — чисто инженерное. При расчетах по формулам этой системы окончательные численные результаты сразу получаются в практических единицах — вольтах, амперах, омах, джоулях и пр. Недостатки СИ более существенны и носят *принципиальный характер.* Для описания электромагнитного поля СИ вводит *четыре* вектора **E**, **D**, **B**, **H** *не только в материальных средах*, *но и в вакууме.* По существу СИ не отличается от электротехнической системы, предложенной Джорджи в начале двадцатого столетия. В то время уравнения Максвелла были мало распространены, в особенности в электротехнике, а их физическое толкование еще не установилось. Преобладали механические воззрения на природу электромагнитного поля. Считалось, что вакуум (по тогдашней терминологии «эфир»), как среда, в которой возбуждается электромагнитное поле, принципиально не отличается от остальных материальных сред.

Система Джорджи возникла под сильным влиянием этих старых воззрений. Согласно последним, векторы **E** и **D**, **B** и **H** в вакууме отличаются друг от друга не только численным множителем, но и *по существу.* Они находятся примерно в том же отношении, как растягивающее усилие и смещение в теории упругости.

Но физика уже давно отказалась от того принципиального различия между **E** и **D**, **B** и **H**, которое возникло на почве механической теории эфира. Она установила, что электромагнитное поле в вакууме описано полностью, если задан *один электрический вектор* **E** *и один магнитный вектор* **B**. Совпадение численных значений **E** и **D**, а также **B** и **H** в вакууме является для физика *не результатом произвольного соглашения*, *а выражением действительного тождества этих величин.*

Напротив, введение размерных множителей ε_0 и μ_0 в СИ представляется ему *искусственным приемом*, с помощью которого формулы приводятся к виду, удобному для инженерных расчетов в электротехнике. Дух отживших физических представлений витает и над СИ. В частности, он повлиял на терминологию: первоначально величины ε_0 и μ_0 назывались *диэлектрической* и *магнитной проницаемостями вакуума.* Только полная бессодержательность таких понятий заставила отказаться от этих терминов и заменить их нейтральными терминами «*электрическая*» и «*магнитная*» *постоянные.*

От этого, конечно, величины ε_0 и μ_0 не сделались содержательными. Эти ненужные величины в СИ засоряют физику и загромождают формулы.

До появления теории относительности ко всякой физически рациональной системе единиц необходимо было предъявлять требование, чтобы в ней векторы **E** и **D**, а также **B** и **H** имели *одинаковую размерность.* Размерности электрического и магнитного полей могли и не совпадать. Теория относительности усилила это требование. Она показала, что деление электромагнитного поля на электрическое и магнитное *относительно*, т. е. зависит от выбора системы отсчета. Оказалось, что векторы **E** и **B** объединяются в один антисимметричный тензор второго ранга, а векторы **D** и **H** — в другой. Естественно, что компоненты одного и того же тензора должны иметь *одинаковые размерности.* После этого стало почти абсолютной необходимостью, чтобы имели одинаковую размерность *все четыре* вектора **E**, **B**, **D** и **H**. Этому требованию СИ не удовлетворяет. В ней надо вводить размерные множители для уравнивания размерностей компонент обоих тензоров. Напротив, гауссова система СГС ему удовлетворяет, хотя она и была создана задолго до теории относительности. В этом отношении СИ не более логична, чем, скажем, система, в которой длина измеряется в метрах, ширина — в парсеках, а высота — в световых годах.

Из всех предложенных систем единиц гауссова система СГС до настоящего времени остается наилучшей в физике. Для физика значительно легче выполнить все вычисления в гауссовой системе и лишь в конце, если это требуется, сделать пересчет к практическим единицам, чем все время быть обремененным грузом искусственно введенных ненужных величин и понятий (ε_0 и μ_0, абсолютная и относительные проницаемости, **E** и **D**, **B** и **H** в вакууме и пр.), возникших на почве СИ.

Однако приходится считаться с широким распространением, которое получила СИ.

Глава V

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

§ 86. Движение в постоянных и однородных полях

1. Вопросы о движении заряженных частиц в электромагнитных полях были уже частично рассмотрены в виде задач к § 4 и 57. Изучим теперь эти вопросы более систематически. При этом мы исключим из рассмотрения весь материал, относящийся к электронной и ионной оптике. Его предполагается включить в следующий том после изложения геометрической оптики. Не будем также касаться ускорителей и масс-спектрометрии, так как этот материал более уместно изложить в разделе атомной и ядерной физики.

Простейшим случаем является движение частиц в постоянных и однородных электромагнитных полях.

2. В постоянном электрическом поле на частицу с зарядом e действует сила $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$. Если движение не релятивистское, а поле однородно, то частица движется с постоянным ускорением $\mathbf{a} = e\mathbf{E}/m$. Такое движение вполне аналогично движению частицы в постоянном однородном гравитационном поле. В общем случае траекторией движения будет парабола. Для релятивистских движений масса частицы m возрастает со скоростью v, а ускорение убывает. Разбор этого случая дается в задаче, помещенной в конце этого параграфа.

3. В постоянном магнитном поле на заряженную частицу действует сила $\mathbf{F}_m = (e/c)[\mathbf{vB}]$. Эта сила перпендикулярна к скорости $\mathbf{v}$, а потому работы не производит. Она только искривляет траекторию, но не изменяет абсолютную величину скорости частицы. Не меняется, следовательно, и релятивистская масса частицы m.

Допустим теперь, что магнитное поле не только постоянно, но и однородно. Если скорость частицы направлена вдоль поля $\mathbf{B}$, то сила $\mathbf{F}_m$ обратится в нуль. Частица будет двигаться прямолинейно с постоянной скоростью, магнитное поле не влияет на движение частицы, если последнее происходит вдоль поля.

Если же частица движется перпендикулярно к магнитному полю, то ее скорость, оставаясь постоянной по абсолютной величине, меняется по направлению. Сила $\mathbf{F}_m = (e/c)[\mathbf{vB}]$ также постоянна по абсолютной величине и нормальна к траектории частицы. Отсюда следует, что траекторией частицы будет окружность, плоскость которой перпендикулярна к магнитному полю. Направление вращения частицы по окружности показано на рис. 195 (магнитное поле направлено к читателю). Если заряд e положителен, то направления вектора $\mathbf{B}$ и угловой скорости вращения $\boldsymbol{\omega}$ противоположны. Если же заряд e отрицателен,

то эти направления совпадают. Ускорение частицы направлено к центру окружности, по которой она вращается, и равно $\omega^2\rho$, где ρ — радиус этой окружности. Значение угловой скорости ω найдется из уравнения движения $m\omega^2\rho = |e|Bv/c$. Так как $v = \omega\rho$, то отсюда получаем $\omega = |e|B/(mc)$, или в векторной форме

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{e\mathbf{B}}{mc}. \tag{86.1}$$

Величина ω называется *циклотронной частотой*, а ρ — *циклотронным* или *ларморовским радиусом* [1]. Заметим, что формула (86.1) справедлива как для нерелятивистских, так и для релятивистских движений, если только под m понимать релятивистскую массу частицы.

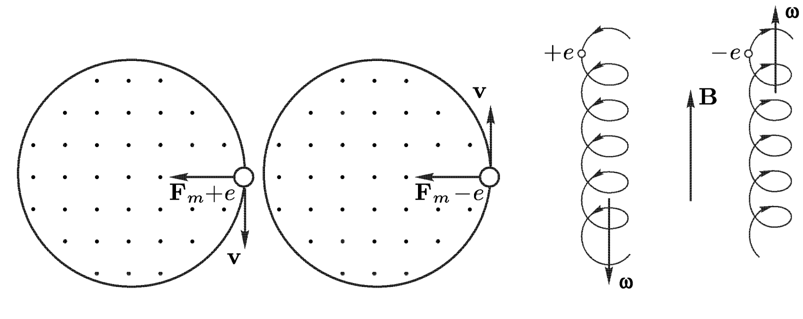


Рис. 195

Рис. 196

При рассмотрении общего случая, когда скорость $\mathbf{v}$ направлена под углом к магнитному полю, ограничимся нерелятивистскими скоростями. Представим скорость $\mathbf{v}$ в виде $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp$, где $\mathbf{v}_\parallel$ — скорость вдоль поля, а $\mathbf{v}_\perp$ — перпендикулярно к нему. Движения с этими скоростями независимы. Первое есть равномерное прямолинейное движение вдоль поля со скоростью $\mathbf{v}_\parallel$, второе — равномерное вращение по окружности вокруг поля с угловой скоростью (86.1). Радиус этой окружности равен $\rho = \mathbf{v}_\perp/\omega$. В результате сложения обоих движений возникает движение по спирали, ось которой параллельна магнитному полю (рис. 196).

4. Допустим теперь, что на постоянное однородное магнитное поле $\mathbf{B}$ наложено постоянное же однородное электрическое поле $\mathbf{E}$. Будем предполагать, что $E \ll B$. Только при выполнении этого условия, как будет видно из дальнейшего, движение может происходить с нерелятивистскими скоростями. Движение описывается уравнением

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,[\mathbf{v}\mathbf{B}]\right). \tag{86.2}$$

---

[1] Величину ω часто называют также *ларморовской частотой*. Однако, во избежание путаницы, мы будем называть ларморовской частотой величину, вдвое меньшую, т. е. $|e|B/(2mc)$ (см. § 76).

Введем систему отсчета, равномерно движущуюся относительно исходной со скоростью $\mathbf{v}_\text{д}$. В новой системе относительная скорость частицы $\mathbf{v}'$ удовлетворяет уравнению

$$m\dot{\mathbf{v}}' = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}'\mathbf{B}] + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_\text{д}\mathbf{B}]\right).$$

Допустим сначала, что вектор $\mathbf{E}$ перпендикулярен к магнитному полю $\mathbf{B}$. Подберем скорость $\mathbf{v}_\text{д}$ так, чтобы выполнялось условие

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_\text{д}\mathbf{B}] = 0,$$

из которого следует

$$\mathbf{v}_\text{д} = c\frac{[\mathbf{EB}]}{B^2}, \tag{86.3}$$

а потому

$$m\dot{\mathbf{v}}' = \frac{e}{c}[\mathbf{v}'\mathbf{B}].$$

В новой системе отсчета из уравнения относительного движения электрическое поле исключилось. Его влияние компенсировано скоростью $\mathbf{v}_\text{д}$. Движение частицы происходит так, как если бы было только одно магнитное поле, т. е. по спирали. В исходной системе отсчета магнитное поле заставляет частицу равномерно вращаться по спирали. На это вращение накладывается медленное равномерное движение со скоростью $\mathbf{v}_\text{д}$, определяемой формулой (86.3). Такое движение называется *электрическим дрейфом.*

Значение скорости электрического дрейфа дается выражением $\mathbf{v}_\text{д} = cE/B$. При $E > B$ это выражение приводило бы к результату $\mathbf{v}_\text{д} > c$, что не имеет смысла. Это показывает, что нерелятивистское рассмотрение справедливо только при выполнении условия $E \ll B$, что и предполагалось выше.

Допустим теперь, что постоянное электрическое поле направлено под углом к магнитному. Разложим поле $\mathbf{E}$ на составляющую $\mathbf{E}_\parallel$ вдоль $\mathbf{B}$ и на составляющую $\mathbf{E}_\perp$, перпендикулярную к $\mathbf{B}$: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\parallel + \mathbf{E}_\perp$. Тогда движение частицы представится в виде суперпозиции трех движений: 1) равноускоренного движения в направлении $\mathbf{B}$ ускорением $\mathbf{a}_\parallel = (e/m)\mathbf{E}_\parallel$; 2) равномерного вращения по окружности вокруг $\mathbf{B}$ с угловой скоростью (86.1); 3) электрического дрейфа со скоростью

$$\mathbf{v}_\text{д} = \frac{c}{B^2}[\mathbf{E}_\perp\mathbf{B}] = \frac{c}{B^2}[\mathbf{EB}]. \tag{86.3a}$$

Направление и скорость электрического дрейфа не зависят от знака заряда и массы частицы: положительные и отрицательные частицы дрейфуют совершенно одинаково. В результате сложения движений 1) и 2) возникает движение по спирали. Ось спирали направлена параллельно магнитному полю, однако шаг спирали из-за наличия ускорения $\mathbf{a}_\parallel$ будет меняться во времени. Такая картина движения сохранится до тех пор, пока скорость частицы из-за наличия того же ускорения не возрастет настолько, что движение перейдет в релятивистское.

5. Заметим еще, что такое же движение в постоянном однородном магнитном поле возникает и в том случае, когда на частицу будет действовать не электрическое поле, а любая постоянная сила $\mathbf{F}$, например сила тяжести. Роль поля $\mathbf{E}$ будет играть вектор $\mathbf{F}/e$. В результате возникнет дрейфовое движение со скоростью

$$\mathbf{v}_{\text{д}} = \frac{c}{B^2 e}[\mathbf{FB}]. \tag{86.4}$$

Однако теперь направление действующей силы $\mathbf{F}$ не зависит от знака заряда частицы, а потому скорости дрейфа положительных и отрицательных частиц будут направлены в противоположные стороны.

ЗАДАЧА

Исследовать релятивистское движение заряженной частицы в постоянном однородном электрическом поле.

Решение. Движение происходит в плоскости, параллельной электрическому полю $\mathbf{E}$ и начальной скорости частицы $\mathbf{v}_0$. Примем эту плоскость за координатную плоскость XY, направив ось X параллельно полю $\mathbf{E}$. Тогда уравнения движения можно записать в виде

$$\dot{p}_x = eE, \quad \dot{p}_y = 0,$$

и, следовательно,

$$p_x = eEt, \quad p_y = p_0 = \text{const},$$

причем за начальный принят момент времени, когда импульс $\mathbf{p}$ направлен параллельно оси Y. Релятивистская масса частицы найдется из соотношения

$$(mc)^2 = (m_0c)^2 + p^2.$$

Используя его, находим уравнения для координат частицы:

$$\sqrt{(m_0c)^2 + p_0^2 + (eEt)^2}\,\frac{dx}{dt} = eEct,$$

$$\sqrt{(m_0c)^2 + p_0^2 + (eEt)^2}\,\frac{dy}{dt} = p_0c,$$

или

$$dx = \frac{ct\,dt}{\sqrt{\tau^2 + t^2}}, \quad dy = \frac{p_0}{eE}\frac{c\,dt}{\sqrt{\tau^2 + t^2}},$$

где введено обозначение

$$\tau^2 = \frac{(m_0c)^2 + p_0^2}{(eE)^2}. \tag{86.5}$$

После интегрирования получаем

$$x = c\sqrt{\tau^2 + t^2}, \quad y = \frac{p_0c}{eE}\operatorname{arcsh}\frac{t}{\tau}. \tag{86.6}$$

Этими уравнениями и определяется движение. Найдя t из второго уравнения и подставив в первое, получим уравнение траектории:

$$x = c\tau\operatorname{ch}\frac{eEy}{p_0c}. \tag{86.7}$$

Это — цепная линия. При $|eEy|/(p_0c) \ll 1$ она, как и следовало ожидать, переходит в параболу

$$x = c\tau\left[1 + \frac{eEy}{2(p_0c)^2}\right]. \tag{86.8}$$

§ 87. Дрейф заряженной частицы в неоднородном магнитном поле при наличии слабого электрического поля

1. В общем случае, когда магнитное и электрическое поля неоднородны и меняются во времени, движение частицы приобретает весьма сложный и запутанный характер. Проинтегрировать уравнения движения в аналитической форме в этом случае не удается. Для расчета движения приходится обращаться к сложным и утомительным численным методам. Есть, однако, случай, когда можно нарисовать сравнительно простую и обозримую картину движения, не обращаясь к численным методам расчета. Это будет тогда, когда магнитное поле сильное, а его изменения в пространстве и во времени происходят медленно. На магнитное поле может накладываться электрическое, но оно должно быть слабым по сравнению с магнитным. При этих условиях задачу можно приближенно решать по методу последовательных приближений.

В нулевом приближении полностью пренебрегают электрическим полем, а также пространственно-временными неоднородностями магнитного поля. Движение частицы представляется как быстрое вращение по ларморовскому кружку, центр которого перемещается вдоль магнитной силовой линии. Электрическое поле и пространственно-временные неоднородности магнитного поля учитываются в первом приближении. Они проявляются в том, что центр ларморовского кружка получает дополнительное медленное движение. Такое движение называется *дрейфом*, а центр самого ларморовского кружка — *ведущим центром* частицы. Параметры движения — циклотронная частота ω, радиус ларморовского кружка ρ, продольная $v_\parallel$ и поперечная $v_\perp$ скорости частицы при этом будут медленно меняться. Медленность означает, что за циклотронный период $T = 2\pi/\omega$ изменения этих параметров будут малы по сравнению со значениями самих параметров. Для этого необходимо, чтобы на протяжении ларморовского кружка и в течение циклотронного периода магнитное поле изменялось мало. Так как магнитное поле предполагается сильным, то размеры ларморовского кружка будут малы. Быстрые вращения по такому кружку часто не представляют интереса. Чтобы их исключить, достаточно усреднить движение частицы по временам порядка циклотронного периода. Тогда вместо движения самой частицы останется усредненное, или сглаженное, движение ее ведущего центра. Теория, рассматривающая движение частицы в такой постановке, называется *дрейфовой.* За последние два-три десятилетия дрейфовая теория получила многочисленные применения при анализе движения космических частиц в межзвездных и межпланетных магнитных полях, а также в различного рода магнитных ловушках, предназначенных для удержания и нагрева плазмы с целью получения управляемых термоядерных реакций. Ниже в упрощенной форме излагаются основы дрейфовой теории и ее простейшие результаты.

2. Задача дрейфовой теории — определить скорость плавного движения ведущего центра, обусловленного электрическим полем и пространственно-временными неоднородностями магнитного поля. В силу уравнения Максвелла $\partial \mathbf{B}/\partial t = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}$ временные неоднородности магнитного поля можно исключить, выразив их через соответствующие пространственные неоднородности поля электрического. Магнитное поле $\mathbf{B}$, как уже сказано, предполагается сильным. Величины, пропорциональные $\mathbf{B}$, считаются величинами *нулевого порядка.* Это самые большие величины, но в дрейфовую теорию они не входят, так как проявляются только в быстрых вращениях по циклотронным окружностям, которые выпадают в результате усреднения по циклотронным периодам. Члены, пропорциональные электрическому полю и первым пространственным производным магнитного поля, считаются величинами *первого порядка малости.* Влиянием первых и высших производных вектора $\mathbf{E}$, вторых и высших производных вектора $\mathbf{B}$ будем пренебрегать. В этом приближении скорость плавного движения ведущего центра будет представляться линейной функцией напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ и первых пространственных производных вектора $\mathbf{B}$. Понятно, что в принятом приближении все слагаемые этой линейной функции *независимы* и могут быть вычислены *независимо друг от друга.* Изменение магнитного поля в пространстве складывается из изменения его по абсолютной величине и из изменения по направлению. В соответствии с этим дрейфовое движение ведущего центра можно разложить на три движения: 1) *дрейф под действием электрического поля*, *или электрический дрейф*; 2) *дрейф*, *вызванный изменениями магнитного поля только по абсолютной величине*; 3) *дрейф*, *вызванный изменениями магнитного поля только по направлению* (т. е. искривлением магнитных силовых линий). Скорости всех этих дрейфов в линейном приближении можно вычислить *независимо*, что и будет сделано ниже.

3. Электрический дрейф. Как выяснено выше, в первом приближении неоднородность электрического поля учитывать не надо. Не надо учитывать и неоднородность магнитного поля, так как она может сказаться на скорости электрического дрейфа лишь во втором приближении. Поэтому можно воспользоваться результатом (86.3а) и для неоднородных полей. Однако в этом случае формула (86.3а) уже не будет точной, а дает скорость электрического дрейфа только в первом приближении.

Происхождение электрического дрейфа и аналогичного дрейфа, вызванного любой малой возмущающей силой $\mathbf{F}$, наложенной на магнитное поле, легко понять из следующих соображений. Предполагая магнитное поле $\mathbf{B}$ однородным, рассмотрим проекцию траектории частицы на плоскость, перпендикулярную к этому полю. Примем эту плоскость за плоскость рисунка, направив магнитное поле к читателю (рисунки 197 и 198). В отсутствие электрического поля проекцией траектории частицы будет окружность ларморовского радиуса ρ. Для

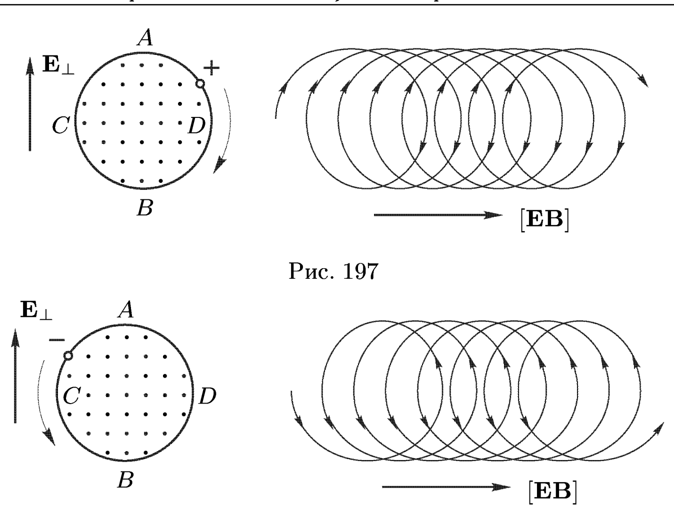


Рис. 197

Рис. 198

определенности будем иметь в виду движение положительно заряженной частицы (рис. 197). Наложим теперь электрическое поле, составляющая $\mathbf{E}_\perp$ которого направлена вверх. Так как при перемещении частицы вверх поле $\mathbf{E}_\perp$ совершает над ней положительную работу, то скорость частицы $\mathbf{v}_\perp$ в верхнем положении A будет больше, чем в нижнем положении B. Кроме того, в точке A силы электрического и магнитного полей действуют на частицу в противоположные стороны, а в точке B — в одну и ту же сторону. Оба эти обстоятельства приводят к тому, что радиус кривизны r проекции траектории в верхней части увеличивается, а в нижней уменьшается, как это видно из выражений

$$\frac{1}{r} = \frac{eB}{mv_\perp c} - \frac{eE_\perp}{mv_\perp^2} \quad \text{(в точке } A\text{)},$$

$$\frac{1}{r} = \frac{mB}{mv_\perp c} + \frac{eE_\perp}{mv_\perp^2} \quad \text{(в точке } B\text{)}.$$

В результате окружность перейдет в незамкнутую кривую, двигаясь по которой проекция частицы будет медленно перемещаться вправо (рис. 197, справа). Это перемещение и есть электрический дрейф. Для отрицательно заряженной частицы аналогичное перемещение представлено на рис. 198. В обоих случаях частица дрейфует вправо, т. е. направление электрического дрейфа, как это и должно быть, *не зависит от знака заряда частицы.*

Скорость электрического дрейфа легко определить из следующих соображений. В положениях C и D (рис. 197) частица движется с одной и той же скоростью v_C, которая больше скорости частицы в нижнем положении B и меньше скорости ее в верхнем положении A на одну и ту же величину u. Величина u и есть скорость электрического дрейфа: $u = v_д$. Действительно, если ввести систему отсчета, движущуюся вправо

со скоростью u, то в этой системе скорости частицы в положениях A и B сравняются, и частица будет равномерно вращаться по окружности. Величину u определим из уравнения энергии: $m(v_C+u)^2/2-mv_C^2/2 = eE_\perp\rho$. Подставляя сюда $\rho = mcv_C/(eB)$ и пренебрегая квадратом скорости u, получим

$$v_д = u = \frac{E_\perp}{B}\,c.$$

что совпадает с формулой (86.3а).

4. Дрейф, вызванный изменениями магнитного поля только по числовому значению. Для определения мгновенной скорости дрейфа введем локальную систему отсчета, направив ось Z вдоль магнитного поля $\mathbf{B}$. Единичный вектор вдоль $\mathbf{B}$ обозначим через $\mathbf{h}$. Направление главной нормали N к магнитной силовой линии примем за ось Y. Ось X направим в отрицательную сторону бинормали $\mathbf{b} = [\mathbf{hN}]$ (рис. 199).

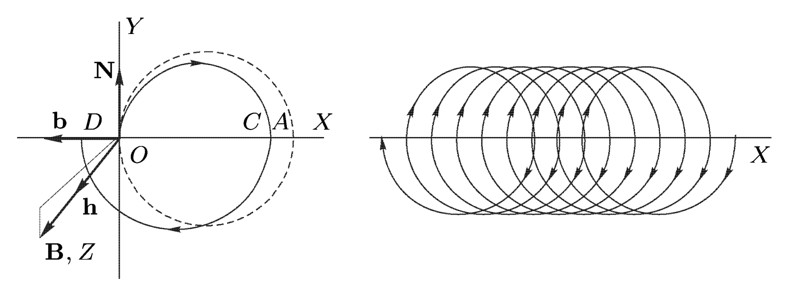


Рис. 199

Максимальное изменение числового значения магнитного поля происходит в направлении главной нормали $\mathbf{N}$. В случае, который нас более всего интересует, когда частица движется в области пространства, где не текут электрические токи, поле $\mathbf{H} \equiv \mathbf{B}$ в направлении $\mathbf{N}$ будет возрастать. Для доказательства возьмем в соприкасающейся плоскости две бесконечно близкие магнитные силовые линии BC и AD и два бесконечно коротких отрезка AB и CD, перпендикулярных к этим силовым линиям (рис. 200). Циркуляция вектора $\mathbf{H}$ по бесконечно малому контуру $BCDA$ будет $H_1l_1 - H_2l_2$, где l_1 и l_2 — длины сторон BC и AD, а H_1 и H_2 — напряженности магнитного поля на этих сторонах. Так как в отсутствие электрических токов эта циркуляция равна нулю, то магнитное поле H будет больше на более короткой стороне. Отсюда и следует наше утверждение.

Сейчас речь идет о влиянии на скорость дрейфа изменения магнитного поля, но не его направления. Поэтому можно отвлечься от кривизны магнитных силовых линий и считать их прямолинейными. Можно также отвлечься от наличия продольной составляющей скорости $\mathbf{v}_\parallel$, так как движение вдоль магнитного поля не влияет на силы, действующие на частицу. Иными словами, во всех промежуточных расчетах под

$\mathbf{v}$ следует понимать поперечную скорость $\mathbf{v}_\perp$. Ради краткости опустим всюду значок $\perp$, за исключением окончательных формул, в которых поперечная скорость по-прежнему будет обозначаться через $\mathbf{v}_\perp$. Кроме того, во всех промежуточных расчетах заряд частицы e будем считать положительным.

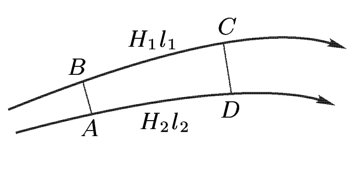


Рис. 200

Положительно заряженная частица будет вращаться по часовой стрелке, как указано на рис. 199. Выйдя из точки O, частица двигалась бы по окружности радиуса $\rho = v/\omega_B$, если бы магнитное поле $\mathbf{B}$ было постоянно. Эта окружность изображена на рис. 199 пунктиром. Она пересекает ось X в точке A на расстоянии $OA = 2\rho$ от точки O. В действительности магнитное поле, а с ним и кривизна траектории возрастают с возрастанием координаты y. Поэтому частица вернется к оси X в какой-то точке C, расположенной левее A. При движении в нижней половине плоскости XY, наоборот, кривизна траектории будет меньше, а потому частица пересечет ось X в точке D, расположенной левее O. Таким образом, за один оборот положительно заряженная частица сместится влево на отрезок OD. Отрицательно заряженная частица сместилась бы в противоположном направлении. При медленном изменении магнитного поля в пространстве траектория частицы за один оборот мало отличается от окружности, и смещение OD будет мало по сравнению с радиусом ρ. Путь частицы за время многих оборотов изображен на рис. 199 справа. Частица быстро вращается по окружности, центр которой медленно перемещается параллельно оси X. Такое перемещение и есть дрейф.

Найдем теперь скорость дрейфа $v_\text{д}$, усреднив движение частицы по быстрому ларморовскому вращению. Уравнение движения частицы $\dot{\mathbf{v}} = [\mathbf{v}\omega_B]$ запишем в координатной форме:

$$\dot{v}_x = v_y \omega_B, \quad \dot{v}_y = -v_x \omega_B.$$

Поскольку дрейф происходит параллельно оси X и отсутствует в направлении оси Y, скорость дрейфа $v_\text{д} = \overline{v}_x$ найдется из требования, что среднее значение v_y, а следовательно, и $\dot{v}_y = -v_x\omega_B$ равно нулю, т. е. $\overline{v_x\omega_B} = 0$. Разложим ω_B в ряд по степеням y и оборвем это разложение на линейном члене:

$$\omega_B = \omega_0 + \left(\frac{d\omega_B}{dy}\right)_{y=0} y.$$

Тогда

$$\overline{v}_x\omega_0 + \frac{d\omega_B}{dy}\,\overline{yv_x} = 0.$$

Так как величина $d\omega_B/dy$ предполагается малой, то среднее значение произведения $yv_x = y\dot{x}$ достаточно вычислить в нулевом приближении,

т. е. считать при вычислении, что частица вращается по окружности

$$x = \rho \cos \omega_0 t, \quad y = -\rho \sin \omega_0 t.$$

Тогда

$$\overline{y\dot{x}} = \rho^2 \omega_0 \overline{\sin^2 \omega_0 t} = \frac{\rho^2 \omega_0}{2},$$

и, следовательно,

$$v_{\text{д}} = \overline{v}_x = -\frac{\rho^2}{2} \frac{d\omega_B}{dy}.$$

В векторной форме:

$$\mathbf{v}_{\text{д}} = \frac{\rho^2}{2} \frac{d\omega_B}{dy} \mathbf{b}, \tag{87.1}$$

или с учетом соотношений $\rho = v/\omega_B$ и $\omega_B = eB/(mc)$

$$\mathbf{v}_{\text{д}} = \frac{mcv_\perp^2}{2eB^2} \frac{\partial B}{\partial N} \mathbf{b}. \tag{87.2}$$

В этом виде формула верна и для положительно заряженной, и для отрицательно заряженной частицы. *Положительно заряженная частица дрейфует в положительном направлении бинормали к магнитной силовой линии, отрицательно заряженная — в отрицательном направлении.*

Придадим теперь формуле (87.2) более наглядную геометрическую форму, предполагая, что пространство, в котором движется частица, свободно от электрических токов. Имея в виду, что поле **B** в рассматриваемой точке направлено вдоль оси Z, запишем формулу (87.2) в виде

$$\mathbf{v}_{\text{д}} = \frac{mcv_\perp^2}{2eB^2} \frac{\partial B_z}{\partial y} \mathbf{b}.$$

Так как при отсутствии электрических токов $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$, то $\partial B_z/\partial y = \partial B_y/\partial z$, и, следовательно,

$$\mathbf{v}_{\text{д}} = \frac{mcv_\perp^2}{2eB^2} \frac{\partial B_y}{\partial z} \mathbf{b}.$$

Как видно из рис. 201, $\operatorname{tg} \alpha = B_y/B_z$, где α — угол между касательной к магнитной силовой линии и осью Z. В начале координат O касательная горизонтальна, а потому в его малой окрестности $\operatorname{tg} \alpha$ можно заменить на α. По той же причине дифференцирование по дуге магнитной силовой линии можно заменить дифференцированием по координате z. Радиус кривизны R силовой линии определяется соотношением

$$\frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{B_y}{B_z}\right) = \frac{1}{B_z}\frac{\partial B_y}{dz} - \frac{B_y}{B_z^2}\frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{B}\frac{\partial B_y}{\partial z},$$

так как в точке O $B_z = B$, $B_y = 0$. В результате получается

$$\mathbf{v}_{\text{д}} = \frac{mcv_\perp^2}{2eBR} \mathbf{b}. \tag{87.3}$$

5. Дрейф, вызванный искривлением магнитных силовых линий. Для расчета скорости этого дрейфа введем локальную систему отсчета, вращающуюся вокруг центра кривизны C магнит-

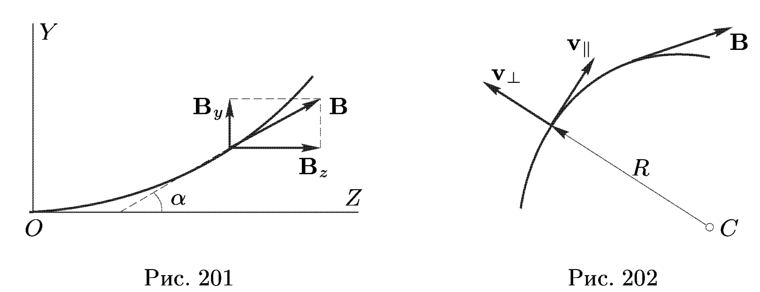


Рис. 201 Рис. 202

ной силовой линии (рис. 202). Ось вращения направим параллельно бинормали $\mathbf{b}$ этой силовой линии (она перпендикулярна к плоскости рисунка). Числовое значение угловой скорости вращения $\boldsymbol{\Omega}$ определим из условия $\mathbf{v}_{\parallel} = [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{R}]$. Тогда в рассматриваемой локальной системе отсчета частица будет иметь только поперечную скорость $\mathbf{v}_{\perp}$, которая играет роль относительной скорости $\mathbf{v}_{\text{отн}}$. При рассмотрении движения в локальной системе отсчета к действующим силам надо добавить две силы инерции: кориолисову и центробежную. Силу инерции, вызванную неравномерностью вращения, учитывать не надо, так как она может влиять на дрейф частицы лишь во втором или высшем порядке малости. Кориолисова сила инерции $2m[\mathbf{v}_{\text{отн}}\boldsymbol{\Omega}] = 2m\Omega[\mathbf{v}_{\perp}\mathbf{b}]$ направлена вдоль силовой линии, а потому она будет изменять только продольную составляющую $v_{\parallel}$ скорости $\mathbf{v}$. Центробежная сила инерции $mv_{\parallel}^2\mathbf{R}/R^2$ вызовет дрейф в перпендикулярном направлении. Скорость этого дрейфа, согласно формуле (86.4), определяется выражением

$$\mathbf{v}_{\text{д}} = \frac{c}{B^2 e}\left[\frac{mv_{\parallel}^2}{R^2}\,\mathbf{R}\mathbf{B}\right] = -\frac{mcv_{\parallel}^2}{BeR}\,[\mathbf{N}\mathbf{h}].$$

Если $\mathbf{N}$ — единичный вектор главной нормали к магнитной силовой линии, то $\mathbf{R} = -R\mathbf{N}$. Поэтому, полагая в последнем соотношении $\mathbf{B} = B\mathbf{h}$ и учитывая, что $\mathbf{b} = [\mathbf{h}\mathbf{N}]$, получим

$$\mathbf{v}_{\text{д}} = \frac{mcv_{\parallel}^2}{BRe}\,\mathbf{b}. \qquad (87.4)$$

Поскольку дрейф, выражаемый этой формулой, вызывается центробежной силой инерции, он называется *центробежным дрейфом.*

6. Теперь можно обратиться к общему случаю, т. е. к случаю произвольного электромагнитного поля, для которого справедливо дрейфовое приближение. Так как все дрейфы, которые были рассмотрены, в первом приближении независимы, то в общем случае их надо просто сложить. Таким путем для скорости сглаженного движения ведущего

центра в пространстве, где не текут электрические токи, получаем

$$\mathbf{V} = v_{\parallel}\mathbf{h} + \frac{c}{B^2}\,[\mathbf{EB}] + \frac{mc}{eBR}\left(v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}\,v_{\perp}^2\right)\mathbf{b}. \qquad (87.5)$$

Здесь произведены небольшие изменения в обозначениях. Под $\mathbf{h}$ мы теперь понимаем единичный вектор касательной к магнитной силорой линии, проходящей *через ведущий центр*, а не через саму частицу. Величины же $v_{\parallel}$ и $v_{\perp}$ означают *усредненные скорости* частицы вдоль этого *нового вектора* $\mathbf{h}$ и перпендикулярно к нему. Точно так же значения полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ мы берем *в точке нахождения ведущего центра*, а не частицы. Такая замена совершенно не затрагивает все слагаемые в правой части формулы (87.5), за исключением первого, так как она меняет эти слагаемые только в первом или высшем порядке малости. Но эта замена существенна для слагаемого $v_{\parallel}\mathbf{h}$, так как она нулевого порядка малости. Если бы сохранить прежний смысл вектора $\mathbf{h}$, то в это слагаемое надо было бы ввести поправку первого порядка малости. Если же понимать $\mathbf{h}$ в новом смысле, как мы сделали, то такая поправка не нужна.

Итак, *в сильном, но слабо неоднородном магнитном поле при наличии слабого электрического поля заряженная частица быстро вращается по ларморовской окружности. Центр ларморовской окружности движется вдоль магнитной силовой линии со скоростью $v_{\parallel}$ и испытывает дрейф перпендикулярно к магнитному полю. Дрейф вызывается электрическим полем и неоднородностями магнитного поля. Скорость электрического дрейфа определяется выражением* $(c/B^2)[\mathbf{EB}]$. *Направление этого дрейфа не зависит от знака заряда частицы. Дрейф, вызываемый неоднородностями магнитного поля, происходит в направлении бинормали к магнитной силовой линии, причем положительно заряженные частицы дрейфуют в положительном направлении бинормали, а отрицательно заряженные — в противоположном направлении. Скорость этого «магнитного» дрейфа определяется выражением* $\dfrac{mc}{eBR}\left(v_{\parallel}^2 + \dfrac{1}{2}\,v_{\perp}^2\right)\mathbf{b}$.

§ 88. Адиабатический инвариант

1. При движении заряженной частицы в неоднородном магнитном поле или при изменении самого магнитного поля ларморовский радиус частицы ρ, а также ее поперечная скорость $v_{\perp}$ изменяются. Исследуем характер этого изменения, предполагая, что магнитное поле слабо неоднородно и меняется во времени медленно.

Рассмотрим сначала случай, когда частица движется перпендикулярно к магнитному полю $\mathbf{B}$, а само поле $\mathbf{B}$ однородно и меняется только во времени. Предположим, что электрического поля нет, за исключением поля, обусловленного изменениями $\mathbf{B}$ во времени. В этих условиях дрейф частицы отсутствует, как это видно из формулы (87.5). Если бы магнитное поле было постоянно, то частица двигалась бы

по окружности радиуса $\rho = v/\omega$. При изменении магнитного поля траектория частицы перестает быть замкнутой. Однако если магнитное поле меняется медленно, то за циклотронный период $T = 2\pi/\omega$ отклонения траектории от окружности будут малы. Переменное магнитное поле индуцирует поле электрическое. Вследствие этого ларморовский радиус ρ и скорость частицы v изменяются в соответствии с уравнением $m\dot{v} = eE_s$, где E_s — проекция электрического поля $\mathbf{E}$ на направление траектории. Изменениями величины E_s за циклотронный период можно пренебречь, а ввиду незначительности отклонения траектории от ларморовской окружности вместо E_s можно взять проекцию вектора $\mathbf{E}$ на направление ларморовской окружности (последняя на рис. 203 изображена штриховой линией). Тогда E_s определится из уравнения

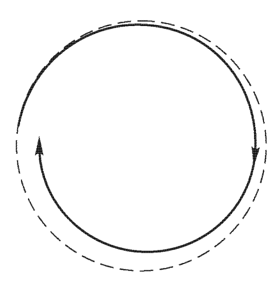


Рис. 203

$$\oint E_s\,ds = \frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\pi\rho^2}{c}\frac{dB}{dt}.$$

Здесь производная $d\Phi/dt$ взята с плюсом, а не с минусом, так как речь идет о проекции на направление движения частицы, а оно при $e > 0$ противоположно положительному направлению обхода контура. Написанное уравнение дает

$$E_s = \frac{\rho}{2c}\frac{dB}{dt} = \frac{mv}{2eB}\frac{dB}{dt}.$$

Уравнение движения частицы переходит в

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{mv}{2B}\frac{dB}{dt}.$$

Отсюда после интегрирования получим

$$v^2/B = \text{const}.$$

Таким образом, величина v^2/B при движении частицы сохраняется неизменной. Однако это справедиво только при *медленных изменениях* магнитного поля, т. е. величина v^2/B является не точным интегралом движения, а *адиабатическим инвариантом.*

Если у частицы есть продольная скорость $v_{\parallel}$, то эта скорость не окажет никакого влияния на поперечное движение. В нашем рассуждении полную скорость v надо просто заменить ее поперечной составляющей $v_{\perp}$, что дает

$$v_{\perp}^2/B = \text{const}.$$

Адиабатическим инвариантом будет величина $v_{\perp}^2/B$.

2. Рассмотрим теперь случай, когда магнитное поле, в котором движется частица, постоянно, но слабо неоднородно. Допустим, что дрейф в боковом направлении отсутствует, т. е. ведущий центр частицы движется вдоль магнитной силовой линии. Последнюю ради простоты будем считать прямолинейной (она на рис. 204 изображена штриховой

линией). Частица может двигаться как в сторону схождения, так и в сторону расхождения магнитных силовых линий. При движении на частицу действует сила Лоренца $\mathbf{F} = (e/c)[\mathbf{vB}]$. Она имеет слагающую вдоль центральной силовой линии. Эта слагающая будет замедлять продольное движение частицы, если оно происходит в направлении схождения магнитных силовых линий, и ускорять в противоположном случае. А так как полная кинетическая энергия частицы сохраняется, то возрастание продольной скорости $v_\parallel$ будет сопровождаться убыванием поперечной $v_\perp$, и наоборот. Покажем, что при этом соотношение (88.1) остается справедливым. Для этого достаточно перейти к системе отсчета, движущейся со скоростью $\mathbf{v}_\parallel$. Поступательная сила инерции — $m\dot{\mathbf{v}}_\parallel$, появляющаяся в этой системе, параллельна магнитному полю $\mathbf{B}$, а потому не оказывает никакого влияния на скорость дрейфа. Однако в движущейся системе отсчета магнитное поле $\mathbf{B}$ становится переменным, и к нему полностью применимы рассуждения, которыми мы пользовались при доказательстве формулы (88.1).

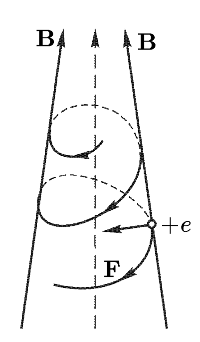


Рис. 204

3. Допустим теперь, что есть дрейф в поперечном направлении со скоростью $\mathbf{v}_д$. Этот дрейф может вызываться либо электрическим полем, либо неоднородностями магнитного поля, либо и тем и другим. Он может вызываться и любыми другими силами. Для последующего изложения все это не имеет значения. Перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью $\mathbf{v}_д$. Силой инерции — $m\dot{\mathbf{v}}_д$ в этом случае можно пренебречь, как величиной второго или высшего порядка малости. После этого рассматриваемый случай сведется к уже рассмотренным. Отсюда следует, что адиабатическим инвариантом будет величина $\mathbf{v}'^2_\perp/B$, где $\mathbf{v}'$ — скорость частицы в движущейся системе отсчета. Но $v'_\perp$ есть скорость вращения частицы по ларморовской окружности, если отвлечься от дрейфового движения последней и от движения вдоль магнитной силовой линии. Таким образом, адиабатическая инвариантность $v^2_\perp/B$ сохраняется, если понимать под $v_\perp$ скорость вращения частицы по ларморовской окружности в только что указанном смысле.

4. Частица, вращающаяся по ларморовскому кружку, обладает магнитным моментом $\mathfrak{M}$, величина которого, как легко вычислить, равна $mv^2_\perp/(2B)$. Этот момент направлен против поля независимо от знака заряда частицы, а потому в векторной форме

$$\mathfrak{M} = -\frac{mv^2_\perp}{2B}\,\mathbf{h}. \tag{88.1}$$

Аналогично, магнитный поток через ларморовский кружок равен

$$\varPhi = \pi\frac{m^2c^2v^2_\perp}{e^2B}. \tag{88.2}$$

С учетом соотношения (88.1) отсюда следует, что обе величины $\mathfrak{M}$ и Φ являются адиабатическими инвариантами.

5. С адиабатической инвариантностью величины (88.1) связано явление *отражения заряженных частиц от областей сильного магнитного поля.* Пусть магнитное поле не меняется во времени, а частица движется в сторону схождения магнитных силовых линий. Тогда, как было выяснено в п. 2, ее продольная скорость будет уменьшаться, а поперечная — увеличиваться. Если $\mathbf{v}$ — полная скорость, а α — угол наклона ее к магнитной силовой линии, то $v_\perp = v \sin\alpha$. А так как при движении в постоянном магнитном поле числовое значение скорости $\mathbf{v}$ не изменяется, то из (88.1) следует

$$\frac{\sin^2\alpha}{B} = \frac{\sin^2\alpha_0}{B_0} = \text{const}. \tag{88.3}$$

Здесь индексом нуль обозначены значения B и α в каком-либо положении частицы, условно принимаемом за исходное. Из полученного соотношения следует, что в область, определяемую условием $B > B_0/\sin^2\alpha_0$, частица проникнуть не может, так как в противном случае $|\sin\alpha|$ должен был бы превзойти единицу. По мере продвижения в область более сильного поля угол α будет возрастать. Если при этом он все время остается меньше 90°, то частица будет продолжать движение вперед. Это будет тогда, когда для всех точек траектории выполняется условие

$$\sin\alpha_0 < \sqrt{B_0/B}. \tag{88.4}$$

Если же угол α в некоторой точке достигает 90°, то частица начнет двигаться в обратном направлении, т. е. отразится. Явление напоминает полное отражение света в оптике. Точка, где произойдет отражение, определяется уравнением

$$\sin\alpha_0 = \sqrt{B_0/B}. \tag{88.5}$$

§ 89. Определение удельного заряда частицы

1. *Удельным зарядом частицы* называется отношение заряда e этой частицы к ее массе m. При определении этого отношения заряд e принято выражать в единицах СГСМ, а массу m — в граммах. В соответствии с этим в настоящем параграфе применяется система СГСМ. Удельный заряд можно определить, исследуя движение частицы в поперечных электрическом и магнитном полях. Такие исследования производились Дж. Дж. Томсоном и его сотрудниками в конце прошлого и начале настоящего столетия с целью установления природы катодных и анодных лучей в трубках с разреженными газами (давление порядка нескольких сотых мм рт. ст.). Они привели к открытию *электрона* и *изотопов*, т. е. химических элементов, ядра которых имеют одинаковые заряды, но различные массы.

2. Исследуем сначала движение частицы в поперечном электрическом поле заряженного конденсатора. Направим ось X параллельно пластинам конденсатора, а ось Z — перпендикулярно. Пусть частица перед входом в конденсатор двигалась вдоль оси X (рис. 205). В дальнейшем под действием электрического поля конденсатора она отклонится в направлении оси Z и будет двигаться в плоскости ZX. Уравнения движения частицы имеют вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = eE_x, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = eE_z. \quad (89.1)$$

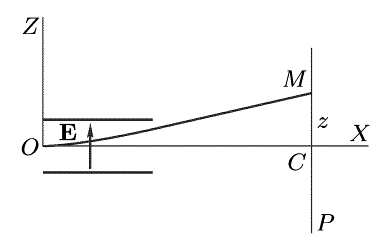


Рис. 205

Будем предполагать, что угол наклона траектории частицы к оси X на протяжении всего движения мал и, следовательно, $v_z \ll v_x$. В этом случае величиной v_z^2 написать можно пренебречь по сравнению с v_x^2 и написать

$$v_x = \sqrt{v^2 - v_z^2} \approx v\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v_z}{v}\right)^2\right] \approx v,$$

где v — полная скорость частицы. В том же приближении скорость v можно считать постоянной, а движение параллельно оси X — равномерным. Исключив время t с помощью соотношения $dx = v\,dt$, получим уравнение траектории в дифференциальной форме:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{e}{mv^2}E_z. \quad (89.2)$$

В конденсаторе электрическое поле однородно и равно $\mathbf{E}$, за исключением малой области вблизи его краев, где E_z меняется от E до 0. Выйдя из конденсатора, частица движется свободно, т. е. прямолинейно и равномерно, и попадает на фотопластинку P в точке M, отклонившись от оси X на расстояние $z = CM$. Отклонение z найдется двукратным интегрированием уравнения (89.2) и равно

$$z = A\frac{e}{mv^2}, \quad (89.3)$$

где A — постоянная прибора:

$$A = \int_0^L dx \int_0^x E_z(x')\,dx',$$

а через L обозначено расстояние OC от начала координат O до фотопластинки. Введя обозначение $f(x) = \int_0^x E_z(x')\,dx'$, можем написать $A = \int_0^L f(x)\,dx$. После этого, выполнив интегрирование по частям, получим

$$A = \int_0^L (L-x)E_x\,dx. \tag{89.4}$$

Если пренебречь неоднородностью поля на краях конденсатора, то интегрирование легко выполняется и приводит к результату

$$A = El(L - l/2),$$

где l — длина конденсатора.

3. Рассмотрим теперь движение заряженной частицы поперек магнитного поля в аналогичных условиях. Поле предполагается однородным направленным параллельно оси Y (рис. 206). Исключение составляют только края области, занимаемой магнитным полем, где существуют отступления от однородности. Однако, как и в случае электрического поля, влияние неоднородностей магнитного поля предполагается малым. Пусть частица перед входом в магнитное поле по-прежнему двигалась в направлении оси X, а в дальнейшем отклонялась от этого направления мало. Тогда при вычислении силы Лоренца $\mathbf{F} = e[\mathbf{vB}]$ скорость $\mathbf{v}$ можно считать направленной всюду параллельно оси X, т. е. вдоль единичного вектора $\mathbf{i}$: $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$. В этом приближении

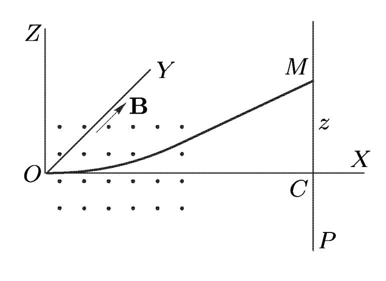


Рис. 206

$$\mathbf{F} = ev[\mathbf{iB}] = ev([\mathbf{ij}]B_y + [\mathbf{ik}]B_z) = ev(B_y\mathbf{k} - B_z\mathbf{j}).$$

Так как основное поле параллельно оси Y, то составляющей B_z можно пренебречь. Тогда частица будет отклоняться в направлении оси Z в соответствии с уравнением

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = evB_y.$$

Это уравнение может быть получено из второго уравнения (89.1), если в нем E_z заменить на vB_y. Поэтому, не производя дальнейших вычислений, можно написать сразу

$$z = C\frac{e}{mv}, \tag{89.5}$$

где C — постоянная прибора:

$$C = \int_0^L (L-x)B_y\,dx. \tag{89.6}$$

4. Таким образом, отклонения в поперечном электрическом поле пропорциональны $e/(mv^2)$, а в поперечном магнитном поле — $e/(mv)$.

Поэтому, измерив эти отклонения, можно вычислить не только, удельный заряд e/m, но и скорость частицы v. Практически удобно конденсатор поместить в магнитное поле, чтобы частица подвергалась одновременному действию электрического и магнитного полей. Сами поля **E** и **B** могут быть либо параллельными, либо перпендикулярными друг к другу. В ранних исследованиях опыты производились с катодными лучами (электронами) и с анодными лучами (ионами).

Если электрическое поле конденсатора **E** перпендикулярно к магнитному полю **B**, то эти поля будут отклонять частицу в одном и том же или в прямо противоположных направлениях (на рисунках 205 и 206 в направлении оси Z). Удобно напряжение на конденсаторе подобрать таким, чтобы для частиц с определенной скоростью эти отклонения компенсировали друг друга, т. е. чтобы частица проходила через прибор без отклонения. Затем надо выключить одно из полей и измерить получающееся отклонение. Тогда

$$z = A\frac{e}{mv^2} = -C\frac{e}{mv}.$$

Измерив z, отсюда легко вычислить скорость v и удельный заряд e/m. Таким путем Дж. Дж. Томсон в 1897 г. впервые измерил e/m для катодных лучей.

Одна из трудностей в этих исследованиях состояла в том, что частицы в электронных и ионных пучках обладали большим разбросом скоростей. Для исключения влияния этого разброса электрическое и магнитное поля выбирались параллельными друг другу. Допустим, что они направлены вдоль оси Z. Тогда электрическое поле будет отклонять частицу в направлении оси Z, а магнитное — в направлении оси Y. Для этих отклонений можно написать

$$z = A\frac{e}{mv^2}, \quad y = C\frac{e}{mv}.$$

Эти соотношения дают в параметрической форме уравнение кривой на фотопластинке, на которую попадают частицы с одинаковым удельным зарядом e/m, но с различными скоростями v. Параметром служит скорость v. Исключив этот параметр, представим уравнение той же кривой в виде

$$z = \frac{A}{C^2}\,\frac{m}{e}\,y^2.$$

Это — парабола. Измеряя отношение z/y^2, можно вычислить удельный заряд e/m. Этим *методом парабол* Дж. Дж. Томсон в 1912 г. открыл изотопы нерадиоактивных элементов (неон).

Развитие вакуумной техники и разработка источников электронов и ионов позволили производить подобные измерения в более определенных и лучше контролируемых условиях. Например, для получения пучка электронов с определенной скоростью v можно использовать явление *термоэлектронной эмиссии.* Источником электродов служит

раскаленная вольфрамовая нить. Электроны, испущенные этой нитью, ускоряются до определенной энергии приложенным напряжением и одновременно коллимируются с помощью отверстий или щелей, а затем подвергаются отклонению в электрических и магнитных полях.

В нашу задачу не входит изложение современных методов измерения удельных зарядов. Этим занимается *масс-спектрометрия* и *масс-спектрография.* Укажем только на основной результат, установленный еще в конце прошлого столетия. Оказалось, что в случае анодных лучей удельный заряд e/m зависит от состава газа в трубке и составляет 10^4 СГСМ-ед. заряда/г или меньше. Для катодных лучей эта величина много больше, а именно $e/m = 1{,}759 \cdot 10^7$ СГСМ-ед. заряда/г, и не зависит от состава газа в трубке. Установление этого факта Дж. Дж. Томсоном в 1897 г. означало открытие электрона.

ЗАДАЧА

В одном из ранних методов определения удельного заряда электрона электроны, вырванные из алюминиевого диска K, ускорялись разностью потенциалов V, приложенной между K и щелью S (рис. 207). Пройдя через щель S, электронный пучок попадал в однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости рисунка. Вся система помещалась в вакууме. Изменяя напряженность магнитного поля, добивались того, чтобы ток на коллекторе C, регистрируемый гальванометром Г, был максимален. Измерив магнитное поле B в этот момент, можно вычислить e/m. Провести этот расчет, если расстояние между щелью S и коллектором C равно $d = 10$ см, угол между прямой, проведенной от S к C, и начальным направлением электронного пучка $\alpha = 30°$, $V = 1000$ В, $B = 10{,}6$ Гс.

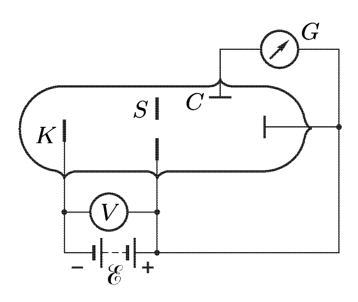


Рис. 207

Ответ. Удельный заряд $\dfrac{e}{m} = \dfrac{8V}{B^2 d^2} \sin^2 \alpha = 1{,}78 \cdot 10^7$ СГСМ-ед. заряда/г.

§ 90. Измерение элементарного заряда методом масляных капель

1. Опыты по измерению удельного заряда e/m укрепили представление об атомистической природе электричества. Дж. Дж. Томсон и его ученики Таунсенд (1868–1957) и Чарльз Вильсон (1869–1959) произвели первые измерения и самого *элементарного заряда*, т. е. наименьшего электрического заряда, встречающегося в природе. Однако их методами нельзя было получить точные результаты. Точные измерения были выполнены Робертом Милликеном (1868–1953) в классических опытах в 1908–1916 гг. Эти опыты принесли также неопровержимое

доказательство *атомизма электричества.* Милликен измерял электрический заряд малых капелек масла. Схема его установки показана на рис. 208. В тщательно изготовленный плоский конденсатор через отверстие в верхней пластине могут попадать мелкие капельки масла, получаемые с помощью специального распылителя. С целью предохранения капелек от конвекционных потоков воздуха конденсатор заключен в защитный кожух, температура и давление воздуха в котором поддерживаются постоянными. На пластины конденсатора можно было накладывать постоянное напряжение от источника в несколько тысяч вольт. В ходе опыта это напряжение можно было менять. При распылении капельки масла заряжаются и, попадая в конденсатор, движутся под действием собственного веса и приложенного электрического поля. Движение отдельной капельки можно наблюдать с помощью микроскопа через специальное окошко.

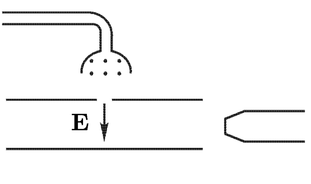


Рис. 208

Аналогичной установкой пользовался А.Ф. Иоффе (1880–1960) в 1912 г. В его опытах вместо капелек масла применялись цинковые пылинки, а также капельки ртути.

2. Допустим сначала, что электрического напряжения на конденсаторе нет. Тогда капля, попавшая в кондесатор, будет падать вниз под действием собственного веса, встречая при этом падении силу сопротивления kv, пропорциональную скорости капли v. Установившаяся скорость падения v_g в поле тяжести определится уравнением

$$kv_g = (m - m_0)g, \tag{90.1}$$

где m — масса капли, а m_0 — масса вытесненного ею воздуха. Последняя введена для учета архимедовой подъемной силы. Если капля заряжена, то при наложении электрического поля E ее движение изменится. Поле E подбирают таким, чтобы капля стала подниматься вверх. Если v_E — установившаяся скорость капли при подъеме вверх, а q — ее заряд, то

$$kv_E = qE - (m - m_0)g.$$

Из этих уравнений находим

$$q = \frac{k(v_g + v_E)}{E}. \tag{90.2}$$

Освещением рентгеновскими лучами можно слегка ионизовать воздух между пластинами конденсатора. Тогда заряд капли, а с ним и скорость установившегося движения ее в том же электрическом поле могут скачкообразно измениться. Если капля по-прежнему поднимается вверх с установившейся скоростью v'_E, то ее новый заряд будет

$$q' = \frac{k(v_g + v'_E)}{E},$$

и, следовательно,

$$\frac{q'}{q} = \frac{v_g + v'_E}{v_g + v_E}.$$

Измеряя скорости установившегося движения одной и той же капли в одном и том же электрическом поле, можно сравнивать заряды q и q'. Если капля мала, а электричество имеет атомистическое строение, то можно ожидать, что заряд капли будет состоять из небольшого количества элементарных зарядов e. В таком случае отношение q'/q будет отношением небольших целых чисел. Это и наблюдалось в опытах Милликена и Иоффе.

При другом способе обработки наблюдений вычисляются скачки скорости Δv_E одной и той же капли при ее перезарядке. Согласно формуле (90.2) они связаны с изменением заряда капли Δq соотношением

$$\Delta q = k\frac{\Delta v_E}{E}. \tag{90.3}$$

Если электричество имеет атомистическое строение, то величина Δq должна принимать только определенные дискретные значения, равные целому числу элементарных зарядов. В частности, сам элементарный заряд e будет равен наименьшему из этих значений Δq (за исключением, конечно, значения $\Delta q = 0$). Поэтому изменения установившейся скорости капли Δv_E при перезарядке должны носить скачкообразный характер и быть кратными определенной наименьшей величине. Это также подтвердили наблюдения.

3. Для количественного определения заряда капли по формуле (90.2) необходимо знать коэффициент k. Его можно вычислить по формуле Стокса $k = 6\pi\eta a$, где η — вязкость воздуха (см. т. I, § 101). Из-за малости капли прямое измерение ее радиуса a с помощью микроскопа невозможно. Микроскоп дает лишь *дифракционное изображение* капли в виде яркой звездочки, получающейся вследствие рассеяния света на капле. Форма и размер этого дифракционного изображения не имеют никакого сходства с действительными формой и размерами рассеивающей капли. Для определения радиуса a можно воспользоваться той же формулой Стокса. Подставляя в формулу (90.1)

$$k = 6\pi\eta a, \quad m - m_0 = \frac{4\pi}{3}a^3(\rho - \rho_0),$$

где ρ — плотность масла, а ρ_0 — воздуха, находим

$$a = \sqrt{\frac{9\eta v_g}{2(\rho - \rho_0)}}, \tag{90.4}$$

и, следовательно,

$$q = \frac{9\pi\eta}{E}\sqrt{\frac{2\eta v_g}{\rho - \rho_0}}\,(v_g + v_E). \tag{90.5}$$

Наименьшее значение q или Δq, вычисленное по формуле (90.5) и будет равно элементарному заряду e.

4. На деле оказалось, что в случае очень малых капель вычисления по формуле (90.5) приводили к аномально большим значениям элементарного заряда e, которые были тем больше, чем меньше размер капли. Милликен объяснил этот результат неприменимостью формулы Стокса к очень малым капелькам. Дело в том, что формула Стокса выводится в предположении, что вязкая среда, в которой движется шар, является *сплошной.* В случае газов для выполнения этого условия необходимо, чтобы средняя длина свободного пробега молекулы газа λ была мала по сравнению с размерами шара ($\lambda \ll a$). Кённингам в 1910 г., применяя кинетическую теорию газов, ввел поправку в формулу Стокса и получил

$$k = \frac{6\pi\eta a}{1 + A\lambda/a}, \tag{90.6}$$

где A — постоянная. Эту формулу можно также обосновать, записав знаменатель в виде $f(\lambda/a)$, а затем разложить его по степеням λ/a, оборвав это разложение на линейном члене относительно λ/a. Поскольку λ обратно пропорциональна давлению газа $\mathscr{P}$, формулу можно также привести к виду

$$k = \frac{6\pi\eta a}{1 + B/(\mathscr{P}a)}. \tag{90.7}$$

Постоянную B можно вычислить газокинетически, однако надежнее измерить ее экспериментально. Подстановка выражения (90.7) в формулу (90.1) приводит к кубическому уравнению относительно радиуса капли a:

$$\frac{\eta v_g}{1 + B/(\mathscr{P}a)} = \frac{2}{9}(\rho - \rho_0)a^2. \tag{90.8}$$

Так как дробь $B/(\mathscr{P}a)$ является малой поправкой, то это уравнение можно решить методом последовательных приближений. В нулевом приближении поправкой $B/(\mathscr{P}a)$ пренебрегаем совсем и получаем для a прежнее выражение (90.4). Его будем теперь обозначать через a_0, т. е.

$$a_0 = \sqrt{\frac{9\eta v_g}{2(\rho - \rho_0)}}. \tag{90.9}$$

Затем в знаменателе уравнения (90.8) дробь $B/(\mathscr{P}a)$ заменим на $B/(\mathscr{P}a_0)$ и из полученного таким путем квадратного уравнения найдем a в первом приближении. Далее можно было бы найти a во втором приближении и т. д. Однако это вряд ли имеет смысл, так как исходная формула (90.7) верна лишь с точностью до линейных членов относительно $B/(\mathscr{P}a)$. Однако, как показал Милликен, точность первого приближения уже достаточна.

Из изложенного ясно, что в первом приближении в формуле (90.5) вязкость η надо просто заменить на $\dfrac{\eta}{1 + B/(\mathscr{P}a_0)}$. Это дает

$$q = \frac{q_0}{[1 + B/(\mathscr{P}a_0)]^{3/2}},$$

где q_0 — заряд капли, вычисленный в нулевом приближении, т. е. по формуле (90.5), а q — заряд, вычисленный в первом приближении, который принимается за истинный заряд капли. В частности, для элементарного заряда e получаем

$$\left(\frac{e_0}{e}\right)^{2/3} = 1 + \frac{B}{\mathscr{P}a_0}. \tag{90.10}$$

Будем производить измерения при различных давлениях $\mathscr{P}$ и откладывать по оси абсцисс $1/(\mathscr{P}a_0)$, а по оси ординат $(e_0/e)^{2/3}$. Тогда должна получиться прямая линия (рис. 209). И действительно, Милликен убедился, что экспериментальные точки точно ложатся на одну прямую. Это доказывает правильность исходных положений, на которых основывались вычисления. Продолжив прямую (90.10) до пересечения с осью ординат, найдем, что в точке пересечения $e = e_0$. Величина e_0, соответствующая этой точке пересечения, и есть элементарный заряд e. Такое значение e мы получили бы по формуле (90.5), если бы производили измерения с большими каплями, когда применимость формулы Стокса не вызывает сомнений. По наклону прямой (90.10) можно определить и постоянную B. По современным данным, $e = 4{,}803 \cdot 10^{-10}$ СГСЭ-ед. $= 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл. Милликен получил несколько меньшее значение, так как он пользовался заниженным значением для вязкости воздуха. Зная e и удельный заряд e/m, можно вычислить массу электрона $m = 9{,}11 \cdot 10^{-28}$ г.

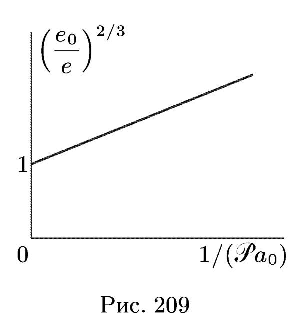


Рис. 209

§ 91. Электромагнитная масса

1. В § 84 было установлено, что закон сохранения импульса в электродинамике приводит к заключению, что электромагнитное поле должно обладать импульсом, плотность которого дается выражением

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c}\,[\mathbf{EH}]. \tag{91.1}$$

К такому заключению мы пришли, сопоставляя выражение для плотности потока электромагнитной энергии $\mathbf{S} = (c/4\pi)[\mathbf{EH}]$ с формулой Эйнштейна $\mathscr{E} = mc^2$. К тому же заключению в самом общем виде приводит и классическая электродинамика, не использующая теорию относительности. Мы убедились в этом в § 84 на частном примере.

2. Вычислим теперь электромагнитный импульс, связанный с равномерно движущимся зарядом. При вычислении будем предполагать, что скорость заряда v мала по сравнению со скоростью света c. Кроме того, предположим, что заряд равномерно распределен по поверхности шара радиуса a. В системе отсчета, в которой шар неподвижен, поля $\mathbf{E}$

и **B** внутри шара равны нулю. Значит, электрическое поле будет равно нулю и во всякой системе отсчета, относительно которой заряженный шар движется прямолинейно и равномерно. Это непосредственно следует из формулы преобразования электрического поля (66.6). Магнитное поле внутри шара также равно нулю, но этот результат нам пока не понадобится. Таким образом, для вычисления полного электромагнитного импульса $\mathbf{L}_{\text{эл}}$ выражение (91.1) надо проинтегрировать по объему всего бесконечного пространства вне шара.

Мы предполагаем, что заряд e движется в вакууме. В вакууме поля **B** и **H** тождественно совпадают между собой и определяются выражением

$$\mathbf{H} = \frac{e}{c}\left[\mathbf{v}\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right] = \frac{1}{c}\,[\mathbf{v}\mathbf{E}_0],$$

где $\mathbf{E}_0$ — статическое (кулоновское) поле заряда e. Электрическое поле **E** движущегося заряда отлично от статического поля $\mathbf{E}_0$. Однако при принятой нами точности расчета этим различием можно пренебречь. Действительно, поле **E** можно представить в виде ряда по степеням v/c. Первый член этого ряда есть статическое поле $\mathbf{E}_0$. Оно вносит в электромагнитное количество движения $\mathbf{L}_{\text{эл}}$ слагаемое, пропорциональное v/c. Последующие члены дают слагаемые порядка $(v/c)^2$, $(v/c)^3$ и т. д., которыми мы пренебрегаем. Итак, в принятом приближении

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c}\,[\mathbf{E}_0\mathbf{H}] = \frac{1}{4\pi c^2}\,[\mathbf{E}_0[\mathbf{v}\mathbf{E}_0]] = \frac{1}{4\pi c^2}\,\{E_0^2\mathbf{v} - (\mathbf{E}_0\mathbf{v})\mathbf{E}_0\}.$$

Примем направление скорости **v** за ось X. Тогда можно написать

$$(\mathbf{E}_0\mathbf{v})\mathbf{E}_0 = (E_{0x}v_x)(E_{0x}\mathbf{i} + E_{0y}\mathbf{j} + E_{0z}\mathbf{k}).$$

При интегрировании этого выражения целесообразно предварительно усреднить его по всем направлениям пространства. Тогда останется $\overline{E_{0x}^2}v_x\mathbf{i} = E_0^2\mathbf{v}/3$, и, следовательно,

$$\mathbf{L}_{\text{эл}} = \frac{4\mathbf{v}}{3c^2}\int\frac{E_0^2}{8\pi}\,dV,$$

или

$$\mathbf{L}_{\text{эл}} = \frac{4}{3}\,\frac{W_{\text{эл}}}{c^2}\,\mathbf{v}, \tag{91.2}$$

где $W_{\text{эл}}$ — электростатическая энергия заряда e. Заметим, что результат (91.2) справедлив для любого сферически симметричного, а не только для поверхностного распределения заряда в шаре. Действительно, исходя из уравнений Максвелла, нетрудно доказать, что электрическое и магнитное поля равномерно движущегося заряда связаны соотношением $\mathbf{H} = (1/c)[\mathbf{v}\mathbf{E}]$, а этого достаточно, чтобы получить формулу (91.2), если ограничиться при этом членами первого порядка по v.

Таким образом, благодаря наличию электромагнитного поля, к импульсу электрона добавляется электромагнитный импульс. При $v \ll c$

его можно представить в виде $L_{эл} = m_{эл}\mathbf{v}$, где

$$m_{эл} = \frac{4}{3}\frac{W_{эл}}{c^2}. \qquad (91.3)$$

Эта величина называется *электромагнитной массой.* Если электричество распределено по поверхности шара, то $W_{эл} = e^2/(2a)$ и, следовательно,

$$m_{эл} = \frac{2e^2}{3ac^2}. \qquad (91.4)$$

3. К понятию электромагнитной массы можно также прийти на основании следующих соображений. Энергия магнитного поля шара, заряженного по поверхности, определяется выражением

$$W_m = \int \frac{H^2}{8\pi}\, dV = \frac{e^2v^2}{8\pi}\int \frac{\sin^2\vartheta}{r^4}\, dV,$$

где ϑ — угол между направлениями скорости $\mathbf{v}$ и радиуса $\mathbf{r}$, проведенного из центра шара. Элемент объема представим в виде $dV = 2\pi r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta$ и получим

$$W_m = \frac{e^2v^2}{4}\int_a^\infty \frac{dr}{r^2}\int_0^\pi \sin^3\vartheta\, d\vartheta = \frac{e^2v^2}{3a} = \frac{m_{эл}}{2}\,v^2.$$

Благодаря наличию магнитного поля энергия шара увеличилась на величину W_m. Это увеличение можно трактовать как *увеличение кинетической энергии* или как *возрастание массы* шара на величину электромагнитной массы.

Недостаток второго вывода состоит в том, что в нем не выяснено влияние электрического поля, энергия которого также возрастает со скоростью $\mathbf{v}$. Однако если сопоставить второй вывод с первым, то можно прийти к заключению, что в принятом приближении электрическая энергия на величину электромагнитной массы не влияет. В этом приближении электромагнитная масса связана с энергией, идущей на *возбуждение только магнитного поля.*

4. В высших приближениях не только усиливается влияние энергии магнитного поля на электромагнитную массу, но появляется и влияние электрической энергии. Сама электромагнитная масса начинает зависеть от скорости электрона $\mathbf{v}$, а также от характера распределения электрического заряда внутри этой частицы и деформаций, возникающих при ее движении. Физики начала нашего столетия, вводя различные произвольные предположения относительно распределения заряда и деформаций электрона, пытались решить вопрос о природе массы электрона и ее зависимости от скорости. Считалось, что масса всякой частицы состоит из «истинной массы», не зависящей от скорости, и «кажущейся» электромагнитной массы, меняющейся со скоростью. Исследуя зависимость массы электрона от скорости, ученые пытались отделить истинную массу от кажущейся. В частности, был

поставлен вопрос, не является ли вся масса электрона кажущейся, т. е. электромагнитной. Эти исследования уже давно сохранили один только исторический интерес. Исследуя зависимость массы от скорости, нельзя решить вопрос о физической природе массы, так как теория относительности, в полном согласии с опытом, показала, что всякая масса, какова бы ни была ее природа, должна меняться со скоростью в соответствии с формулой

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{91.5}$$

причем между массой тела и его энергией должно существовать соотношение

$$\mathscr{E} = mc^2. \tag{91.6}$$

Этим вопрос о природе массы электрона, конечно, не снимается. Не снимается и гипотеза об электромагнитной массе электрона. То обстоятельство, что в формулу (91.3) входит числовой коэффициент 4/3, а в формуле Эйнштейна (91.6) такого коэффициента нет, в классической теории объясняли тем, что электростатическая энергия $W_{эл}$ не есть полная энергия электрона. Необходимость введения дополнительной энергии очевидна из того, что при наличии одних только электростатических сил электрон не может находиться в равновесии: под действием кулоновских сил отталкивания он должен был бы разлететься на части. Чтобы этого не было, по классическим представлениям, необходимы дополнительные силы неэлектростатического происхождения и связанная с ними энергия.

Если принять, что вся масса электрона электромагнитного происхождения, и опустить в формуле (91.4) числовой множитель 2/3, то получится

$$a = \frac{e^2}{mc^2} = 2{,}818 \cdot 10^{-13}\ \text{см}. \tag{91.7}$$

Эта величина называется *классическим радиусом электрона.* На формулу (91.7) нельзя смотреть как на выражение, определяющее «истинные размеры электрона», так как никаких других независимых способов определения размеров электрона не существует. На классический радиус электрона (91.7) следует смотреть как на некоторую *характерную длину, ограничивающую снизу область применимости классической теории поля.* Классическая теория поля неприменима также для *очень сильных полей*, порядка

$$E_0 = \frac{e}{a^2} = \frac{m^2c^4}{e^3} = 6 \cdot 10^{15}\ \text{СГСЭ-ед.} = 1{,}8 \cdot 10^{18}\ \text{В/см}.$$

5. В действительности размеры области, в которой классические представления уже неприменимы, ограничены *квантовыми эффектами* и примерно в сто раз превышают классический радиус электрона. Эти размеры легко оценить элементарно с помощью квантовомеханического *соотношения неопределенностей между энергией и временем.* Для читателя, имеющего

некоторые представления об основных понятиях квантовой механики, приведем эту оценку. Если частица наблюдается в течение времени Δt, то, согласно квантовой механике, о ее энергии можно говорить лишь с точностью $\Delta\mathscr{E}$, удовлетворяющей условию $\Delta\mathscr{E}\Delta t \gtrsim \hbar$, где $\hbar = h/2\pi = 1{,}05\cdot 10^{-27}$ эрг · с — постоянная Планка, деленная на 2π. Это условие и называется соотношением неопределенностей между энергией и временем. Если время Δt достаточно мало, то в вакууме на короткое время могут рождаться *электрон-позитронные пары.* Для этого неопределенность энергии $\Delta\mathscr{E}$ должна быть не меньше собственной энергии электрон-позитронной пары, т. е. $2mc^2$. (Массы электрона и позитрона одинаковы). Соответствующий промежуток времени от момента рождения до момента исчезновения электрон-позитронной пары будет не больше $\Delta t \sim \hbar/(2mc^2)$. За это время электрон-позитронная пара может пройти расстояние не больше $\Lambda_{\text{к}} = c\Delta t \sim \hbar/(mc) = 0{,}38\cdot 10^{-9}$ см. (Последняя величина называется *комптоновской длиной волны.*) Таким образом, любой «точечный заряд» на расстояниях $\Lambda_{\text{к}}$ как бы окружен областью «виртуальных» электрон-позитронных пар (*«поляризация вакуума»*). Это означает, что классическая картина «точечного заряда» на таких расстояниях уже неприменима. Комптоновская длина волны $\Lambda_{\text{к}} = \hbar/(mc)$ и ограничивает снизу область применимости классической теории поля. Ее отношение к классическому радиусу электрона равно

$$\frac{\Lambda_{\text{к}}}{a} = \frac{\hbar c}{e^2} = 137.$$

Точно так же классическая теория поля неприменима уже при полях, примерно в 137 раз меньших, чем E_0. Действительно, пусть электрическое поле $E_{\text{кв}}$ на длине $\Lambda_{\text{к}}$ создает такую разность потенциалов, что $e\Lambda_{\text{к}}E_{\text{кв}} \gtrsim 2mc^2$. Отсюда, опуская коэффициенты, получаем

$$E_{\text{кв}} \gtrsim \frac{m^2c^3}{e\hbar} = \frac{e^2}{\hbar c}\,E_0 = \frac{1}{137}\,E_0.$$

В таком поле виртуально возникшая электрон-позитронная пара будет разорвана, т. е. произойдет *пробой вакуума* — явление невозможное с точки зрения классических представлений.

Глава VI
ЭЛЕКТРОЛИТЫ

§ 92. Электролиз и электролитическая диссоциация

1. *Электролитами* в широком смысле слова называются вещества, химически разлагающиеся на составные части, когда по ним проходит электрический ток. К таким веществам относятся многие соединения металлов с металлоидами в расплавленном состоянии, а также твердые вещества, проводящие ток, например *твердые растворы* и *ионные кристаллы.* Однако основными представителями электролитов, имеющими главнейшие научно-технические применения, являются *водные растворы неорганических кислот*, *солей* и *оснований.* На них мы и сосредоточим основное внимание. Далеко не всякие водные растворы — электролиты. Например, раствор сахара в воде не проводит электрического тока и электролитом не является. Многие неводные растворы (например, растворы, в которых растворителями служат спирты) также обладают электролитическими свойствами, но у них эти свойства выражены значительно слабее, чем у водных растворов.

Разложение электролита на его составные части под действием электрического тока называется *электролизом.* Продукты разложения выделяются на *электродах*, т. е. проводящих телах надлежащей геометрической формы, погруженных в электролит и соединенных с полюсами гальванической батареи или другого источника постоянного тока. Эти продукты, как правило, вступают в химические реакции с электродами или растворителем. Тогда говорят о *вторичных реакциях* при электролизе. Последние долгое время затемняли собою природу явления электролиза и его законы. При изучении электролиза надо прежде всего исключить осложняющее влияние вторичных реакций и сосредоточить внимание на реакциях *первичных.* Так мы и поступим.

2. Первая гипотеза для объяснения электролиза была предложена Гроттгусом (1785–1822) в 1805 г. Согласно этой гипотезе молекулы растворенного вещества состоят из двух частей, из которых одна заряжена положительно, а другая — отрицательно. В растворе, на который наложено электрическое поле, по какой-то причине некоторые из молекул растворенного вещества распадаются на эти составные части. Последние переходят в раствор в виде заряженных частиц, получивших позднее название *ионов.* Положительные ионы под действием электрического поля двигаются к отрицательному электроду (катоду), а отрицательные ионы — к положительному (аноду). Несмотря на такое движение, вне электродов в каждом элементе объема всегда будет находиться одинаковое количество положительных и отрицательных

ионов. Если выключить электрическое поле, то положительные ионы соединятся с отрицательными в нейтральные молекулы и никакого химического разложения растворенного вещества наблюдаться не будет. Не то произойдет вблизи электродов. Достигнув электродов, ионы будут передавать им свои заряды и выделяться в виде нейтральных атомов, образующих продукты разложения растворенного вещества.

3. Возникает вопрос: почему нейтральные молекулы в растворе распадаются на ионы? До Клаузиуса считали, что это происходит под действием наложенного электрического поля. Таким образом, считалось, что электрическое поле производит разложение растворенного вещества на составные части. Клаузиус в 1857 г. первый указал, что если бы это было так, то для каждого химического соединения потребовалась бы некоторая минимальная напряженность электрического поля $E_{\text{мин}}$, чтобы преодолеть химическое сродство. Чем больше сродство, тем больше было бы поле $E_{\text{мин}}$. При $E < E_{\text{мин}}$ в растворе не было бы ионов, и он не мог бы проводить электрический ток. На самом деле все происходит иначе. Опыты показали, что *электролиты подчиняются закону Ома* $\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}$, а потому *любое сколь угодно слабое электрическое поле вызывает электролиз во всяком электролите.*

На разложение растворенного вещества электролита требуется дополнительная затрата энергии. Она вовсе не мала, как показывает следующий пример. При электролизе соляной кислоты HCl на электродах выделяются водород и хлор — вещества, обладающие большим химическим сродством друг к другу. Они соединяются со взрывом, причем при образовании одного грамма соляной кислоты выделяется около 600 калорий теплоты. Таким образом, если бы химическое разложение электролита производилось электрическим полем, то энергия электрического тока тратилась бы не только на выделение джоулевой теплоты, но и на указанное химическое разложение. Между тем опыты показали, что *для электролитов выполняется закон Джоуля–Ленца, согласно которому вся энергия тока тратится на джоулеву теплоту.*

4. Имея в виду изложенные соображения, Клаузиус в 1857 г. предложил иное объяснение возникновения ионов в растворах. Согласно кинетической теории газов, одним из главных основоположников которой был сам Клаузиус, атомы внутри молекулы совершают беспорядочное тепловое движение. Обычно энергии этого теплового движения недостаточно, чтобы преодолеть химические силы притяжения, удерживающие вместе противоположно заряженные части молекулы. В растворах, однако, под действием растворителя силы химического сродства ослабляются, и молекула, по крайней мере на короткое время, *диссоциирует*, т. е. расщепляется на противоположно заряженные ионы. При встрече положительного иона с отрицательным ионы могут *рекомбинировать*, т. е. соединиться в нейтральную молекулу. Другие нейтральные молекулы, наоборот, могут диссоциировать на ионы. В результате непрерывно идущих процессов диссоциации и рекомбинации

устанавливается *статистическое равновесие*, в котором доля диссоциированных молекул в среднем остается неизменной во времени. При наложении электрического поля положительные и отрицательные ионы устремляются в противоположные стороны в соответствии с воззрениями Гротгуса. Возникает электрический ток, и происходит выделение продуктов разложения на электродах. Таким образом, электрическое поле не имеет никакого отношения к химическому разложению молекул растворенного вещества на составные части. *Роль электрического поля сводится только к тому, чтобы разделить уже существующие положительные и отрицательные ионы и собрать их на различных электродах.* В этом и состоит сущность явления электролиза.

5. К аналогичным выводам из совсем других соображений пришел Сванте Аррениус (1859–1927), являющийся творцом *теории электролитической диссоциации.* Опыты показали, что водные растворы солей, кислот и оснований имеют более высокое осмотическое давление, чем это следует из закона Вант-Гоффа (1852–1911). Понижение упругости насыщенного пара, а также понижение температуры замерзания и повышение точки кипения для этих растворов больше, чем это следует из закона Рауля (см. т. II, § 124–126). На этом основании Аррениус и пришел к выводу, что молекулы растворенного вещества в водных растворах диссоциированы на ионы, и обосновал этот вывод на большом экспериментальном материале. По теории Аррениуса ионы, отличаясь от нейтральных атомов и молекул наличием электрического заряда, обладают и совершенно иными свойствами. Например, газообразный водород почти нерастворим в воде, а ионы водорода могут содержаться в водных растворах в очень больших концентрациях. Ионы натрия химически не действуют на воду, тогда как металлический натрий бурно реагирует с ней с образованием едкого натра. Хлор обладает характерным запахом и цветом, тогда как его ионы в растворе не имеют ни запаха, ни цвета. Ионы SO_4^{2-}, пока они заряжены отрицательно, могут существовать только в растворах, нейтральные молекулы такого состава неизвестны.

6. Возникновение диссоциации молекул в растворе можно пояснить на примере молекулы NaCl. Это полярная молекула, построенная из положительно заряженных ионов натрия Na^+ и отрицательно заряженных ионов хлора Cl^-. Молекулы воды также полярные и обладают большими дипольными моментами. Когда молекула NaCl оказывается между двумя молекулами воды, то эти три полярные молекулы стремятся ориентироваться преимущественно так, чтобы быть обращенными друг к другу разноименно заряженными концами, как показано на схематическом рис. 210. Но в таком случае молекулы воды ослабят связь между ионами Na^+ и Cl^-, и энергии теплового движения может оказаться достаточно, чтобы молекула

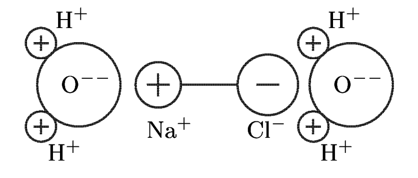


Рис. 210

NaCl распалась на ионы. Когда ионы Na^+ и Cl^- разойдутся достаточно далеко, то воду, разделяющую их, можно рассматривать как сплошную среду, ослабляющую силу притяжения между указанными ионами в ε раз. Это ослабление уменьшает вероятность рекомбинации рассматриваемых ионов. Отсюда ясно, что наибольшей диссоциирующей способностью должны обладать растворители с наибольшей диэлектрической проницаемостью ε. Такова прежде всего вода, для которой $\varepsilon = 81$.

7. *Коэффициентом* или *степенью диссоциации* α называется отношение числа диссоциировавших молекул к общему числу молекул растворенного вещества. Величина α зависит от концентрации растворенного вещества. Эта зависимость в общих чертах может быть получена из следующих простых соображений. Пусть n — число молекул растворенного вещества в единице объема раствора. Из этого числа $n\alpha$ молекул диссоциированы, а остальные $n(1-\alpha)$ молекул не диссоциированы. Диссоциированные молекулы могут рекомбинировать. Среднее число процессов рекомбинации в единице объема в единицу времени пропорционально $(n\alpha)^2$ и может быть представлено в виде $A(n\alpha)^2$. Среднее число обратных процессов, т. е. новых актов диссоциации, будет пропорционально числу имеющихся недиссоциированных молекул и представляется выражением $Bn(1-\alpha)$. В установившемся состоянии число прямых процессов в среднем должно равняться числу обратных процессов, т. е. $A(n\alpha)^2 = Bn(1-\alpha)$. Отсюда

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha} = \frac{B}{An} = \frac{K}{n}. \tag{92.1}$$

Коэффициенты A и B, а следовательно, и их отношение $K = B/A$ зависят от температуры и давления раствора. Если концентрация молекул растворенного вещества, а с ней и концентрации ионов в растворе малы, то ионы можно рассматривать как *независимые невзаимодействующие частицы*, подобно молекулам идеального газа. В этих условиях коэффициент K не зависит от концентрации n, а отношение $\alpha^2/(1-\alpha)$ обратно пропорционально концентрации. Это положение называется *законом разведения Оствальда* (1853–1932). Когда $n \to 0$, то $\alpha^2/(1-\alpha) \to \infty$, а следовательно, $\alpha \to 1$. Таким образом, *в бесконечно разбавленных растворах все молекулы растворенного вещества диссоциированы.*

Закон разведения Оствальда хорошо выполняется для *слабых электролитов*, т. е. таких электролитов, у которых степень диссоциации мала ($\alpha \ll 1$). Для *сильных электролитов*, т. е. электролитов, у которых величина α порядка единицы ($\alpha \sim 1$), закон Оствальда не согласуется с опытными данными. Исключение, конечно, составляет случай сильно разбавленных растворов, для которых этот закон приводит к правильному результату $\alpha = 1$. Современная теория растворов принимает, что молекулы сильного электролита диссоциированы полностью, а все особенности поведения раствора пытается объяснить взаимодействием ионов между собой и с молекулами растворителя.

§ 93. Примеры электролиза

1. Молекулы серной кислоты H_2SO_4 при растворении в воде диссоциируют согласно уравнению

$$H_2SO_4 \rightleftarrows 2H^+ + SO_4^{2-}.$$

Если в раствор опущены платиновые электроды, соединенные с полюсами гальванической батареи, то положительные ионы водорода H^+ устремятся к катоду, а отрицательные ионы SO_4^{2-} — к аноду. Ионы H^+, нейтрализуясь электронами катода, превращаются в нейтральные атомы, а затем в молекулы H_2. Ионы SO_4^{2-}, отдавая отрицательные заряды аноду, превращаются в радикалы SO_4, вступающие в реакцию с водой согласно уравнению

$$2SO_4 + 2H_2O = 2H_2SO_4 + O_2.$$

Таким образом, количество серной кислоты в растворе не меняется. Однако на катоде выделяется водород, а на аноде — кислород. Окончательный итог электролиза сводится к разложению воды на кислород и водород.

2. Опустим в водный раствор медного купороса $CuSO_4$ медный анод и катод из какого-либо проводящего материала, не реагирующего с медным купоросом, например угля. Ионы Cu^{2+} пойдут к катоду, там будет выделяться чистая медь. Ионы SO_4^{2-} после нейтрализации на аноде вступают с ним в химическое соединение согласно уравнению $Cu + SO_4 = CuSO_4$. Таким образом, количество медного купороса в растворе меняться не будет. В результате электролиза происходит как бы перенос меди с анода на катод. Описанный процесс применяется для рафинирования (очистки) меди.

3. Рассмотрим, наконец, электролиз водного раствора поваренной соли NaCl. Этот пример интересен тем, что в зависимости от материала электрода можно получить и первичные, и вторичные продукты электролиза. Если катод ртутный, то выделяющийся на нем металлический натрий будет растворяться в ртути, образуя амальгаму, из которой натрий может быть легко выделен. Таким путем получается первичный продукт электролиза. Если же катод сделан из платины, то выделяющийся на нем металлический натрий будет входить в соединения с водой, образуя едкий натр в соответствии с уравнением $2Na + 2H_2O = 2Na(OH) + H_2$, а на катоде будет выделяться вторичный продукт электролиза — водород.

4. Стекло при обычных температурах является непроводником электричества. Однако если его нагреть до температуры в несколько сот градусов, то оно начинает заметно проводить электричество. Наглядной демонстрацией этого может служить опыт, схема которого приведена на рис. 211. В цепь городского тока через реостат R включена стеклянная палочка, на концы которой A и B намотана голая медная проволока. При комнатной температуре сопротивление

стеклянной палочки составляет многие миллионы ом. Поэтому при замыкании рубильника через цепь потечет ничтожный ток (микроамперы или еще меньше), и никакого накала лампочки *Л* не будет. Но если палочку *AB* нагреть на газовой горелке до температуры 300–400 °С, то ее сопротивление упадет до нескольких десятков омов, и нить лампочки раскалится. Если после этого убрать горелку и одновременно закоротить лампочку ключом *K*, то общее сопротивление цепи уменьшится, а ток возрастет. Стеклянная палочка будет нагреваться электрическим током и раскалится до яркого свечения, в результате чего ее сопротивление еще больше уменьшится, а ток возрастет. В конце концов палочка расплавится.

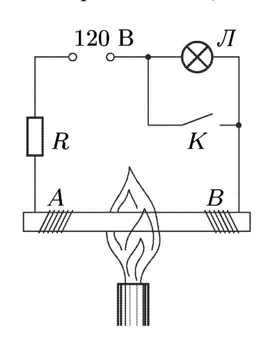


Рис. 211

Чем же объясняется проводимость стекла? Стекло представляет собой сильно переохлажденную жидкость, обладающую громадной вязкостью. Оно является также электролитом, в котором имеются положительные ионы натрия Na^+. При нагревании, когда стекло размягчается и его вязкость сильно уменьшается, ионы в стекле приобретают заметную подвижность. Они-то и являются переносчиками тока в стекле. Доказательством этого может служить следующий демонстрационный опыт. В тигль, подогреваемый газовой горелкой (рис. 212), помещается расплавленная чилийская селитра $NaNO_3$, в которую погружается примерно на одну треть баллон вакуумной лампочки накаливания (газонаполненная не годится). Нить лампочки накаливается постоянным током. Угольный электрод *a* присоединяется к положительному концу нити и погружается в расплав селитры. Он служит анодом, по отношению к которому все точки нити лампочки имеют более низкий потенциал. Расплав селитры частично диссоциирован на ионы Na^+ и NO_3^-. Под действием разности потенциалов между анодом и нитью лампочки ионы Na^+ движутся в селитре в направлении от анода *a* к баллону лампочки. Затем они проникают внутрь лампочки через ее стенки. На этих стенках они нейтрализуются электронами, испускаемыми накаленной нитью, и превращаются в нейтральные атомы Na. Испаряясь, последние осаждаются на более холодных частях внутренней поверхности стеклянного баллона лампочки, где образуется хорошо видимый зеркальный слой натрия.

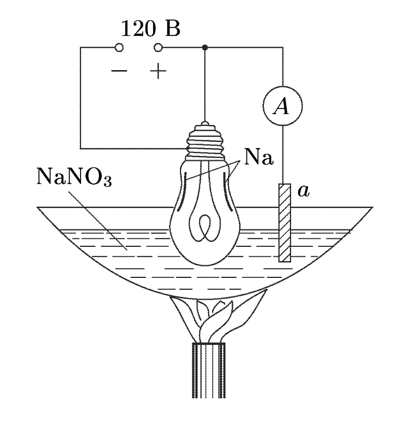


Рис. 212

§ 94. Законы электролиза Фарадея и элементарный заряд

1. Электролиз впервые наблюдался в 1800 г. Никольсоном (1753–1815) и Карлейлем, разложившими воду током от вольтова столба. Через семь лет Дэви (1778–1829) выделил и открыл натрий путем электролиза влажных кусков едкой щелочи. В дальнейшем электролиз наблюдался на многих других электролитах. Открытие количественных законов электролиза Фарадеем последовало в 1833 г. после того, как он ввел подразделение продуктов и реакций при электролизе на *первичные* и *вторичные*. *Законы Фарадея* определяют количества первичных продуктов, выделяющихся на электродах при электролизе. Их легко получить из рассмотрения механизма явления электролиза.

Каждый ион содержит целое число элементарных зарядов e, и поэтому заряд иона по абсолютной величине представляется выражением νe, где ν — целое число, равное валентности соответствующего химического элемента или соединения. Пусть на электроде, выделилось n таких ионов. Тогда их заряд по абсолютной величине будет $n\nu e$. Если эти ионы выделились на катоде, то их заряд нейтрализуется электронами, подтекающими к катоду по проводам, соединяющим его с источником тока. Если же они выделятся на аноде, то такое же количество электронов по проводам утечет от анода. В обоих случаях через цепь пройдет количество электричества $q = n\nu e$. Пусть M — масса вещества, выделившегося на электроде, а m — масса иона (атома или молекулы). Тогда $n = M/m$, и, следовательно, $M = mq/(\nu e)$. Умножив числитель и знаменатель последней дроби на постоянную Авогадро N, получим

$$M = \frac{A}{\nu}\frac{q}{F}, \tag{94.1}$$

где $A = Nm$ — атомная масса, а F — постоянная, определяемая выражением

$$F = Ne. \tag{94.2}$$

Эта постоянная называется *постоянной Фарадея.*

Для выяснения физического смысла постоянной Фарадея введем понятие *моль.* Так называют количество вещества, масса которого в граммах равна молярной массе A атома (а в случае химического соединения — молекулы), деленной на валентность ν. Если в формуле (94.1) положить $M = A/\nu$, то получится $q = F$. Это означает, что постоянная Фарадея есть заряд, переносимый при электролизе одним молем ионов.

Формула (94.1) содержит оба закона электролиза, открытых Фарадеем. Согласно первому закону *масса вещества, выделяющегося при электролизе на каждом электроде, пропорциональна количеству прошедшего электричества q.* Второй закон утверждает, что *эта масса пропорциональна химическому эквиваленту A/ν.*

2. Измерив на опыте M и q, можно по формуле (94.1) вычислить постоянную Фарадея F. Таким путем найдено $F = 2{,}8926 \times \times 10^{14}$ СГСЭ/моль$= 9{,}6487 \cdot 10^4$ Кл/моль. Зная F и N, можно по формуле (94.2) вычислить и элементарный заряд e. Именно таким путем английский ученый Стоней впервые оценил величину элементарного заряда в докладе, сделанном на съезде Британской ассоциации в 1874 г. Работа Стонея была опубликована только в 1881 г., после того как Гельмгольц в речи, посвященной памяти Фарадея, которую он прочел 5 апреля того же года в Королевском обществе в Лондоне, изложил (по-видимому, независимо от Стонея) те же результаты, полученные таким же путем. В этой знаменитой речи Гельмгольц сказал:

«Если мы признаем существование атомов химических элементов, то мы не можем избежать и дальнейшего заключения, что электричество, как положительное, так и отрицательное, разделено на определенные элементарные количества, которые ведут себя как атомы электричества».

§ 95. Скорости ионов и электрическая проводимость электролитов

1. При движении в электролите ион испытывает силу сопротивления, которая в случае установившегося движения пропорциональна скорости иона. На этом основании ион в электролите можно характеризовать *подвижностью*, определение которой было дано формулой (42.14). Здесь более удобно пользоваться той подвижностью, которая в § 42 была обозначена малой буквой b. Подвижности положительных и отрицательных ионов разные. Обозначая их через b^+ и b^-, а установившиеся скорости ионов — через $\mathbf{u}^+$ и $\mathbf{u}^-$, можем написать

$$\mathbf{u}^+ = b^+\mathbf{E}, \quad \mathbf{u}^- = -b^-\mathbf{E}. \tag{95.1}$$

Что касается концентрации, то она для положительных и отрицательных ионов одинакова, так как раствор электролита остается электрически нейтральным (точнее, квазинейтральным), и равна αn, где n — концентрация нейтральных молекул растворенного вещества, а α — степень диссоциации. Поэтому плотность тока в электролите определится выражением

$$\mathbf{j} = \alpha n(e^+\mathbf{u}^+ + e^-\mathbf{u}^-). \tag{95.2}$$

Так как заряд иона по абсолютной величине равен νe, где e — элементарный заряд, а ν — валентность иона, то

$$\mathbf{j} = \alpha n\nu e(b^+ + b^-)\mathbf{E}. \tag{95.3}$$

Отсюда для удельной электрической проводимости электролита получаем

$$\lambda = \alpha n\nu e(b^+ + b^-). \tag{95.4}$$

Концентрация n есть число нейтральных молекул растворенного вещества или, что то же самое, полное число ионов одного знака (как

свободных, так и связанных) в единице объема раствора. Введем так называемую *эквивалентную концентрацию растворенного вещества.* Эквивалентной концентрацией η называется число грамм-эквивалентов ионов одного знака, содержащихся в единице объема раствора. Так как грамм-эквивалент содержит N/ν частиц, то

$$\eta = \frac{n}{N/\nu} = \frac{n\nu}{N}. \tag{95.5}$$

Отсюда $n\nu = N\eta$. Кроме того, по формуле (94.2) $e = F/N$. С помощью этих соотношений формула (95.4) преобразуется к виду

$$\lambda = \alpha\eta F(b^+ + b^-). \tag{95.6}$$

Отношение удельной электрической проводимости λ к эквивалентной концентрации η растворенного вещества называется *эквивалентной* электрической проводимостью:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\eta} = \alpha F(b^+ + b^-). \tag{95.7}$$

Эквивалентная электрическая проводимость Λ_∞ при бесконечном разбавлении раствора найдется из этой формулы, если положить $\alpha = 1$ (см. § 92, п. 7). Это дает [1]

$$\Lambda_\infty = F(b^+ + b^-), \tag{95.8}$$

и, следовательно,

$$\alpha = \frac{\Lambda}{\Lambda_\infty}. \tag{95.9}$$

Измеряя эквивалентную электрическую проводимость, можно по этой формуле вычислить степень диссоциации растворенного вещества α. По формуле же (95.7) или (95.8) можно найти сумму подвижностей положительного и отрицательного ионов.

2. Чтобы определить значения самих подвижностей b^+ и b^-, к уравнению (95.8) надо присоединить еще одно уравнение. Его можно получить, измерив на опыте, как меняется при электролизе распределение концентрации растворенного вещества внутри электролита. Такие опыты были произведены Гитторфом (1824–1914) в 50-х годах прошлого столетия. Гитторф употреблял сосуды различной формы, в которых дном служили пористые перегородки (пергаментная бумага, животный пузырь или тонкая пористая пластинка из глины). В сосуды наливался раствор исследуемого электролита, и они собирались в один составной сосуд. Таким путем получался как бы один сосуд с электролитом, разделенный на несколько отделений пористыми перегородками.

---

[1] Следуя Ф. Кольраушу (1840–1910), в электрохимии подвижностью иона в электролите принято называть произведение Fb. Формула (95.8) означает, что *эквивалентная электрическая проводимость электролита при бесконечном разбавлении раствора равна сумме подвижностей положительного и отрицательного ионов в смысле Кольрауша.*

Электролит в таком сосуде подвергался электролизу, причем ионы могли свободно переходить через пористые перегородки. После этого составной сосуд разбирался на отделения и измерялась концентрация растворенного вещества в каждом из них.

Допустим для простоты, что в составном сосуде имеется всего три одинаковых отделения A, B, K (рис. 213), содержавших в начале опыта по одинаковому числу N_0 молекул растворенного вещества. Пусть во время электролиза из отделения A через перегородку AB перешло в B ΔN^+ положительных ионов. Такое же количество положительных ионов перейдет из B в K через перегородку BK. В результате этих процессов число положительных ионов в отделении B не изменится, в отделении A оно уменьшится, а в отделении K увеличится на ΔN^+, так что числа положительных ионов в отделениях A и K будут равны соответственно

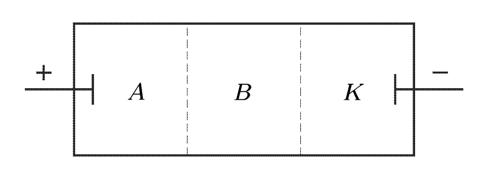


Рис. 213

$$N_A^+ = N_0 - \Delta N^+, \quad N_K^+ = N_0 + \Delta N^+.$$

Пусть, далее, через перегородки KB и BA за то же время прошло ΔN^- отрицательных ионов. От этого число отрицательных ионов в среднем отделении B не изменится, а в крайних отделениях A и K эти числа сделаются равными соответственно

$$N_A^- = N_0 + \Delta N^-, \quad N_K^- = N_0 - \Delta N^-.$$

В отделении A получится избыток отрицательных ионов над положительными, равный $N_A^- - N_A^+ = \Delta N^+ + \Delta N^-$. В отделении K, наоборот, число положительных ионов будет превышать число отрицательных на $N_K^+ - N_K^- = \Delta N^+ + \Delta N^-$, т. е. на ту же величину. До сих пор не было принято во внимание влияние электродов. В действительности избыточные ионы выделятся на электродах и будут нейтрализованы зарядами последних. В результате раствор всюду будет содержать по одинаковому количеству положительных и отрицательных ионов: в отделении A таких ионов останется $N_0 - \Delta N^+$, в отделении K — $(N_0 - - \Delta N^-)$, в отделении B — N_0^-, т. е. число ионов не изменится. Таковы же будут и числа нейтральных молекул растворенного вещества в этих отделениях. Если $\Delta N^+ \neq \Delta N^-$, то концентрации электролита в отделениях A и K сделаются разными. Примем исходную концентрацию за единицу. Тогда в результате электролиза средние концентрации сделаются равными

$$c_A = \frac{N_0 - \Delta N^+}{N_0} = 1 - \frac{\Delta N^+}{N_0} \quad \text{(в отделении } A\text{)},$$

$$c_K = \frac{N_0 - \Delta N^-}{N_0} = 1 - \frac{\Delta N^-}{N_0} \quad \text{(в отделении } K\text{)}.$$

Концентрация электролита в отделении B не изменится. Из полученных соотношений следует

$$\frac{1-c_A}{1-c_K} = \frac{\Delta N^+}{\Delta N^-}. \tag{95.10}$$

Выразим теперь отношение $\Delta N^+/\Delta N^-$ через скорости и подвижности положительных и отрицательных ионов. Проведем в электролите произвольное сечение S. Тогда ΔN^+ можно определить как число положительных, а ΔN^- — отрицательных ионов, прошедших во время процесса через сечение S. Ясно, что ΔN^+ пропорционально току положительных, а ΔN^- — току отрицательных ионов, т.е. $\int n^+e^+u^+\,dS$ и $\int n^-e^-u^-\,dS$ соответственно. Поскольку электролит нейтрален ($|n^+e^+| = |n^-e^-|$), эти токи пропорциональны скоростям ионов u^+ и u^-. Следовательно,

$$\frac{u^+}{u^-} = \frac{b^+}{b^-} = \frac{1-c_A}{1-c_K}. \tag{95.11}$$

Вместо отношения скоростей или подвижностей ионов Гитторф ввел два отношения

$$\begin{aligned} \varkappa^+ &= \frac{b^+}{b^+ + b^-} = \frac{1-c_A}{2-(c_A+c_K)}, \\ \varkappa^- &= \frac{b^-}{b^+ + b^-} = \frac{1-c_K}{2-(c_A+c_K)}, \end{aligned} \tag{95.12}$$

которые он назвал *числами переноса ионов.* Очевидно, $\varkappa^+ + \varkappa^- = 1$.

3. Измеряя концентрации растворов до и после электролиза, Гитторф нашел, что в соляной кислоте ион водорода движется почти в 5 раз быстрее иона хлора. Измеряя же электрическую проводимость электролита, можно по формуле (95.8) вычислить сумму подвижностей $b^+ + b^-$, а затем и сами подвижности b^+ и b^-. Опыты показали, что *подвижность всякого иона в электролите не зависит от того, какие другие ионы находятся в растворе.* Этот результат был найден на опыте Фридрихом Кольраушем (1840–1910) и называется *законом Кольрауша о независимости движения ионов.* Он может рассматриваться как подтверждение гипотезы Аррениуса, согласно которой ионы в растворе уже не связаны между собой, а диссоциированы и движутся независимо друг от друга. Закон Кольрауша справедлив только для растворов малых концентраций. Если же концентрация ионов в растворе достигает заметной величины, то подвижности ионов начинают зависеть как от концентрации, так и от природы других ионов, содержащихся в растворе. С увеличением концентрации подвижность ионов уменьшается, хотя и не очень сильно.

Из табл. 3 видно, что подвижности ионов, вообще говоря, весьма малы. Наибольшей подвижностью обладает ион H^+, но и он в поле $E = 1$ В/см перемещается всего на 12 см в час. Рассматривая таблицу, можно было бы думать, что радиус иона Li^+ больше радиуса иона Na^+,

а последний в свою очередь больше радиуса иона K^+. В действительности атомные радиусы щелочных металлов располагаются в обратной последовательности. Этот факт объясняют тем, что в растворе ионы *гидратированы*, т. е. окружены оболочкой воды, увлекаемой при их

Таблица 3. Значения подвижностей ионов в водных растворах слабой концентрации при температуре 18 °C

Ион	Подвижность, 10^{-3} см^2/(с · В)	Ион	Подвижность, 10^{-3} см^2/(с · В)
H^+	3,26	OH^-	1,80
Li^+	0,346	Cl^-	0,677
Na^+	0,450	NO_3^-	0,639
K^+	0,669	I^-	0,688

движении (см. т. II, § 122). Гидратация вызывается электрическими силами, с которыми ионы действуют на молекулы окружающей воды. Из всех щелочных ионов ион лития обладает наиболее сильным электрическим полем, а потому он гидратирован сильнее других ионов. Подвижности многовалентных ионов с разными зарядами, например Fe^{2+} и Fe^{3+}, не пропорциональны их зарядам, как может показаться на первый взгляд. Это также можно объяснить гидратацией, поскольку ионы большей валентности гидратированы сильнее.

4. Нернст (1864–1941) наглядно демонстрировал движение ионов, когда они окрашивали раствор. В U-образную трубку (рис. 214) снизу наливают фиолетовый раствор марганцовокислого калия $KMnO_4$ с концентрацией $\eta \approx 0{,}003$ грамм-эквивалента на 1 см^3. Поверх этого раствора наливают бесцветный раствор азотнокислого калия KNO_3 с той же эквивалентной концентрацией. Эти операции должны быть выполнены очень тщательно, чтобы граница между обоими растворами была резкой. Для этого в приборе предусмотрены специальные приспособления, которые мы не описываем. В растворе соль KNO_3 диссоциирует на ионы K^+ и NO_3^-, а соль $KMnO_4$ — на ионы K^+ и MnO_4^-. При пропускании электрического тока ионы K^+ в обоих растворах движутся к катоду. Достигнув последнего, они нейтрализуются, соединяются с водой и освобождают там водород. За движением этих ионов, поскольку они не дают окраски, мы следить не можем. Что касается ионов MnO_4^-, то они придают раствору фиолетовую окраску и движутся в направлении от катода к аноду. Поэтому в колене, где расположен катод, наблюдается понижение окрашенной границы, а в колене, где находится анод, — повышение. Скорость перемещения окрашенной границы равна скорости ионов MnO_4^- и может

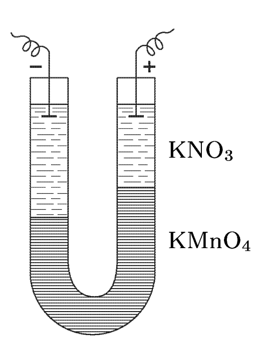


Рис. 214

быть непосредственно измерена. Если длина U-образной трубки равна 10 см, а приложенная разность потенциалов на электродах 50 В, то уже через 3 мин окрашенная граница (как в том, так и в другом колене) переместится на 0,45 см, так что разность окрашенных уровней в коленах трубки достигнет почти одного сантиметра.

§ 96. Гальванические элементы и аккумуляторы

1. В § 43 была изложена теория концентрационного элемента, в котором электрический ток возникает благодаря наличию градиента концентрации раствора. Было показано, что электродвижущая сила концентрационного элемента очень мала и практического значения не имеет. Тем не менее теория концентрационного элемента важна в принципиальном отношении. Благодаря простоте процессов, происходящих в концентрационном элементе, на нем проще всего уяснить возникновение электрического тока в гальванических элементах, усвоить понятие сторонних сил и обобщить закон Ома на случай наличия таких сил. Обращаемся теперь к краткому рассмотрению процессов, происходящих в гальванических элементах, применяющихся на практике.

2. Если кусок какого-либо металла, например цинка, погрузить в воду, то в первый момент такая система не будет находиться в равновесии. Кристаллическая решетка цинка состоит из положительных ионов Zn^{2+}. Под влиянием сильно полярных молекул воды ионы цинка, отрываясь от металла, начнут переходить в слой воды, примыкающий к поверхности погруженного куска. В результате этого цинк зарядится отрицательно, а вода — положительно. На границе металла и воды образуется тонкий поверхностный слой, называемый *двойным электрическим слоем*, в котором возникнет электрическое поле, направленное от воды к металлу. Это поле будет препятствовать переходу ионов металла в воду и способствовать возвращению их обратно в металл. Установится статистическое равновесие, в котором число ионов, переходящих из металла в воду, будет в среднем равно числу ионов, возвращающихся обратно из воды в металл. То же самое произойдет, если металл погрузить в водный раствор соли того же металла, например, цинк в раствор цинкового купороса $ZnSO_4$. Последний в растворе диссоциирует на ионы Zn^{2+} и SO_4^{2-}. Ионы цинка Zn^{2+}, получившиеся в растворе в результате электролитической диссоциации, конечно, ничем не отличаются от таких же ионов, перешедших в раствор от куска цинка. Повышение концентрации ионов Zn^{2+} в растворе, очевидно, облегчает переход этих ионов в металл и затрудняет обратный переход ионов Zn^{2+} из металла в раствор. Поэтому в растворе цинкового купороса цинк хотя и зарядится отрицательно, но слабее, чем в чистой воде. Равновесная разность потенциалов, которая установится между металлом и раствором, будет зависеть от температуры, давления, а также от концентрации раствора. Однако при одной и той же концентрации ионов металла в растворе она не будет зависеть от наличия в растворе других ионов, если только последние не осаждаются на металле, т. е. не участвуют в процессе

обмена ионами между раствором и металлом. Например, погрузив цинк сначала в раствор $ZnSO_4$, а затем в раствор $ZnCl_2$, мы получим в обоих случаях при одинаковой концентрации ионов Zn^{2+} одну и ту же разность потенциалов между цинком и раствором.

При погружении металла в раствор соли того же металла металл не всегда заряжается отрицательно. Например, если кусок меди погрузить в раствор медного купороса $CuSO_4$, то ионы Cu^{++} начнут осаждаться на меди, заряжая ее положительно. Двойной электрический слой на границе меди с раствором будет теперь обращен положительными зарядами к меди, а отрицательными — к раствору. Электрическое поле в таком слое будет направлено от меди к раствору. В установившемся состоянии медь окажется заряженной положительно, а раствор — отрицательно.

Итак, *при погружении металла в воду или в водный раствор, содержащий ионы того же металла, на границе металл–раствор образуется двойной электрический слой и возникает разность потенциалов между металлом и раствором.* Величина этой разности потенциалов для разных металлов разная. Она зависит от концентрации ионов рассматриваемого металла в растворе и сравнительно слабо зависит от температуры и давления.

3. При измерении разности потенциалов между металлическим электродом и электролитом, в который он погружен, встречается следующая трудность. Для включения вольтметра между электролитом и рассматриваемым электродом вольтметр надо присоединить к другому электроду, опущенному в тот же электролит. Однако между электролитом и вторым электродом возникает также разность потенциалов. Поэтому вольтметр укажет вовсе не разность потенциалов между интересующим нас металлом и электролитом, а разность потенциалов между двумя различными электродами, опущенными в один и тот же электролит. Однако при вычислении электродвижущей силы гальванического элемента достаточно знать разности потенциалов между его электродами. А эти разности не зависят от того, относительно какого тела измерены потенциалы самих электродов. Можно взять потенциал относительно любого тела, принимаемого за стандарт. Для этой цели чаще всего употребляется *нормальный водородный электрод*, состоящий из платинированной платины [1], опущенной в нормальный раствор, содержащий ионы водорода (например, в раствор серной кислоты), и омываемой током газообразного водорода при давлении 1 атм, причем водородный электрод и сочетаемый с ним другой электрод должны находиться при одинаковой температуре. (*Нормальным раствором* или *раствором нормальной концентрации* называют раствор, содержащий 1 грамм-эквивалент ионов металла или водорода в литре раствора.) Потенциал данного электрода относительно нормального водородного электрода называется *электродным потенциалом.* Если

[1] Так называют гладкую Pt, покрытую с помощью электролиза мелкодисперсной Pt.

при этом раствор, в который опущен электролит, нормальный, то электродный потенциал называют также *нормальным* и обозначают через $V_н$. В табл. 4 приведены значения $V_н$ для некоторых электродов. Перед электродом указаны также ионы, с которыми этот электрод обменивается при погружении в раствор. Такое указание необходимо, так как нормальный электродный потенциал зависит не только от вида металла, но и от величины заряда его ионов в растворе (например, Cu^+ и Cu^{++}).

Таблица 4. Значения нормальных электродных потенциалов при 25 °C

Электрод	$V_н$, В	Электрод	$V_н$, В	Электрод	$V_н$, В
L^+/L	−3,045	Fe^{2+}/Fe	−0,440	H^+/H_2	0,0000
K^+/K	−2,925	Cd^{2+}/Cd	−0,403	Cu^{2+}/Cu	+0,337
Na^+/Na	−2,714	Co^{2+}/Co	−0,277	Cu^+/Cu	+0,521
Mg^{2+}/Mg	−2,37	Ni^{2+}/Ni	−0,250	Hg^+/Hg	+0,798
Al^{3+}/Al	−1,66	Sn^{2+}/Sn	−0,136	Ag^+/Ag	+0,799
Zn^{2+}/Zn	−0,763	Pb^{2+}/Pb	−0,126	Au^{3+}/Au	+1,50

Пользуясь приведенными данными, можно приближенно вычислить электродный потенциал $V_с$ и в том случае, когда концентрация электролита отлична от нормальной. Действительно, $V_с = V_н + (V_с - V_н)$. Разность потенциалов $(V_с - V_н)$, если концентрации не очень велики, можно вычислить с помощью теории концентрационного элемента. Надо только в формуле (44.13) положить равной нулю одну из подвижностей B^+ или B^- (так как теперь в процессе установления равновесной разности потенциалов $V_с - V_н$ участвуют только ионы одного знака). Таким путем получаем $V_с - V_н = kT \ln c/(\nu e)$, где через νe обозначен заряд иона (e — элементарный заряд, а ν — целое число; для положительных ионов $\nu > 0$, для отрицательных $\nu < 0$). За единицу концентрации c принята концентрация нормального раствора. Следовательно,

$$V_с = V_н + \frac{kT}{\nu e} \ln c = V_н + \frac{RT}{\nu F} \ln c. \qquad (96.1)$$

4. Электрод, опущенный в раствор электролита, образует так называемый *полуэлемент.* Из двух таких полуэлементов образуется *гальванический элемент.* Примером может служить *элемент Даниэля.* Он состоит из цинкового электрода, погруженного в раствор $ZnSO_4$, и медного электрода, погруженного в раствор $CuSO_4$. Оба раствора отделены один от другого пористым цилиндром из необожженной глины. Стенки цилиндра не препятствуют движению ионов, но предохраняют растворы от быстрого перемешивания.

Разность потенциалов между электродами незамкнутого элемента называется *электродвижущей силой* последнего (см. § 44). Она приближенно равна разности электродных потенциалов соответствующих электродов. Допустим, например, что оба раствора $ZnSO_4$ и $CuSO_4$

в элементе Даниэля (1790–1845) имеют нормальные концентрации. Из таблицы нормальных электродных потенциалов находим, что электродный потенциал цинка равен $-0{,}763$ В, а меди $+0{,}337$ В. Поэтому электродвижущая сила элемента Даниэля будет $\mathscr{E} = 0{,}337-(-0{,}763) = 1{,}10$ В. В этом расчете мы пренебрегли диффузионной разностью потенциалов, возникающей на границе двух растворов. Однако эта величина мала и обычно не превосходит 0,03 В (см. задачу 2 к § 44).

В *элементе Вольты* (1745–1827) оба электрода — цинковый и медный — погружены в один и тот же раствор серной кислоты H_2SO_4. Последний не содержит ни ионов цинка, ни ионов меди. Однако это имеет место только в первый момент после погружения. В дальнейшем же в раствор входят как ионы цинка, так и ионы меди, а потому этот случай принципиально не отличается от уже рассмотренного.

Если электроды элемента Даниэля соединить проводом, то электроны по этому проводу начнут переходить с отрицательного. электрода (цинка) на положительный (медь). От этого заряды обоих электродов по абсолютной величине уменьшатся. Это нарушит равновесие между электродами и электролитами, в которые они погружены. Ионы Zn^{2+} станут слабее удерживаться отрицательным (цинковым) электродом и начнут переходить в раствор, двигаясь при этом в направлении к положительному (медному) электроду. Со своей стороны положительный (медный) электрод станет слабее отталкивать ионы Cu^{2+}. Последние начнут переходить из раствора и осаждаться на положительном электроде. Что касается ионов SO_4^{2-}, то у отрицательного электрода образуется недостаток, а у положительного — избыток таких ионов. Короче, потечет электрический ток — во внешней цепи от меди к цинку, а во внутренней от цинка к меди. В результате этого цинк будет растворяться, а медь осаждаться на положительном электроде. Общее же число ионов SO_4^{2-} в растворе не изменится, увеличится только их концентрация у цинкового электрода, а у медного уменьшится.

5. Прохождение электрического тока в гальванических элементах может осложняться побочными продуктами, выделяющимися на электродах, а также появлением градиентов концентрации в электролите. Это ведет к возникновению дополнительной электродвижущей силы, направленной против электродвижущей силы самого элемента и ослабляющей величину последней. Такое явление называется *электролитической поляризацией*, или *поляризацией гальванических элементов*. Примером может служить элемент Вольты (цинковый и медный электроды в растворе серной кислоты). При замыкании элемента положительные ионы H^+ движутся к меди и осаждаются на ней. После длительной работы элемента медный электрод как бы заменяется водородным. Последний обладает способностью посылать в раствор ионы H^+ и создавать тем самым дополнительную электродвижущую силу, направленную противоположно электродвижущей силе самого элемента. Электродный потенциал водорода на 0,337 В ниже электродного потенциала меди (см. табл. 4). По этой причине электродвижущая сила элемента уменьшается примерно на такую же величину. Кроме

того, слой водорода, образующийся на медном электроде, увеличивает внутреннее сопротивление элемента. Все это ведет к уменьшению силы тока в цепи, т. е. к поляризации элемента.

Для устранения вредного влияния поляризации элементов можно было бы удалять водород и другие вредные продукты, выделяющиеся на электродах, путем механического перемешивания электролита. Но такой способ может быть эффективным только тогда, когда поляризация возникает из-за градиентов концентрации электролитов. В остальных случаях он мало эффективен. Более эффективны следующие два способа *деполяризации элементов*, которые и применяются на практике. Первый из них состоит в том, что в элементе применяются две жидкости, подобранные так, что во время работы элемента не происходит изменения состава электродов. Такой способ применяется, например, в элементе Даниэля. Здесь на медном электроде выделяется медь, и состав этого электрода во время работы элемента не меняется. На цинковом же электроде растворяется цинк, так что не меняется состав и этого электрода.

Второй способ деполяризации гальванических элементов — *химический*. Он состоит в том, что к электролиту добавляются вещества, активно взаимодействующие с веществами, вызывающими поляризацию. Так, для ослабления вредного влияния водорода, выделяющегося на катоде, *деполяризаторами* могут служить различные *окислители*, а в случае кислорода, выделяющегося на аноде, — *восстановители*. Химический способ применяется, например, в наиболее употребительном элементе — *элементе Лекланше* (1839–1882). Положительный электрод в этом элементе состоит из угольного стержня, окруженного спрессованной массой перекиси марганца MnO_2 и графита (для увеличения электрической проводимости). Эта масса в свою очередь окружена цинковым листом, который служит отрицательным электродом элемента. Все это погружено в водный раствор хлористого аммония (нашатыря) NH_4Cl. Электродвижущая сила элемента несколько меньше 1,5 В. На цинковом электроде ионы Zn^{++} переходят в раствор, заряжая цинк отрицательно. Ионы NH_4^+ переходят из раствора на второй электрод, заряжая его положительно. Затем происходят вторичные реакции:

$$2NH_4 = 2NH_3 + 2H,$$

$$2H + MnO_2 = H_2O + MnO,$$

$$2NH_3 + 2H_2O = 2NH_4(OH).$$

Перекись марганца MnO_2 является сильным окислителем и окисляет выделяющийся водород в воду, как указывает вторая из этих реакций. Практически элемент Лекланше выпускается в виде так называемых *сухих элементов*, в которых к раствору электролита добавляются *загустители* (крахмал, мука). Во избежание испарения воды элемент сверху заливается слоем смолы.

6. Электролитическая поляризация может возникать не только в гальванических элементах, но и при электролизе. Так, если в раствор серной кислоты опустить два платиновых электрода, соединенных с источником тока, то при электролизе на катоде будет осаждаться водород, а на аноде — кислород (см. § 93). По мере накопления этих газов будут повышаться их парциальные давления. Когда они станут равными атмосферному давлению, начнется выделение на электродах пузырьков водорода и кислорода. Если теперь отключить источник тока, то один из платиновых электродов окажется покрытым водородом, а другой — кислородом. В результате электроды поляризуются: водородный будет заряжен положительно, а кислородный — отрицательно. При соединении электродов через электролит потечет электрический ток, противоположный току при электролизе, а водород и кислород в виде ионов будут переходить обратно в раствор. Когда запас обоих газов израсходуется, ЭДС обратится в нуль и ток прекратится.

В частных случаях ЭДС поляризации может и не возникать. Так будет, например, когда два медных электрода опущены в раствор $CuSO_4$. При электролизе один из электродов растворяется, а на другом осаждается металлическая медь. Состав электродов не меняется, а потому поляризация не возникает. Точнее, появится поляризация, обусловленная изменением концентраций электролита у электродов (см. § 95). Но электродвижущая сила, возникающая при такой поляризации, очень мала.

Посмотрим теперь, как ЭДС поляризации сказывается на процессе электролиза. Допустим, например, что производится электролиз соляной кислоты HCl и при этом используются платиновые электроды. Пусть внешнее напряжение V, приложенное к электродам, невелико, например $V = 0{,}5$ В. По мере накопления на электродах водорода и хлора возрастает ЭДС поляризации. Когда она достигнет 0,5 В, ток прекратится. Допустим теперь, что напряжение V медленно возрастает. Тогда будет увеличиваться и количество газов на электродах. Когда парциальные давления газов сделаются равными атмосферному давлению, они начнут выделяться в виде пузырьков. Начиная с этого момента состав электродов меняться не будет, а электродвижущая сила поляризации достигнет предельного значения V_0, равного равновесной разности потенциалов между хлором и водородом. Она равна $V_0 = 1{,}36$ В. Ток через электролит I будет определяться эффективной разностью потенциалов $V - V_0$. Он равен

$$I = \frac{V - V_0}{R},$$

где R — сопротивление электролита между электродами. Для того чтобы электролиз продолжался непрерывно, необходимо приложить внешнее напряжение V, превышающее «пороговое напряжение» V_0. Это пороговое напряжение называется *напряжением разложения электролита.*

В действительности в зависимости от характера протекающих электрохимических реакций у электродов напряжение разложения электролита обычно превышает ЭДС поляризации. Это явление называется *перенапряжением при электролизе.* Например, электродный потенциал кислорода относительно водорода равен +1,23 В. Можно было бы ожидать, что напряжение разложения серной кислоты будет 1,23 В. На самом деле для этой величины опыт дает 1,64 В.

7. Разновидностью гальванических элементов являются *аккумуляторы*, или *вторичные элементы.* Вещества, расходуемые при возбуждении электрического тока, получаются внутри самих аккумуляторов путем электролиза. Наибольшее распространение получил *свинцовый*, или *кислотный*, *аккумулятор.* Он изготовляется из двух решетчатых свинцовых пластин, заполненных пастой из PbO и воды и опущенных в 30-процентную серную кислоту (с плотностью 1,2 г/см^3). В результате реакции

$$PbO + H_2SO_4 = PbSO_4 + H_2O$$

на пластинах образуется слой труднорастворимого сернокислого свинца $PbSO_4$. Для того чтобы аккумулятор стал источником тока, его необходимо зарядить. С этой целью через аккумулятор пропускают электрический ток. Ионы H^+, двигаясь к катоду, нейтрализуются на нем и вступают в реакцию

$$PbSO_4 + 2H = Pb + H_2SO_4.$$

Отрицательные ионы SO_4^{2-}, достигая анода, также нейтрализуются и сначала вступают в реакцию

$$PbSO_4 + SO_4 = Pb(SO_4)_2,$$

затем происходит обратимая реакция

$$Pb(SO_4)_2 + 2H_2O \rightleftarrows 2PbO_2 + 2H_2SO_4.$$

Таким образом, после зарядки катод аккумулятора превращается в губчатую массу металлического свинца, а анод — в перекись свинца PbO_2. Концентрация серной кислоты в аккумуляторе при зарядке повышается. Если выключить внешний источник тока, то получится гальванический элемент с анодом из PbO_2 и катодом из Pb. Если такой элемент не замкнут, то он может сохраняться в заряженном состоянии весьма долго. При соединении полюсов заряженного аккумулятора проводником через цепь потечет электрический ток, направление которого противоположно зарядному току. Аккумулятор начинает разряжаться. Отрицательные ионы SO_4^{2-} переходят из раствора на свинцовый катод, нейтрализуются и вступают в реакцию $Pb + SO_4 = PbSO_4$. Около анода происходит обратимая реакция

$$PbO_2 + 2H_2SO_4 \rightleftarrows Pb(SO_4)_2 + 2H_2O.$$

Положительные ионы H^+ переходят из раствора на анод (PbO_2), нейтрализуются там и вступают в реакцию

$$Pb(SO_4)_2 + 2H = PbSO_4 + H_2SO_4.$$

Концентрация серной кислоты понижается. В конце концов аккумулятор вернется в исходное состояние; обе пластины его будут состоять из $PbSO_4$, а концентрация H_2SO_4 примет свое начальное значение. Для того чтобы аккумулятор давал ток, его необходимо снова зарядить.

ЭДС свинцового аккумулятора в самом конце зарядки может достигать 2,7 В. При разрядке она уменьшается: сначала быстро примерно до 2,2 В, затем очень медленно приблизительно до 1,85 В. Дальнейшую разрядку производить нельзя, так как при этом пластины аккумулятора покрываются труднорастворимым слоем $PbSO_4$, отчего аккумулятор портится.

Максимальный заряд, который может отдать аккумулятор при разрядке, называется его *емкостью.* Емкость принято измерять в *ампер-часах.* Она тем больше, чем больше поверхность электродов. Поэтому для увеличения емкости аккумулятор изготовляют не из сплошных свинцовых пластин, а из пластин, имеющих форму решеток, как описано выше.

Широкое распространение в настоящее время получили также *железо-никелевые*, или *щелочные*, *аккумуляторы.* Они имеют один электрод из железа, а другой — из никеля. Электролитом служит 20-процентный раствор едкого калия K(OH). В заряженном состоянии анодом в таких аккумуляторах является гидрат окиси никеля $Ni(OH)_3$, а катодом — железо. ЭДС щелочных аккумуляторов около 1,3 В. Их емкость при равном весе больше, чем у свинцовых аккумуляторов.

Глава VII
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТОКИ В МЕТАЛЛАХ, ПОЛУПРОВОДНИКАХ И ВАКУУМЕ

§ 97. Инерция электронов в металлах

1. Как уже неоднократно говорилось, в металлах носителями тока являются *свободные электроны*, т. е. электроны, сравнительно слабо связанные с ионами кристаллической решетки металла. Ионы в металлах не участвуют в переносе электричества. Если бы это было не так, то прохождение электрического тока через металл сопровождалось бы электролизом и связанным с ним переносом вещества. На самом деле этого не наблюдается. К. Рике (1845–1915) в течение года пропускал электрический ток через три поставленные друг на друга цилиндра — медный, алюминиевый и снова медный. Несмотря на то, что общий заряд, прошедший через эти цилиндры в течение указанного времени, достигал примерно 3,5 миллиона кулонов, никакого проникновения металлов друг в друга обнаружено не было и масса цилиндров сохранялась с точностью до $\pm 0{,}03$ мг.

2. Еще более определенные заключения о природе носителей тока в металлах позволяют сделать опыты с возбуждением электрического тока *силами инерции.* Для уяснения идеи таких опытов рассмотрим тонкое проволочное кольцо, неравномерно вращающееся вокруг своей геометрической оси. При всяком ускорении вращения свободные электроны будут отставать, а при замедлении — опережать ионы кристаллической решетки кольца. Возникнет движение электронов относительно кристаллической решетки, т. е. *электрический ток.* Для количественного описания явления перейдем к системе отсчета, вращающейся вместе с кольцом. В этой системе отсчета появится сила инерции $\mathbf{F}_{\text{ин}}$, действующая на каждый свободный электрон. Разделив ее на заряд электрона e, получим стороннее поле $\mathbf{E}^{\text{стор}} = \mathbf{F}_{\text{ин}}/e$, которое и возбуждает электрический ток. Поскольку возбуждаемый ток — переменный, закон Ома надо писать в форме (42.6) или

$$\mathbf{j} = \tau_{\text{ин}} \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \lambda(\mathbf{E}^{\text{стор}} + \mathbf{E}), \tag{97.1}$$

где $\mathbf{E}$ — электрическое поле, которое может появиться из-за смещения электронов относительно ионов. Приведя это уравнение обычным способом (см. § 44) к интегральной форме, получим

$$R\left(I + \tau_{\text{ин}} \frac{dI}{dt}\right) = \oint (\mathbf{E}^{\text{стор}} + \mathbf{E})\, d\mathbf{l},$$

где R — сопротивление кольца, а интегрирование ведется по контуру кольца. Первый интеграл $\oint \mathbf{E}^{\text{стор}}\,d\mathbf{l}$ есть электродвижущая сила $\mathscr{E}$ сторонних сил, действующих в контуре. Второй интеграл $\oint \mathbf{E}\,d\mathbf{l}$ равен $-L\,dI/dt$. Таким образом,

$$(L + R\tau_{\text{ин}})\frac{dI}{dt} + RI = \mathscr{E}. \tag{97.2}$$

В рассматриваемом нами случае электродвижущая сила $\mathscr{E}$ создается силами инерции. Силы инерции, перпендикулярные к оси провода, на силу тока I не влияют. Имеет значение только сила инерции, направленная вдоль оси провода. Она возникает из-за неравномерности вращения и равна $F_{\text{ин}} = -m\dot{v}$, где m — масса электрона, а v — линейная скорость вращения кольца. С учетом всего этого предыдущее уравнение принимает вид

$$(L + R\tau_{\text{ин}})\frac{dI}{dt} + RI = -\frac{m}{e}\,l\dot{v},$$

где l — длина кольца. Интегрируя полученное уравнение по времени от $t = t_1$ до $t = t_2$, найдем

$$(L + R\tau_{\text{ин}})(I_2 - I_1) + Rq = \frac{m}{e}\,l(v_1 - v_2),$$

где $q = \int I\,dt$ — количество протекшего электричества, а I_1, I_2, v_1, v_2 — значения силы тока I и скорости v в моменты времени t_1 и t_2 соответственно. Пусть до момента t_1 кольцо вращалось равномерно со скоростью $v_1 = v$, а в момент t_2 скорость v равна нулю и процесс установления тока в кольце к этому моменту закончился. Тогда $I_1 = I_2 = 0$ и, следовательно,

$$q = \frac{mlv}{eR}. \tag{97.3}$$

Измерив с помощью баллистического гальванометра количество протекшего электричества q, можно из этого уравнения определить удельный заряд e/m, а по направлению отклонения гальванометра судить о знаке заряда e.

Идея подобных опытов была высказана в 1913 г. русскими физиками Л. И. Мандельштамом (1879–1944) и Н. Д. Папалекси (1880–1947). Они же поставили качественные опыты и показали, что при крутильных колебаниях проволочной катушки вокруг ее геометрической оси действительно возникает переменный ток (см. задачу 3 к § 132). Приближавшаяся первая мировая война (опыты производились в Страсбурге) помешала Мандельштаму и Папалекси закончить начатое исследование. Опыт был предложен вновь Х. А. Лоренцем и осуществлен Толменом и Стюартом в 1916 г.

В опытах Толмена и Стюарта катушка из металлической проволоки приводилась в быстрое вращение вокруг своей геометрической оси (линейная скорость вращения достигала 300 м/с). Концы проволочной обмотки были соединены с очень чувствительным баллистическим гальванометром длинными гибкими проводами, скручивающимися во

время вращения катушки. При помощи специальных неподвижных катушек с электрическим током магнитное поле Земли в пределах катушки было настолько тщательно скомпенсировано, что при равномерном вращении последней гальванометр не обнаруживал никаких индукционных токов. Убедившись в этом, экспериментаторы быстро затормаживали вращение катушки, и тогда тотчас же гальванометр отклонялся. К этому опыту применимо уравнение (97.3), если в нем под l понимать длину проволоки в катушке (в опытах Толмена и Стюарта она достигала 500 м), а под R — общее сопротивление цепи, включая сопротивление гальванометра и соединительных проводов. Катушки изготовлялись из медной, алюминиевой и серебряной проволок. Направление отклонения гальванометра показало, что носителями тока в металлах являются отрицательные заряды. Удельный заряд e/m в пределах погрешностей измерений оказался таким же, как и у электронов в опытах с катодными лучами.

3. Кеттеринг и Скотт в 1944 г. произвели другой опыт, являющийся как бы обращением опыта Толмена и Стюарта. Они наблюдали изменение момента импульса проволочной катушки при изменении силы тока в ней. Подвешенная катушка, по которой протекал постоянный электрический ток, совершала крутильные колебания относительно своей геометрической оси $\varphi = a \sin \omega t$. Если ток обусловлен движением электронов, то сила тока представляется выражением $I = Sneu$, где S — площадь поперечного сечения провода, n — число свободных электронов в единице объема, а u — средняя упорядоченная скорость электронов относительно провода. С этим током связан момент количества движения относительно оси катушки $L_э = lSnmur$, где l — длина проволоки, а r — радиус витка. Таким образом, $L_э = (m/e)lrI$. Если сила тока изменится на ΔI, то изменится и момент импульса, связанный с движением электронов, а именно: $\Delta L_э = (m/e)lr\Delta I$. Однако момент импульса всей системы — кристаллической решетки и электронов — измениться не может. Действительно, ток меняется под действием электрического поля. Последнее действует не только на электроны, но и на ионы. Поскольку система электрически нейтральна, момент импульса, приобретенный электронами, будет равен по модулю и противоположен по знаку моменту импульса, приобретенному ионами кристаллической решетки. Отсюда следует, что при изменении тока I решетка приобретает момент импульса

$$\Delta L_\text{р} = -\Delta L_э = -\frac{m}{e}\, lr\Delta I.$$

Пусть изменение тока производится настолько быстро, что за время одного колебания катушка не успевает повернуться на заметный угол. Тогда можно считать, что угловая скорость решетки $\dot{\varphi}$ при крутильных колебаниях изменяется в соответствии с уравнением $\Theta \Delta \dot{\varphi} = \Delta L_\text{р}$, где Θ — момент инерции катушки относительно ее геометрической оси. Пусть изменение тока произошло в момент, когда катушка проходила через положение равновесия. В этот момент $\dot{\varphi} \equiv \omega a \cos \omega t = \omega a$. Поэтому амплитуда колебаний a получит приращение, определяемое

уравнением $\Theta\omega\Delta a = \Delta L_\text{р}$. Фактически в опыте производилось изменение на противоположное направления тока, так что $\Delta I = -2I$, и, следовательно,

$$\Delta a = \frac{\Delta L_\text{р}}{\Theta\omega} = \frac{2mlr}{e\Theta\omega} I = \frac{mlrT}{\pi e\Theta} I, \tag{97.4}$$

где $T = 2\pi/\omega$ — период крутильных колебаний катушки. На опыте измерялась величина Δa с помощью специального очень чувствительного устройства, которое мы не описываем.

Ввиду малости эффекта и необходимости защитить прибор от возмущений, значительно превосходящих самый эффект, опыт очень труден. Однако он был поставлен с использованием современной аппаратуры и притом настолько тщательно и в таких хороших условиях, что результаты получились весьма устойчивые. Опыт производился на специальной станции, расположенной вдали от дорог. Чувствительная часть прибора располагалась в идеально темном подвале, в котором поддерживалась постоянная температура и не было никаких потоков воздуха. В подвале были расположены три взаимно перпендикулярные системы катушек с общим центром. Они использовались для компенсации и контролирования различных составляющих земного магнитного поля. Наблюдатель делал отсчеты, находясь в верхнем помещении, при помощи особой системы телеуправления. Опыт производился с катушками из медной и алюминиевой проволок. Измеренное среднее значение удельного заряда e/m отличалось от общепринятого всего на 0,2 %.

§ 98. Явление Холла

1. Если исходить из модели «свободных» электронов (см. § 42), то плотность электрического тока в металле может быть выражена через их концентрацию n и подвижность по формуле

$$\mathbf{j} = enb\mathbf{E}. \tag{98.1}$$

Формула была бы справедлива и в том случае, если бы носителями тока были положительно заряженные частицы ($e > 0$). Если $e > 0$, то ток $\mathbf{j}$ направлен по полю $\mathbf{E}$; если же $e < 0$, то он направлен противоположно полю $\mathbf{E}$. Для определения двух величин n и b к уравнению (98.1) необходимо присоединить второе уравнение. С этой целью можно воспользоваться *эффектом Холла* (1855–1938).

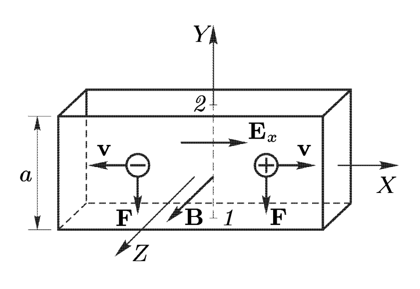


Рис. 215

Допустим, что вдоль длинной и тонкой металлической ленты течет постоянный ток с плотностью $\mathbf{j}$. Направление этого тока примем за ось X (рис. 215). Пусть перпендикулярно к плоскости ленты приложено постоянное однородное магнитное поле $\mathbf{B}$, направленное вдоль оси Z.

Если бы носителями тока были положительные частицы, то они двигались бы вместе с током вправо и сила Лоренца $(e/c)[\mathbf{vB}]$ отклоняла бы их вниз. Нижний край ленты стал бы заряжаться положительно, а верхний — отрицательно. Возникшее электрическое поле E_y препятствовало бы отклонению, вызываемому магнитным полем. Процесс накопления зарядов на нижнем и верхнем краях ленты продолжался бы до тех пор, пока не прекратилось бы течение зарядов поперек ленты. После этого поперек ленты между противоположными точками *1* и *2* установится положительная разность потенциалов $V_1 - V_2$. Если носителями тока являются отрицательные частицы, то вместе с током они будут перемещаться влево. Сила Лоренца $\mathbf{F} = (e/c)[\mathbf{vB}]$ будет отклонять такие частицы также вниз, так что теперь нижний край ленты зарядится отрицательно, а верхний — положительно. Таким образом, в этом случае поперечная разность потенциалов $V_1 - V_2$ будет отрицательной. Возникновение поперечной разности потенциалов в магнитном поле было экспериментально обнаружено Холлом в 1879 г., а само явление получило название *эффекта Холла.*

2. Рассчитаем приближенно разность потенциалов $V_1 - V_2$, пользуясь моделью свободных электронов. Между столкновениями движение частицы, переносящей ток, описывается уравнением

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\left(\mathbf{E} - \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right),$$

или в координатной форме

$$m\dot{v}_x = e\left(E_x + \frac{1}{c}\,v_y B\right), \quad m\dot{v}_y = e\left(E_y - \frac{1}{c}\,v_x B\right), \quad m\dot{v}_z = 0.$$

Допустим, что магнитное поле $\mathbf{B}$ слабое. Тогда поперечное электрическое поле E_y, а также члены, содержащие магнитное поле $\mathbf{B}$, в последних уравнениях можно рассматривать как малые поправки к основной силе eE_x. Для получения решения удобно применить метод последовательных приближений. В нулевом приближении оставляем только главный член eE_x и получаем

$$v_x = v_{0x} + \frac{e}{m}\,E_x t,$$

где $\mathbf{v}_0$ — скорость частицы непосредственно после последнего столкновения. Подставляя это выражение во второе уравнение, получаем уравнение первого приближения

$$m\dot{v}_y = e\left(E_y - \frac{v_{0x}}{c}\,B - \frac{eB}{mc}\,E_x t\right),$$

откуда

$$v_y = \frac{e}{m}\left(E_y t - \frac{v_{0x}}{c}\,Bt - \frac{eB}{2mc}\,E_x t^2\right).$$

Если τ — время свободного пробега, то среднее значение v_y между двумя последовательными столкновениями будет

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau v_y\,dt = \frac{e}{2m}\left(E_y\tau - \frac{v_{0x}B}{c}\,\tau - \frac{eBE_x}{3mc}\overline{\tau^2}\right).$$

Это выражение надо подвергнуть вторичному усреднению по всем столкновениям или (что то же самое) по всем частицам. Если ввести предположение, которым мы пользовались уже в § 42, что после каждого столкновения все направления скорости $\mathbf{v}_0$ равновероятны, то при таком усреднении величина $v_{0x}\tau$ обратится в нуль, так что для скорости v_y, усредненной по всем частицам, получится

$$\overline{v}_y = \frac{e}{2m}\left(E_y\overline{\tau} - \frac{eB}{3mc}\,E_x\overline{\tau^2}\right).$$

В установившемся состоянии $\overline{v}_y = 0$, а потому

$$E_y = \frac{eB}{3mc}\,\frac{\overline{\tau^2}}{\overline{\tau}}\,E_x.$$

Исключим отсюда $E_x\overline{\tau^2}/\overline{\tau}$ с помощью формулы

$$j = \frac{ne^2}{2m}\,\frac{\overline{\tau^2}}{\overline{\tau}}\,E_x$$

(см. § 42). Тогда получим

$$E_y = RjB, \tag{98.2}$$

где

$$R = \frac{2}{3}\,\frac{1}{nec}. \tag{98.3}$$

Постоянная R называется *постоянной Холла.*

Учитывая, что предположения, введенные при наших вычислениях не вполне корректны, нет смысла сохранять коэффициент 2/3. Отбросив этот коэффициент, получаем оценочную формулу [1])

$$R = \frac{1}{nec}. \tag{98.5}$$

Поперечная разность потенциалов $V_1 - V_2$, вызванная магнитным полем, определяется выражением

$$V_1 - V_2 = RjBa, \tag{98.6}$$

---

[1]) Более корректные вычисления, основанные на кинетическом уравнении Больцмана и классической статистике, приводят к результату

$$R = 3\pi/(8nec), \tag{98.4}$$

почти не отличающемуся от (98.3) и (98.4). Если же применять к электронам в металле статистику Ферми–Дирака, то результаты таких вычислений совпадают с формулой (98.4).

где a — ширина ленты. Зависимость такого типа и была экспериментально установлена Холлом.

Условие слабости магнитного поля, использованное в наших расчетах, сводится к требованию, чтобы поперечное электрическое поле E_y было слабым по сравнению с продольным полем E_x, т. е. $RjB \ll E_x$. Используя выражения для R и j, это условие нетрудно преобразовать к виду

$$\mathbf{\Omega}\overline{\tau} \ll 1, \tag{98.7}$$

где $\mathbf{\Omega} = |eB/(mc)|$ — циклотронная частота. Таким образом, время $\overline{\tau}$ должно быть мало по сравнению с циклотронным периодом $T = 2\pi/\mathbf{\Omega}$.

3. Для измерения коэффициента Холла чаще всего применяется *компенсационный метод.* К пластинке из исследуемого материала, по которой течет электрический ток, в точках *1* и *2* подводятся два контакта (рис. 216). В цепь включаются последовательно гальванометр G и компенсатор K, создающий напряжение, противоположное холловскому. Меняя это напряжение, добиваются того, чтобы ток через гальванометр обратился в нуль. После этого холловская разность потенциалов между точками *1* и *2* отсчитывается по компенсатору.

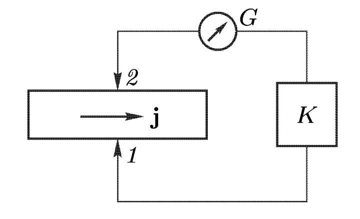


Рис. 216

В большинстве таблиц приводятся значения не величины R, а величины c^2R. (Такое значение коэффициент Холла получил бы, если бы пользоваться электромагнитной системой единиц.)

Таблица 5. Значения c^2R в гауссовой системе для некоторых металлов

Металл	$c^2R\cdot10^3$	A	ρ	z по (98.8)	Металл	$c^2R\cdot10^3$	A	ρ	z по (98.8)
Li	−1,70	7	0,53	0,83	Au	−0,736	197	19,3	1,43
Na	−2,50	23	0,97	0,98	Al	−0,343	27	2,7	3,0
Cu	−0,609	63,6	8,9	1,2	Pt	−0,230	195	21,5	4,1
Ag	−0,944	108	10,5	1,13					

Используя табл. 5, нетрудно показать, что холловская разность потенциалов $V_1 - V_2$ весьма мала. Возьмем, например, золотую ленту толщины $h = 0{,}1$ мм, по которой течет ток $I = 10$ А. Если $B = 10^4$ Гс, то формула (98.6) дает

$$V_1 - V_2 = R\frac{I}{ah}\,Ba = \frac{RIB}{h} = \frac{c^2RBI/c}{hc}.$$

Для перехода к практическим единицам умножаем эту величину на 300 и получаем

$$V_1 - V_2 = \frac{c^2RBI/c}{10^8h} = -\frac{0{,}736\cdot10^{-3}\cdot10^4\cdot1}{10^8\cdot10^{-2}} \approx 7 \text{ мкВ}.$$

Зная R, можно далее рассчитать концентрацию n электронов проводимости, а также число таких электронов z, приходящееся на один атом металла. Число атомов в единице объема определяется выражением $n_{\text{ат}} = N\rho/A$, где N — постоянная Авогадро, ρ — плотность металла, а A — атомная масса. Число z найдется делением концентрации электронов n на $n_{\text{ат}}$. С учетом формулы (98.4) это дает

$$z = \frac{A}{Rc\rho F} = \frac{A}{Rc^2\rho F/c}, \tag{98.8}$$

где F — постоянная Фарадея в гауссовой системе единиц. Если ее разделить на c, то получится то же число в электромагнитной системе: $F/c = 9650$. По формуле (98.8) и получены числа, приведенные в последнем столбце таблицы. Зная n и электрическую проводимость металла, можно вычислить по формуле (98.1) подвижность b. Для «нормальных металлов» значения b лежат в пределах около 5–50 см^2/(с·В). Столь низкие значения указывают на то, что электроны в металлах испытывают много соударений с кристаллической решеткой.

Для элементов первой группы периодической системы z приблизительно равно 1, т. е. числу валентных электронов. То же справедливо для алюминия — элемента третьей группы ($z \approx 3$). Помимо «нормальных металлов», для которых коэффициент Холла отрицателен, причем $c^2R \sim 10^{-3}$–10^{-4}, существуют металлы, обладающие *аномальными свойствами.* Так, коэффициент Холла висмута и всех металлов пятой группы периодической системы аномально велик (у висмута он примерно в 10^4 раз больше, чем у нормальных металлов) и резко меняется с температурой. У ферромагнетиков коэффициенты Холла в 10–100 раз больше, чем у нормальных металлов, и зависят от напряженности магнитного поля. Наиболее замечательно, однако, что коэффициент Холла может быть как положительным, так и отрицательным. Так, он отрицателен для щелочных металлов, Cu, Ag, Au, Mg, Ca, Hg, Al, Ga, In, Ti, Mn, Ni, Sn, Pd, Bi, Pt и положителен для Be, Zn, Cd, Tl, V, Cr, Fe, Co, Pb, Mo, Ru, As, Sb, Ta, W, Re, Ir. Дело обстоит так, как если бы носителями тока во второй из этих групп металлов были не отрицательные ($e < 0$), а положительные ($e > 0$) частицы. Такое заключение, однако, противоречит всей совокупности наших сведений о природе металлов. Это противоречие долгое время: являлось одной из основных трудностей в электронной теории металлов. Оно было вполне удовлетворительно разрешено квантовой теорией металлов (см. § 100).

§ 99. Применения статистики Ферми–Дирака к электронам в металлах

1. В § 42 мы говорили, что теория Друде, в которой электроны в металлах трактуются как частицы идеального газа, натолкнулась на трудности в вопросе о теплоемкости электронного газа. Эти трудности были успешно преодолены Зоммерфельдом в 1928 г. Зоммер-

фельд сохранил модель свободных электронов, но применил к ней вместо классической статистики квантовую статистику Ферми–Дирака (см. т. II, § 82).

В отличие от классической квантовая статистика принимает во внимание, что частица или система частиц, совершающая финитное движение в заданном силовом поле, может находиться лишь во вполне определенных *квантовых состояниях*, которым соответствуют определенные значения энергии. Эти значения называются *энергетическими уровнями* системы. При финитных движениях энергетические уровни *дискретны*, т. е. отделены один от другого конечными интервалами. В модели идеального электронного газа финитность и квантование движения обусловлены большими отталкивательными силами, действующими на электроны вблизи поверхности тела. Эти силы играют роль *непроницаемых стенок*, не позволяющих электронному газу выходить за пределы занимаемого им объема. При отсутствии таких «стенок» движение электронов было бы инфинитным и неквантованным.

В случае статистики Ферми–Дирака, которой подчиняется электронный газ, принимается во внимание также *принцип Паули*, согласно которому в каждом квантовом состоянии может находиться не более одного электрона. Соблюдение принципа Паули означает, что даже между «свободными» электронами существует какое-то взаимодействие, так что электроны нельзя считать вполне независимыми частицами. Однако это взаимодействие не является силовым. Оно — сугубо квантовый эффект, чуждый классическим представлениям.

С учетом всего изложенного выше для среднего числа электронов f, приходящихся на одно квантовое состояние, получается выражение

$$f = \frac{1}{\exp\dfrac{\varepsilon - \mu}{kT} + 1}, \tag{99.1}$$

где ε — кинетическая энергия электрона в рассматриваемом квантовом

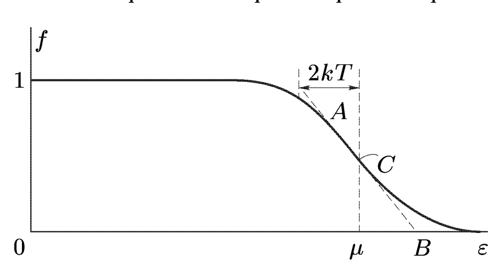


Рис. 217

состоянии, а μ — постоянная (химический потенциал электрона). Вид функции f представлен на рис. 217 сплошной линией.

2. При конкретных применениях формулы (99.1) необходимо знать число квантовых состояний, в которых может находиться электрон. Ответ на этот вопрос дает квантовая механика. Приведем его без

всяких обоснований. Введем *фазовое пространство* электрона, т. е. шестимерное пространство, по координатным осям которого откладываются прямоугольные пространственные координаты x, y, z и соответствующие им проекции импульса электрона p_x, p_y, p_z. Импульс электрона связан с его кинетической энергией ε соотношением $\varepsilon = p^2/2m$. Пусть V — объем, занимаемый электронным газом, а импульс электрона может принимать все значения от нуля до p. Объем соответствующего фазового пространства определяется выражением $\mathbf{\Omega} = (4\pi/3)p^3V$. Введем, далее, фазовые ячейки с фазовым объемом h^3 каждая. Число таких ячеек в рассматриваемой области фазового пространства будет $\mathbf{\Omega}/h^3$. Если бы электрон не обладал спином, то, как показывает квантовая механика, тому же выражению было бы равно и искомое число квантовых состояний электрона. Из-за наличия спина это выражение надо удвоить, так как в одной фазовой ячейке могут помещаться два электрона с противоположно направленными спинами. В дальнейшем будем предполагать, что $V = 1$. Тогда число квантовых состояний с импульсами от 0 до p представится выражением

$$Z = 2\frac{\mathbf{\Omega}}{h^3} = \frac{8\pi}{3h^3}\,p^3. \tag{99.2}$$

Число квантовых состояний с импульсами между p и $p + dp$ будет

$$dZ = \frac{8\pi p^2}{h^3}\,dp, \tag{99.3}$$

а с кинетической энергией между ε и $\varepsilon + d\varepsilon$

$$dZ = \frac{4\pi}{h^3}\,(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}\,d\varepsilon. \tag{99.4}$$

3. Вычисления с использованием формулы (99.1) очень громоздки, хотя в принципе и просты. Однако основной интерес представляет случай *вырожденного* электронного газа, т. е. газа вблизи абсолютного нуля температур. Рассмотрим сначала полное вырождение, когда $T = 0$. В этом случае функция (99.1) переходит в

$$f = \begin{cases} 1, & \text{если } \varepsilon < \mu, \\ 1/2, & \text{если } \varepsilon = \mu, \\ 0, & \text{если } \varepsilon > \mu. \end{cases}$$

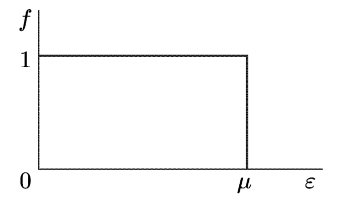


Рис. 218

Она представлена на рис. 218. Наибольшая энергия, которую может принимать электрон, $\varepsilon_{\text{макс}} = \mu$, а наибольший импульс — $p_{\text{макс}} = \sqrt{2m\mu}$. Величина μ называется *энергией* или *границей Ферми.* Число электронов в единице объема

$$n = Z_{\text{макс}} = \frac{8\pi}{3h^3}\,p^3_{\text{макс}} = \frac{8\pi}{3h^3}\,(2m\mu)^{3/2}, \tag{99.5}$$

откуда

$$\mu = \varepsilon_{\text{макс}} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{2/3}. \tag{99.6}$$

Полная энергия газа

$$\mathscr{E} = \int \varepsilon\, dZ = \frac{3n}{2}\,\mu^{-3/2}\int\limits_0^{\mu}\varepsilon^{3/2}\,d\varepsilon = \frac{3}{5}\,\mu n,$$

а средняя энергия, приходящаяся на один электрон,

$$\overline{\varepsilon} = \frac{3}{5}\,\mu = \frac{3h^2}{4m}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{2/3}. \tag{99.7}$$

Величина

$$T_g = \frac{\overline{\varepsilon}}{k} = \frac{3h^2}{4mk}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{2/3} \tag{99.8}$$

имеет размерность температуры и называется *температурой вырождения электронного газа.* Газ считается вырожденным, если его температура $T < T_g$. При сильном вырождении $T \ll T_g$.

Давление электронного газа

$$\mathscr{P} = \frac{2}{3}\,n\overline{\varepsilon} = \frac{h^2 n}{20m}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{2/3}. \tag{99.9}$$

Полагая для меди (см. табл. 5 на с. 417) $n = 10^{22}$ см$^{-3}$, по этим формулам находим $T_g \approx 5\cdot 10^4$ K, $\mathscr{P} \approx 5\cdot 10^4$ атм. Для всех металлов температура вырождения T_g много выше температуры плавления. Полученные цифры показывают, насколько мала кинетическая энергия теплового движения электронов металла по сравнению с «нулевой энергией», которой обладают электроны при абсолютном нуле температур. Практически электроны проводимости всех металлов находятся в состоянии сильного вырождения.

4. От полностью вырожденного перейдем к рассмотрению *сильно вырожденного* электронного газа. В этом случае почти все квантовые состояния ниже границы Ферми, для которых $\mu - \varepsilon \gg kT$, заполнены электронами, как и при абсолютном нуле температур. Исключение составляют только квантовые состояния вблизи самой границы Ферми. Здесь «прямоугольное распределение» Ферми, соответствующее абсолютному нулю температур, возмущается тепловым движением электронов, для которых $\varepsilon - \mu \sim kT$. Такие электроны непрерывно пересекают границу Ферми в прямом и обратном направлениях, причем в состоянии статистического равновесия средние числа прямых и обратных процессов одинаковы. Только такие электроны участвуют в тепловом движении. Ими, в частности, обусловлена теплоемкость электронного газа в металлах.

Выразим прежде всего концентрацию и кинетическую энергию электронного газа через энергию Ферми μ. Для этого надо вычислить

два интеграла:

$$n = \int f\, dZ \text{ и } \mathscr{E} = \int \varepsilon f\, dZ,$$

в которых интегрирование производится по всем значениям импульса p или энергии ε. Поскольку точное вычисление этих интегралов очень громоздко и требует специальных искусственных приемов, упростив задачу. Проведя в точке C (см. рис. 217) касательную AB к кривой Ферми, заменим этой касательной соответствующий участок кривой распределения Ферми. Иначе говоря, распределение Ферми аппроксимируем функцией

$$f = \begin{cases} 1, & \text{если } \varepsilon < \mu - 2kT, \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{\mu - \varepsilon}{4kT}, & \text{если } \mu - 2kT < \varepsilon < \mu + 2kT, \\ 0, & \text{если } \mu + 2kT < \varepsilon. \end{cases}$$

Тогда

$$n = \frac{3}{2}\, Z_{\text{макс}} \mu^{-3/2} \int\limits_0^{\mu - 2kT} \varepsilon^{1/2}\, d\varepsilon + \frac{3}{2}\, Z_{\text{макс}} \mu^{-3/2} \int\limits_{\mu-2kT}^{\mu+2kT} \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu - \varepsilon}{4kT}\right) \varepsilon^{1/2}\, d\varepsilon,$$

где для сокращения введено выражение $Z_{\text{макс}}$, определяемое формулой (99.5). Взяв первый интеграл и учитывая, что $kT \ll \mu$, преобразуем результат с помощью разложения бинома. Обрывая разложение на членах второй степени по kT/μ, получим

$$\int \varepsilon^{1/2}\, d\varepsilon = \frac{2}{3}\, \mu^{3/2} \left(1 - \frac{2kT}{\mu}\right)^{3/2} \approx \frac{3}{2}\, \mu^{3/2} \left(1 - \frac{3kT}{\mu} + \frac{3}{2}\, \frac{k^2T^2}{\mu^2}\right).$$

Во втором интеграле произведем замену переменной: $(\varepsilon - \mu)/(2kT) = x$. Тогда

$$\varepsilon^{1/2} = \mu^{1/2} \left(1 + \frac{2kTx}{\mu}\right)^{1/2} = \mu^{1/2} \left(1 + \frac{kTx}{\mu}\right),$$

$$\int \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu - \varepsilon}{4kT}\right) \varepsilon^{1/2}\, d\varepsilon = kT\mu^{1/2} \int\limits_{-1}^{+1} (1 - x) \left(1 + \frac{kT}{\mu}\, x\right) dx = \\ = 2kT\mu^{1/2} \left(1 - \frac{1}{3}\, \frac{kT}{\mu}\right).$$

В результате получится

$$n = Z_{\text{макс}} \left(1 + \frac{1}{2}\, \frac{k^2T^2}{\mu^2}\right). \tag{99.10}$$

Совершенно так же находим

$$\mathscr{E} = \frac{3}{5}\,\mu Z_{\text{макс}}\left(1 + \frac{5}{2}\,\frac{k^2T^2}{\mu^2}\right). \tag{99.11}$$

Средняя энергия, приходящаяся на один электрон,

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\mathscr{E}}{n} = \frac{3}{5}\,\mu\left(1 + 2\frac{k^2T^2}{\mu^2}\right), \tag{99.12}$$

а теплоемкость

$$c_v = \frac{\partial\overline{\varepsilon}}{\partial T} = \frac{12}{5}\,\frac{k^2}{\mu}\,T. \tag{99.13}$$

Поскольку для всех металлов вплоть до температуры плавления $kT/\mu \ll 1$, для теплоемкости c_v получается величина, малая по сравнению с k. Тем самым устраняются трудности, на которые натолкнулась классическая теория в вопросе о теплоемкости электронов в металлах.

5. Применим теперь теорию Зоммерфельда к выводу закона Видемана и Франца. Для этого воспользуемся формулой (42.24) и учтем, что перенос теплоты в металлах осуществляется только электронами вблизи границы Ферми, средняя кинетическая энергия которых $m\overline{v^2}/2 = \mu$. Подставив (99.13) в (42.26), получим

$$\frac{\chi}{\lambda} = \frac{16}{5}\left(\frac{k}{e}\right)^2 T. \tag{99.14}$$

Числовой коэффициент $16/5 = 3{,}2$ практически не отличается от коэффициента $\pi^2/3 = 3{,}29$, полученного Зоммерфельдом при строгих расчетах, а также от коэффициента 3, полученного в элементарной классической теории Друде. Однако классическая теория, приводя к практически правильному конечному результату (42.27), давала этому результату совершенно неправильное объяснение. По этой теории пропорциональность между χ/λ и T объяснялась тем, что средняя кинетическая энергия электрона равна $(3/2)kT$, т. е. пропорциональна абсолютной температуре. На самом деле закон Видемана и Франца (99.14) объясняется тем, что абсолютной температуре пропорциональна не средняя энергия, а *теплоемкость электрона.* Классическая теория допускала ошибку, завышая теплоемкость электронного газа. Однако эта ошибка случайно компенсировалась другой ошибкой. Скорость электронов, переносящих теплоту, определяется их кинетической энергией *вблизи границы Ферми*, тогда как классическая теория считала, что эта скорость порядка классической средней скорости теплового движения $\sqrt{kT/m}$. Тем самым скорость электронов, переносящих теплоту, сильно занижалась, а конечный результат (42.27) получался правильным.

6. Несмотря на успехи, теория Зоммерфельда обладает и существенными недостатками. В этой теории взаимодействие электронов с ионами кристаллической решетки, как и в классической теории, учитывается посредством *формально введенной* длины свободного пробега

электрона $\bar{l}$. Каково происхождение $\bar{l}$, как она зависит от температуры T — на эти вопросы теория Зоммерфельда не дает никакого ответа. Классическая теория (без достаточных на то оснований) считала, что процесс столкновения электронов с ионами решетки аналогичен столкновению твердых шариков. В такой модели $\bar{l}$ не зависит от температуры. Поэтому по формуле (42.25) следовало бы ожидать, что $\lambda \sim 1/T$. Если и в теории Зоммерфельда принять, что $\bar{l}$ не зависит от T, то λ также не должна была бы зависеть от T. На самом деле оба эти результата не согласуются с опытом. Для большинства чистых металлов при не очень низких температурах λ приблизительно обратно пропорциональна T: $\lambda \sim 1/T$.

Для решения вопроса надо рассмотреть на основе уравнений квантовой механики движение электрона *с учетом его взаимодействий с кристаллической решеткой.* Качественно основной результат можно понять без вычислений. Согласно квантовой механике движение электрона аналогично распространению какой-то волны в пространстве. В идеально прозрачной и однородной среде, например, световая волна распространяется без всякого ослабления и рассеяния в стороны. Так же вела бы себя и «электронная волна», если бы кристаллическая решетка, в которой она распространяется, была идеально правильной. В этом случае металл не оказывал бы электрическому току никакого сопротивления. На самом деле в реальной решетке *всегда есть примеси и возникают тепловые флуктуации*, нарушающие ее идеальную структуру. Благодаря этому электронная волна проходит через кристаллическую решетку не только в прямом направлении, но и рассеивается в стороны подобно тому, как рассеивается световой луч при распространении в мутной среде. Ослабление интенсивности волны происходит по экспоненциальному закону, т. е. $\sim \exp(-x/\bar{l})$, где $\bar{l}$ — постоянная, которая и играет роль длины свободного пробега электрона (см. т. II, § 88). Для полной длины свободного пробега, электрона $\bar{l}$ можно написать

$$\frac{1}{\bar{l}} = \frac{1}{\bar{l}_{\text{фл}}} + \frac{1}{\bar{l}_{\text{пр}}}, \tag{99.15}$$

где первый член справа обусловлен тепловыми флуктуациями, а второй — примесями. Величина $\bar{l}_{\text{пр}}$ от температуры не зависит, а для $\bar{l}_{\text{фл}}$ при обычных температурах расчет дает $\bar{l}_{\text{фл}} \sim T^{-1}$. В соответствии с этим и с формулой (42.25) получаем для удельного сопротивления

$$\rho \equiv \frac{1}{\lambda} = \alpha T + \rho_0, \tag{99.16}$$

где α и ρ_0 — постоянные. Для чистых металлов $\rho_0 = 0$, $\rho \sim T$. При низких температурах (которые, однако, выше критической температуры перехода в сверхпроводящее состояние) теория для чистых металлов дает $\rho \sim T^5$. Эти выводы теории согласуются с опытом.

7. В заключение рассмотрим парамагнетизм газа свободных электронов (см. § 77, п. 9), теория которого была дана Паули. Будем предполагать, что электронный газ полностью вырожден. При помещении в магнитное поле спин электрона может ориентироваться либо по, либо против поля. Этим ориентациям соответствуют два значения полной энергии электрона: $\varepsilon - \mathfrak{M}H$ и $\varepsilon + \mathfrak{M}H$, где $\mathfrak{M} = eh/(4\pi mc)$ — магнетон Бора, а ε по-прежнему означает кинетическую энергию электрона. Первая ориентация является более предпочтительной, поскольку ей соответствует меньшее значение полной энергии. Весь электронный газ можно рассматривать как два независимых газа, отличающихся друг от друга ориентациями спинов электронов. В распределении Ферми вместо кинетической энергии ε надо взять полную энергию $\varepsilon \mp \mathfrak{M}H$. От этого аргумент $\varepsilon - \mu$ заменится на $\varepsilon - (\mu \mp \mathfrak{M}H)$. Отсюда видно, что влияние магнитного поля сводится к смещению границы Ферми. Для газа с параллельной ориентацией спинов граница Ферми $\mu_1 = \mu + \mathfrak{M}H$, а с антипараллельной $\mu_2 = \mu - \mathfrak{M}H$. Далее, при рассмотрении каждого газа число состояний в формуле (99.2) надо уменьшить вдвое, т. е. вместо Z взять $Z/2$, поскольку в каждом газе осуществляется лишь одна из ориентации спина. С учетом всего этого для избытка концентрации одного газа над другим можно написать

$$n_1 - n_2 = \frac{Z}{2}(\mu + \mathfrak{M}H) - \frac{Z}{2}(\mu - \mathfrak{M}H),$$

где индекс 1 относится к параллельной, а индекс 2 — к антипараллельной ориентациям спинов. Предполагая, что $\mathfrak{M}H \ll \mu$, можем написать

$$n_1 - n_2 = \mathfrak{M}H\frac{\partial Z}{\partial \mu}.$$

Магнитный момент единицы объема будет

$$I = \mathfrak{M}(n_1 - n_2) = \mathfrak{M}^2\frac{\partial Z}{\partial \mu}H,$$

а магнитная восприимчивость электронного газа

$$\varkappa = \mathfrak{M}^2\frac{\partial Z}{\partial \mu} = \mathfrak{M}^2\frac{\partial n}{\partial \mu}.$$

Согласно формуле (99.5) $n \sim \mu^{3/2}$, и потому $dn/n = (3/2)\,d\mu/\mu$. С учетом этого

$$\varkappa = \frac{3}{2}\,\frac{\mathfrak{M}^2 n}{\mu}. \tag{99.17}$$

Подставив сюда значение для $\mathfrak{M}$ и воспользовавшись формулой (99.6), получим

$$\varkappa = \left(\frac{3n}{\pi^4}\right)^{1/3}\frac{e^2}{4mc^2}. \tag{99.18}$$

Формула (99.18) получена в предположении, что $T = 0$. Влияние температуры на магнитную восприимчивость электронного газа в состоянии сильного вырождения может сказаться лишь в виде малого

поправочного члена порядка $(kT/\mu)^2$ к основному эффекту, выражаемому формулой (99.18). Поэтому можно сказать, что парамагнетизм электронного газа не зависит от температуры. При выводе не учтено влияние магнитного поля на движение электронов. Если это учесть методами квантовой механики, то, как показал Л.Д. Ландау, выражение (99.18) надо уменьшить на одну треть. В таком виде формула удовлетворительно согласуется с опытом для щелочных металлов натрия и калия.

§ 100. Металлы и полупроводники

1. Удельная проводимость λ металлов при комнатной температуре меняется примерно в пределах от $6 \cdot 10^3$ до $6 \cdot 10^5$ $\text{Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$. Твердые вещества с удельной проводимостью примерно от 10^4 до 10^{-10} $\text{Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$ принято относить к классу так называемых *полупроводников*, а вещества с еще меньшей λ (приблизительно от 10^{-10} до 10^{-20} $\text{Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$) — к классу *диэлектриков.* Носителями тока в полупроводниках и диэлектриках могут быть как электроны, так и ионы. В последнем случае говорят о *твердых электролитах*, так как прохождение электрического тока в этом случае сопровождается электролизом. Электролитический характер проводимости был установлен во многих солях (безводные $NaNO_3$, KNO_3, $AgNO_3$, LiH, NaCl, CsCl и пр.) и их расплавах. Однако в настоящее время полупроводниками принято называть только вещества, у которых носителями тока являются *электроны.* Только такие полупроводники нашли широкое применение в технике.

К полупроводникам относятся многие химические элементы (углерод в виде графита, бор, кремний, германий, фосфор, мышьяк, селен, серое олово, теллур, йод и др.), громадное количество сплавов и химических соединений. Почти все неорганические вещества окружающего нас мира — полупроводники. С чисто эмпирической точки зрения качественное различие между металлами и полупроводниками проявляется в характере зависимости удельной проводимости от температуры. С понижением температуры проводимость металлов возрастает и для чистых металлов стремится к бесконечности при приближении температуры к абсолютному нулю. У полупроводников, напротив, с понижением температуры проводимость убывает, вблизи абсолютного нуля полупроводник фактически становится изолятором. При высоких температурах проводимость полупроводников приближается к проводимости металлов. Такой ход проводимости объясняется тем, что концентрация носителей тока (электронов проводимости) в металлах практически не зависит от температуры, а в полупроводниках носители тока сами возникают в результате теплового движения.

2. Почему одни тела являются проводниками, а другие полупроводниками и изоляторами — на этот вопрос нельзя ответить в рамках модели газа свободных электронов. Необходимо учитывать взаимодействие

атомов между собой и с электронами. Представим себе, что кристаллическая решетка металла или полупроводника образуется в результате сближения изолированных атомов. Наружные, так называемые *валентные*, электроны атомов металла сравнительно слабо связаны с атомными ядрами, а такие же электроны полупроводников — значительно сильнее. При сближении атомов последние приходят во взаимодействие друг с другом. В результате этого валентные электроны отрываются от атомов металла и становятся *свободными электронами*, которые могут перемещаться по всему металлу, *коллективизируются*, по образному выражению Я.И. Френкеля. В полупроводниках, благодаря значительно более сильной связи валентных электронов с ядрами атомов, положение иное. Чтобы оторвать электрон от атома и превратить его в электрон проводимости, требуется сообщить ему некоторую энергию, называемую *энергией ионизации.* Такая энергия поставляется тепловыми колебаниями атомов решетки. Она может быть сообщена и иначе, например облучением полупроводника короткими электромагнитными волнами, потоком быстрых частиц, воздействием сильного электрического поля и т. д. Для разных полупроводников энергия ионизации валентного электрона лежит в пределах от 0,1 до 2 эВ, т. е. заметно выше средней кинетической энергии теплового движения атома $(3/2)kT \approx 0{,}04$ эВ. Несмотря на это, тепловое движение вызывает ионизацию атомов, так как из-за его хаотичности мгновенная кинетическая энергия атома может в несколько раз превышать ее среднее значение. Число атомов с энергией, равной или превышающей энергию ионизации, относительно очень мало. Поэтому в полупроводниках мала и концентрация свободных электронов, образующихся в результате ионизации. Однако с повышением температуры эта концентрация и связанная с ней электрическая проводимость повышаются. Процессы *ионизации*, конечно, сопровождаются обратными процессами *рекомбинации*, в результате которых свободные электроны вновь захватываются атомами. В состоянии равновесия средние числа актов ионизации и рекомбинации одинаковы, и устанавливается вполне определенная *равновесная* концентрация свободных электронов, зависящая от температуры полупроводника.

3. Для более детального анализа процессов, происходящих в металлах и полупроводниках, необходимо исследовать структуру энергетических уровней, которые могут занимать валентные электроны в этих телах. Энергетические уровни какого-либо валентного электрона в одном изолированном атоме представлены на схематическом рис. 219 *а*. Для простоты будем считать их *простыми*, т. е. *невырожденными.* Наинизший уровень, или уровень с наименьшей энергией e_1, называется *основным*, или *невозбужденным.* Все остальные уровни называются *возбужденными.* Рассмотрим теперь N тождественных атомов, удаленных друг от друга настолько далеко, что их взаимодействием можно полностью пренебречь. Энергетические уровни того же валентного электрона системы N невзаимодействующих атомов

получатся, если рис. 219 *а* повторить N раз — столько, сколько содержится атомов в системе (рис. 219 *б*). Теперь каждый простой уровень превращается в уровень кратности N. Будем сближать атомы друг с другом, чтобы они образовали кристаллическую решетку. Тогда из-за взаимодействия между атомами каждый кратный энергетический уровень расщепится на N простых уровней (рис. 220). Совокупность

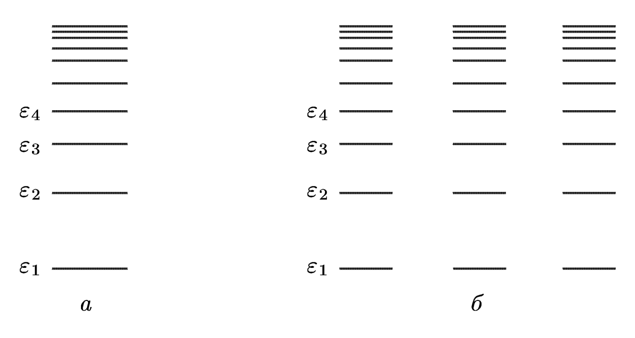


Рис. 219

энергетических уровней, на которые расщепляется кратный уровень, называется *энергетической зоной* или просто *зоной* кристалла. Зона, возникающая в результате расщепления N-кратного вырожденного

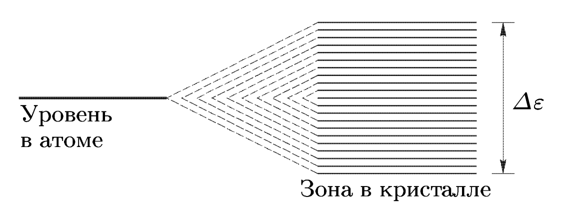


Рис. 220

основного уровня, называется *основной зоной*, а все остальные зоны — *зонами возбужденных уровней.* Ввиду того что N очень велико, расстояния между уровнями одной и той же зоны крайне малы, так что требуется ничтожная энергия, чтобы перевести электрон в пределах зоны с одного энергетического уровня на соседний. В этом смысле энергетические уровни каждой зоны ведут себя практически так, как если бы они были *непрерывны.* Однако соседние энергетические зоны, вообще говоря, разделены конечными интервалами энергии. Эти интервалы называются *запрещенными зонами*, так как энергия электрона не может принимать значения, лежащие в пределах таких интервалов. В противоположность запрещенным, зоны с дозволенными значениями энергии называются *разрешенными.* Энергетические зоны, разумеется, нельзя путать с пространственными зонами, т. е. областями пространства, в которых может находиться электрон.

Для правильного понимания изложенных результатов необходимо дополнить их следующим замечанием. Последовательный учет взаимодействия электронов между собой и с ионами кристаллической решетки требует решения «*задачи многих тел*» для систем с колоссальным количеством частиц. (В одном кубическом сантиметре меди содержится порядка 10^{22} электронов проводимости!) В строгой постановке такая задача неразрешима. Для возможности решения ее сильно упрощают и сводят к «*задаче одного тела*». Теория твердого тела, характеризующаяся таким упрощенным подходом, называется *зонной теорией.* В зонной теории считается, что электрон движется в постоянном электрическом поле, создаваемом ионами и всеми остальными электронами. Ионы, ввиду их относительно больших масс, считаются неподвижными. Электроны учитываются суммарно. Они как бы заменяются заряженной отрицательно электронной жидкостью, равномерно заполняющей пространство между ионами. Роль электронов в этой модели сводится только к тому, чтобы суммарно скомпенсировать положительные заряды ионов решетки, сделав последнюю *электрически нейтральной.* Электрическое поле в такой модели периодично в пространстве, причем периодами являются соответствующие *пространственные периоды* кристаллической решетки. В результате мы приходим к задаче о движении *одного* электрона в постоянном периодическом электрическом поле. Решение такой задачи в квантовой механике приводит к той же зонной структуре энергетических уровней, которая описана выше. Таким образом, такая структура характеризует возможные энергетические состояния *одного электрона*, находящегося в постоянном периодическом электрическом поле кристаллической решетки.

4. Внесем тело в постоянное электрическое поле, напряженность которого очень мала по сравнению с напряженностью внутриатомных и внутримолекулярных полей. Такое поле не меняет общий характер зонной структуры. Число энергетических уровней в зоне остается неизменным, но сами уровни смещаются, так как к энергии взаимодействия электрона с решеткой добавляется потенциальная энергия электрона во внешнем электрическом поле. Электроны, находящиеся в зоне, будут вести себя по-разному в зависимости от того, заполняют ли они все уровни зоны или некоторые уровни остаются свободными. При решении этого вопроса будем предполагать сначала, что абсолютная температура тела равна нулю.

Рассмотрим случай, когда *все* энергетические уровни зоны *заполнены электронами.* Если это имеет место в отсутствие электрического поля, то то же самое будет и после наложения слабого поля. Движение электрона в квантовой механике следует рассматривать как *процесс перехода* его *из одного возможного квантового состояния в другое.* Для возможности такого перехода необходимо, чтобы конечное квантовое состояние было *свободно*, т. е. не занято электроном. Но по условию все квантовые состояния зоны заполнены электронами. В этом случае между различными квантовыми состояниями зоны невозможны

никакие квантовые переходы, а потому электроны зоны *не могут* быть носителями электрического тока.

Рассмотрим теперь случай, когда *только часть* возможных квантовых уровней зоны *заполнена электронами*, а остальные уровни *свободны.* Если нет теплового движения или других источников, поставляющих энергию электронам, то заполненными окажутся все уровни с *самыми низкими* значениями энергии. Более высокие уровни окажутся свободными. То же будет и после наложения постоянного электрического поля **E**. Однако при этом произойдет *смещение* энергетических уровней. Уровни, бывшие наиболее низкими в отсутствие электрического поля, могут перестать быть таковыми после наложения поля. Получится другая система наиболее низких энергетических уровней. Начнутся квантовые переходы на эти уровни с прежних заполненных уровней. Они будут сопровождаться пространственными перемещениями электронов в направлении против электрического поля. Если электроны не могут уходить из тела, то этот процесс быстро прекратится, так как возникшие пространственные заряды создадут поле, которое внутри тела уничтожит внешнее приложенное поле. Если же смещающиеся электроны непрерывно отводить от тела (это происходит в замкнутой электрической цепи), то квантовые переходы электронов будут продолжаться непрерывно, пока в электрической цепи действует генератор, создающий в теле электрическое поле. Такие квантовые переходы и приводят к возникновению электрического тока в цепи. Таким образом, *для возможности электрического тока необходимо, чтобы энергетическая зона была заполнена электронами не целиком, а частично.*

5. В металлах основная энергетическая зона валентных электронов может быть отделена запрещенной зоной конечной ширины от вышележащей зоны возбужденных уровней (рис. 221 *а*). Но может быть и такой случай, когда ширина запрещенной зоны равна нулю, т. е. основная зона примыкает или даже перекрывается с ближайшей зоной возбужденных уровней (рис. 221 *б*). Этот случай сводится к предыдущему, так как обе зоны можно объединить в одну, рассматривая последнюю как основную зону. *В металлах основная зона всегда заполнена только частично.* Благодаря этому металлы и являются проводниками электрического тока.

В полупроводниках основная зона отделена от зоны возбужденных уровней конечным интервалом энергии $\Delta\varepsilon$ (рис. 221 *в*). Основную зону полупроводника принято называть *валентной,* а зону возбужденных уровней — *зоной проводимости. При абсолютном нуле температур валентная зона полностью заполнена электронами, а зона проводимости полностью свободна.* Поэтому при абсолютном нуле температур полупроводники не проводят электрического тока, т. е. являются *изоляторами. Изоляторы отличаются от полупроводников только большими значениями ширины запрещенной зоны* $\Delta\varepsilon$. Условно к изоляторам относят те полупроводники, для которых $\Delta\varepsilon$ превосходит примерно

2 эВ. Никакого качественного различия между полупроводниками и изоляторами нет. Различие — чисто количественное.

При повышении температуры электроны начинают обмениваться энергией с ионами кристаллической решетки. Благодаря этому электрон может получить добавочную кинетическую энергию порядка kT. Этой энергии может оказаться достаточно, чтобы некоторые электроны перевести из валентной зоны в зону проводимости. Такие электроны, перейдя в зону проводимости, начинают проводить электрический ток. Но проводимость возникает и по другой причине. В валентной зоне освобождаются квантовые состояния, не занятые электронами. Такие квантовые состояния получили весьма неудачное название *дырок.* Дырки также являются носителями электрического тока.

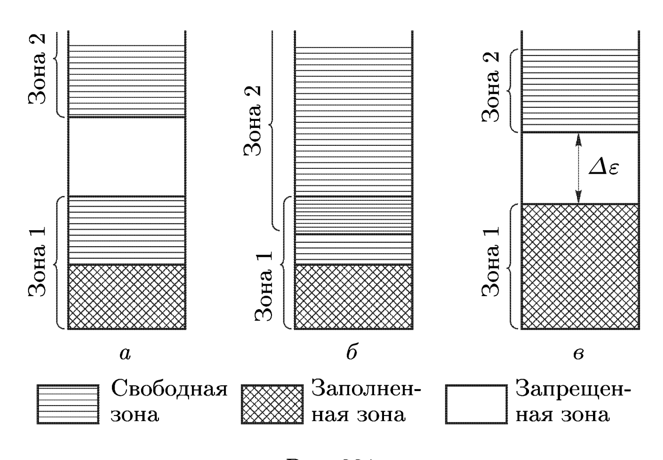


Рис. 221

Действительно, при наличии дырок электроны могут рекомбинировать с ними, т. е. совершать квантовые переходы из каких-то квантовых состояний в незаполненные состояния, т. е. дырки. Прежние заполненные состояния при этом освобождаются, т. е. превращаются в дырки. Последние в свою очередь могут рекомбинировать с другими электронами с образованием новых дырок и т. д. В результате этих процессов установится вполне определенная *равновесная концентрация* дырок, которая при отсутствии электрического поля будет одна и та же по всему объему полупроводника. При наличии электрического поля однородное распределение дырок в полупроводнике нарушится. Всякий квантовый переход электрона, поскольку его заряд отрицательный, сопровождающийся его перемещением против поля, уменьшает, а переход, связанный с перемещением в направлении поля, увеличивает потенциальную энергию системы. Поэтому первые переходы будут преобладать над вторыми. Это значит, что через полупроводник потечет электрический ток в направлении приложенного электрического поля **E**. В незамкнутом полупроводнике ток будет продолжаться до тех

пор, пока возникшее электрическое поле не компенсирует внешнее приложенное поле **E**. Однако если непрерывно отводить перемещающиеся электроны (как это делается в замкнутой электрической цепи), то ток будет течь непрерывно. Конечный результат явления получается таким же, как если бы носителями тока были не электроны, а положительно заряженные частицы — дырки. Поэтому различают *электронную* и *дырочную проводимость* полупроводников.

Конечно, *истинными носителями тока* в металлах и полупроводниках являются *реальные электроны*, а не формально введенные дырки. Никаких дырок, как реально существующих положительно заряженных частиц, в действительности нет. Однако представление о дырках оказалось весьма плодотворным по следующим соображениям. Классическими законами для движения электронов можно пользоваться в тех случаях, когда концентрация этих частиц в соответствующей энергетической зоне мала. Этому условию удовлетворяют электроны в зоне проводимости полупроводника. Но в валентной зоне мы имеем дело с противоположным случаем. Там почти все состояния заполнены электронами, зато мала концентрация дырок. Здесь классические уравнения к движению электронов неприменимы. Электроны надо рассматривать квантовомеханически. Такое рассмотрение, благодаря *малой концентрации дырок*, приводит к поразительно простому результату. Оказывается, что в *электрическом поле дырки движутся так, как двигались бы при классическом рассмотрении положительно заряженные частицы*, обладающие определенной массой. Столь простой результат и оправдывает представление о дырках. Заметим в связи с этим, что благодаря малости концентрации *к электронам в зоне проводимости и к дыркам в валентной зоне применима классическая статистика Больцмана.*

6. Электрическая проводимость полупроводников, как электронная, так и дырочная, о которой говорилось выше, не связана с наличием примесей в полупроводнике. Поэтому ее называют *собственной электропроводностью* в отличие от *примесной* электрической проводимости, обусловленной наличием примесей атомов других химических элементов. Уже ничтожные количества примесей чрезвычайно сильно увеличивают электропроводность полупроводников. Так, добавление к чистому кристаллу кремния фосфора в количестве всего 0,001 атомного процента увеличивает электрическую проводимость этого кристалла более чем в сто тысяч раз. В металлах, как мы видели, наблюдается обратное: примеси всегда уменьшают электрическую проводимость металлов.

Такое поведение полупроводников объясняется тем, что при наличии примесей появляются *добавочные энергетические уровни*, располагающиеся в запрещенной зоне полупроводника. На схематическом рис. 222 *а* изображены энергетические зоны чистого полупроводника. Допустим, что добавочные уровни в запрещенной зоне появились вблизи нижнего края зоны проводимости (рис. 222 *б*). С этих уровней электроны будут переходить в зону проводимости. Если интервал

энергии $\Delta\varepsilon_1$, отделяющий добавочные уровни от зоны проводимости, мал по сравнению с шириной запрещенной зоны $\Delta\varepsilon$, то количество электронов в зоне проводимости, а с ним и электрическая проводимость полупроводника могут увеличиться на несколько порядков. Примеси такого типа, поставляющие электроны в зону проводимости, называются *донорами*, или *донорными примесями.* Добавочные энергетические уровни, которые они создают в запрещенной зоне, называются также *донорными уровнями.*

Примером донорной примеси могут служить атомы мышьяка, вводимые в кристаллическую решетку кремния. Кремний — четырех-, а мышьяк — пятивалентный атом. Это значит, что наружная оболочка

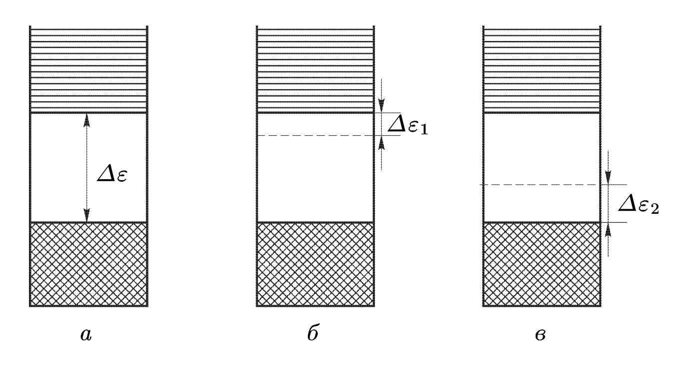


Рис. 222

атома кремния содержит четыре, а атома мышьяка — пять электронов. Пятый электрон может отщепиться от атома мышьяка в результате теплового движения. Получившийся положительный ион мышьяка может вытеснить из решетки один из атомов кремния и встать на его место. В результате этого между узлами решетки появится электрон проводимости.

Допустим теперь, что при введении атомов примеси добавочные уровни в запрещенной зоне появляются вблизи верхнего края валентной зоны (рис. 222 *в*). Тогда электроны из валентной зоны начнут переходить на эти добавочные уровни. В валентной зоне появятся дырки, а с ними и электропроводность полупроводника, но уже не электронная, а дырочная. Соответствующие примеси называются *акцепторами*, или *акцепторными примесями.* Дополнительные уровни, которые они создают в запрещенной зоне, также называются *акцепторными уровнями.*

Примером акцепторной примеси могут служить атомы бора или какого-либо другого элемента из третьей группы периодической системы. Наружная оболочка атома бора содержит три электрона. Атом бора может захватить недостающий четвертый электрон из какого-либо соседнего места кристалла. В этом месте образуется дырка, а образовавшийся отрицательный ион бора может вытеснить из кристаллической

решетки атом кремния и встать на его место. Так в кристалле кремния возникает дырочная проводимость.

Какой проводимостью обладает полупроводник — электронной или дырочной — об этом можно судить по знаку эффекта Холла. Полупроводники с донорной примесью называются *электронными*, или *полупроводниками n-типа* (от английского слова *negative* — отрицательный), а полупроводники с акцепторной примесью — *дырочными*, или *полупроводниками p-типа* (от английского слова *positive* — положительный). Могут быть и *смешанные полупроводники*, в которых носителями тока являются как электроны, так и дырки. Носители, которым принадлежит больший вклад в величину тока, называются *основными*, а прочие — *неосновными.*

ЗАДАЧА

Твердый водород является диэлектриком, плотность которого при нормальном давлении равна 0,076 г/см^3. Оценить плотность твердого водорода, при которой он становится металлом. Энергия ионизации атома водорода $\varepsilon_{\text{ион}} = 13{,}6$ эВ$= 2{,}18 \cdot 10^{-11}$ эрг.

Решение. Сжатие вещества сопровождается повышением уровня Ферми, которым при заданной плотности вещества определяется максимальная кинетическая энергия свободного электрона. Когда энергия Ферми μ становится равной энергии ионизации атома $\varepsilon_{\text{ион}}$, происходит ионизация атомов диэлектрика. Наружные электронные оболочки атомов разрушаются, валентные электроны коллективизируются, и диэлектрик становится металлом. Таким образом, концентрация атомов диэлектрика n, при которой он становится металлом, определяется условием $\mu \sim \varepsilon_{\text{ион}}$. Определив величину n из формулы (99.6) и умножив ее на массу атома водорода m_{H}, получим

$$\rho \approx \frac{\pi m_{\text{H}}}{3h^3}\,(8m\varepsilon_{\text{ион}})^{3/2} \approx 0{,}38 \text{ г/см}^3.$$

§ 101. Термоэлектронная эмиссия

1. То обстоятельство, что «свободные электроны» удерживаются внутри металла, указывает на то, что в поверхностном слое металла возникает задерживающее электрическое поле, препятствующее электронам выходить из металла в окружающий вакуум. Чтобы покинуть металл, электрон должен совершить некоторую работу, называемую *работой выхода.* Одна из причин возникновения работы выхода состоит в следующем. Если при тепловом движении электрон вылетит из металла, то он индуцирует на поверхности последнего заряды противоположного знака. Возникнет сила притяжения между электроном и поверхностью металла (так называемая *«сила электрического изображения»*, см. § 23), стремящаяся вернуть электрон обратно в металл. На преодоление этой силы требуется производство работы. Можно указать другую причину. Электроны, совершая тепловое движение, могут пересекать поверхность металла и удаляться от нее на небольшие расстояния (порядка атомных). Над поверхностью металла возникает электронная атмосфера, плотность которой быстро убывает при

удалении от металла. Под ней у поверхности металла остается слой положительно заряженных ионов. В результате образуется *двойной электрический слой*, действующий подобно конденсатору. Он не создает электрического поля во внешнем пространстве. Зато на преодоление электрического поля внутри самого двойного слоя также требуется производство работы. Вероятно, существуют другие причины возникновения работы выхода. Однако мы не будем входить в обсуждение этого вопроса, а ограничимся в дальнейшем лишь феноменологическим учетом работы выхода.

2. При повышении температуры металла увеличивается кинетическая энергия теплового движения электронов вблизи границы Ферми. Здесь она может стать настолько большой, что некоторые из электронов могут преодолевать задерживающий электрический потенциал на границе металла и выходить наружу. Если в окружающем вакууме существует электрическое поле, направленное к поверхности металла, то оно будет увлекать вышедшие электроны, и через вакуум потечет электрический ток. Этот ток называется *термоэлектронным*, а само явление — *термоэлектронной эмиссией.* Оно было открыто Эдисоном (1847–1931) в 1883 г.

Для наблюдения термоэлектронной эмиссии удобна вакуумная лампа с двумя электродами, называемая *вакуумным диодом.* Катодом лампы служит проволока (нить) из тугоплавкого металла (вольфрам, молибден и пр.), накаливаемая электрическим током. Анод чаще всего имеет форму металлического цилиндра, окружающего накаливаемый катод. Если диод включить в электрическую цепь, показанную на рис. 223, то при холодном катоде ток через цепь не пойдет. Если же нагреть катод до белого каления, то миллиамперметр покажет ток. При изменении полярности батареи ток прекращается. Это доказывает, что

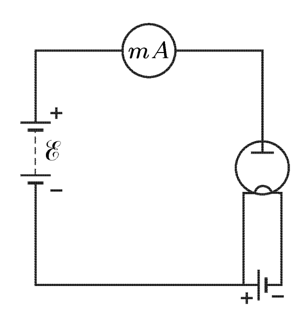


Рис. 223

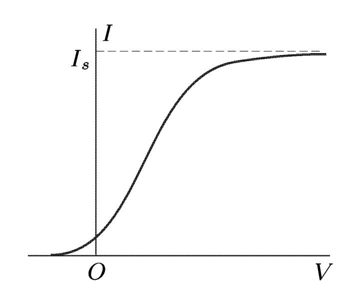


Рис. 224

носителями тока через вакуум являются *отрицательно заряженные частицы*, а именно *электроны*, так как никакими химическими превращениями вблизи электродов прохождение термоэлектронного тока не сопровождается.

Если, поддерживая температуру накаленного катода постоянной, менять напряжение V между анодом и катодом, то термоэлектронный

ток сначала будет возрастать (рис. 224). Однако это возрастание идет не пропорционально V, так что для вакуумного диода закон Ома не выполняется. По достижении определенного напряжения дальнейшее нарастание термоэлектронного тока практически прекращается. Последний достигает предельного значения I_s, называемого *током насыщения.* Наличие тока насыщения имеет весьма простое объяснение. Его величина определяется количеством термоэлектронов, которое в состоянии испариться с поверхности катода в единицу времени. Если электрическое поле настолько сильное, что оно отводит все электроны, испаряющиеся с поверхности катода, то дальнейшее увеличение напряженности поля уже не может привести к увеличению термоэлектронного тока. С этим и связано явление насыщения тока. Плотность термоэлектронного тока насыщения j_s определяет *эмиссионную способность* материала катода, т. е. максимальное количество электронов, которое может эмиттировать катод с единицы поверхности в единицу времени.

3. Плотность термоэлектронного тока насыщения зависит от материала катода и увеличивается с повышением температуры последнего. При вычислении этой плотности будем пользоваться моделью идеального электронного газа и применим к нему статистику Ферми–Дирака. Число квантовых состояний в единице объема металла с импульсами электронов внутри элемента объема импульсного пространства $dp_x dp_y dp_z$ с центром в точке (p_x, p_y, p_z) будет $dZ = (2/h^3)\, dp_x dp_y dp_z$, где коэффициент 2 учитывает спин электрона. Средняя концентрация электронов с такими импульсами определяется выражением

$$dn = \frac{2}{h^3} \frac{dp_x dp_y dp_z}{\exp \dfrac{\varepsilon - \mu}{kT} + 1}. \qquad (101.1)$$

Уточним теперь понятие работы выхода, введенное выше. Условимся называть этой величиной работу b, которую должен совершить электрон, чтобы с *уровня Ферми* выйти наружу металла. Для этого минимальная кинетическая энергия электрона на уровне Ферми должна быть $\varepsilon_{\text{мин}} = \mu + b$. Из металла могут выходить только такие электроны, кинетическая энергия которых на уровне Ферми превосходит $\varepsilon_{\text{мин}}$, т. е. $\varepsilon > \mu + b$. Только они играют роль при вычислении тока насыщения. Поэтому при дальнейших расчетах можно ограничиться рассмотрением лишь таких электронов.

Чтобы при эмиссии электронов кристаллическая решетка не разрушалась, из металла должна выходить ничтожная часть электронов. Для этого, как показывает формула (101.1), должно выполняться условие $\varepsilon - \mu \gg kT$, т. е. $b \gg kT$. Для таких электронов в знаменателе формулы (101.1) единицей можно пренебречь. Тогда формула (101.1) переходит в

$$dn = \left(\frac{2}{h^3} \exp \frac{\mu}{kT}\right) \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{kT}\right\} dp_x dp_y dp_z. \qquad (101.2)$$

Найдем долю электронов dn_z, z-составляющая импульса которых заключена между p_z и $p_z + dp_z$. Для этого предыдущее выражение надо проинтегрировать по p_x и p_y в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Так как $\varepsilon = (1/2m)(p_x^2+p_y^2+p_z^2)$, то в результате такого интегрирования получим

$$dn_z = \frac{4}{h^3}\,\pi mkT \exp\left\{-\frac{p_z^2/2m-\mu}{kT}\right\} dp_z. \tag{101.3}$$

Уход из металла электронов при термоэлектронной эмиссии, конечно, несколько нарушает равновесное распределение их по скоростям. Однако в нулевом приближении этим обстоятельством можно пренебречь, что и делается в дальнейшем. Число электронов рассматриваемой группы, падающих в единицу времени на единицу площади поверхности металла, определяется интегралом

$$\int v_z\,dn_z = \frac{1}{m}\int p_z\,dn_z,$$

где интегрирование ведется по всем электронам, для которых $p_z^2/2m \geqslant \mu + b$. Примем, что все эти электроны уходят из металла. Тогда плотность термоэлектронного тока насыщения j_s найдется умножением предыдущего интеграла на заряд электрона e. Введем новую переменную интегрирования

$$x = p_z^2/2m - \mu.$$

Тогда

$$j_s = \frac{4\pi em}{h^3}\,(kT)^2 \int\limits_{b/kT}^{\infty} e^{-x}\,dx. \tag{101.4}$$

В результате получим

$$j_s = AT^2 e^{-b/kT}, \tag{101.5}$$

где постоянная A определяется выражением

$$A = \frac{4\pi mek^2}{h^3} = 120\ \text{А}/(\text{см}^2\cdot\text{К}), \tag{101.6}$$

т. е. *одинакова для всех металлов.* Такая одинаковость связана с использованием модели идеального электронного газа, положенной в основу расчета. В этой модели индивидуальные свойства металла характеризуются двумя параметрами: работой выхода электрона b и энергией Ферми μ. Однако последняя входит в формулу (101.4) только в качестве слагаемого переменной интегрирования x, так что результат не зависит от μ, а определяется только работой выхода b и температурой металла T.

Измеряя плотность термоэлектронного тока j_s, можно по формуле (101.5) вычислить как постоянную A, так и работу выхода b.

4. Формула (101.5) была впервые получена Ричардсоном (1879–1959) на основе термодинамических соображений с использованием некоторых эмпирических данных. Другой вывод, в котором была

установлена универсальность коэффициента A, был дан Дешманом в 1923 г. Поэтому формула получила название *формулы Ричардсона* (1879–1959)–*Дешмана.* Дешман в своем выводе еще не мог учитывать электронного спина. По этой причине значение универсального коэффициента A у него было вдвое меньше, так как учет спина удваивает число возможных квантовых состояний электрона. Результат Дешмана с точностью до нескольких процентов был подтвержден при экспериментальной проверке формулы (101.5) на особенно подходящих для этой цели тугоплавких металлах — вольфраме и молибдене. Любопытно, что учет электронного спина значительно ухудшал согласие теории с опытом. Этот результат можно объяснить уже в рамках модели идеального электронного газа при более последовательном квантово-механическом рассмотрении. Дело в том, что по квантовой механике электроны, удовлетворяющие условию $\varepsilon > \mu+b$, не обязательно уходят из металла. Часть из них может *отразиться* обратно в металл от *потенциального барьера* на границе металла, который они должны преодолеть, чтобы выйти в вакуум. Однако мы не можем здесь входить в эти детали.

5. Заметим, что Ричардсон еще в 1901 г. получил другую формулу для плотности термоэлектронного тока насыщения. Он применил к электронному газу в металле классическую статистику Больцмана. Результат Ричардсона можно получить из наших формул, не производя новых вычислений. Надо только формулу (101.3) заменить соответствующим выражением из закона распределения скоростей Максвелла (см. т. II, § 72):

$$dn_z = n\left(\frac{1}{2\pi mkT}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{p_z^2}{2mkT}\right\}dp_z,$$

где n — число свободных электронов в единице объема металла. Главное отличие этой формулы от (101.3) состоит в том, что в предэкспоненциальном выражении она содержит $\sqrt{T}$ в знаменателе, тогда как в формулу (101.3) температура T входит в числителе и притом в первой степени. Чтобы получить первую формулу Ричардсона, очевидно, достаточно произвести замену

$$\frac{4}{h^3}\pi mkT \to n\left(\frac{1}{2\pi mkT}\right)^{1/2}.$$

Это дает

$$j_s = A'T^{1/2}e^{-b/kT}, \tag{101.7}$$

где

$$A' = ne\sqrt{\frac{k}{2\pi m}}. \tag{101.8}$$

Формула (101.7) получает простое истолкование, если записать ее в виде

$$j_s = \frac{1}{4}ne\overline{v}e^{-b/kT},$$

где $\overline{v}$ — средняя тепловая скорость электрона по классической теории. Величина $1/(4n\overline{v})$ дает число электронов, ежесекундно ударяющихся о единицу поверхности металла (см. т. II, § 75). Из этих частиц надо взять те, которые

в состоянии преодолеть потенциальный барьер на границе металла. Для этого поток частиц надо умножить на экспоненциальный множитель $e^{-b/(kT)}$.

Практически обе формулы (101.5) и (101.7) дают совпадающие результаты, так как зависимость тока j_s от температуры в основном определяется экспоненциальным множителем, который меняется с температурой значительно сильнее, чем степенные множители T^2 и $T^{1/2}$. Действительно, логарифмируя (101.5), находим, что при изменении температуры ток j_s изменяется в соответствии с формулой

$$\frac{\Delta j_s}{j_s} = 2\frac{\Delta T}{T} + \frac{b\Delta T}{kT^2}.$$

Отношение первого слагаемого в правой части этой формулы ко второму равно $2kT/b$. Для вольфрама $b = 4{,}5$ эВ. Если взять $T = 2500$ К, то для этого отношения получится 0,10. В случае формулы (101.7) соответствующее отношение будет еще меньше, а именно 0,025. Поэтому формулу (101.5) часто пишут в упрощенном виде:

$$\ln j_s = \text{const} - \frac{b}{kT}. \tag{101.9}$$

6. Плотность термоэлектронного тока насыщения j_s, таким образом, определяется отношением $b/(kT)$. Для тугоплавких металлов W, Mo, Pt работа выхода относительно велика и составляет соответственно 4,52, 4,37, 4,8 эВ. Получить сильные термоэлектронные токи с катодами из этих металлов можно лишь при очень высоких температурах накала. Между тем на практике весьма существенно снизить рабочую температуру катода, так как при этом уменьшаются затраты энергии на накал катода и увеличивается срок службы лампы. В так называемых *сложных катодах* это достигается путем снижения работы выхода. К числу таких катодов относится *оксидный катод*, получивший широкое распространение в технике. При его изготовлении на металлическую подложку (керн) наносят углекислые соединения щелочноземельных металлов ($BaCo_3$, $SrCO_3$, $CaCO_3$). При прокаливании эти соли разлагаются (согласно уравнению $BaCO_3 \rightleftarrows BaO + CO_2$ и пр.), и подложка оказывается покрытой слоем окислов щелочноземельных металлов (BaO, SrO, CaO или их смесями). После этого катод *активируют*, т. е. в течение некоторого времени пропускают через лампу термоэлектронный ток при температуре катода около 1000 °C. В результате этого на поверхности катода образуется *моноатомный слой* ионов щелочноземельных металлов, который сильно понижает работу выхода и тем самым увеличивает эмиссионную способность катода. Накаливание катода лампы осуществляется либо пропусканием тока через подложку, либо посредством вспомогательной металлической спирали («подогревные катоды»). Рабочая температура современных оксидных катодов составляет 800–900 °C и даже ниже. Нормальная эмиссионная способность достигает 1 А/см^2, а при очень коротких импульсах тока (порядка 10^{-6}–10^{-5} с) она может доходить до 100 А/см^2 и выше. Для сравнения укажем, что рабочая температура вольфрамовых катодов 2200 °C, а снимаемые с них термоэлектронные токи на практике не превышают 0,1 А/см^2.

7. Если бы все электроны, испаряющиеся с поверхности катода, попадали на анод, то сила термоэлектронного тока I не зависела бы от приложенного напряжения V. На самом деле это не так. С возрастанием напряжения ток I растет (см. рис. 224). Объясняется это тем, что в пространстве между катодом и анодом образуется отрицательный пространственный заряд, создающий электрическое поле, направленное противоположно приложенному электрическому полю. Этот вопрос теоретически был исследован Ленгмюром (1881–1957) в 1913 г. Допустим, что электроды лампы плоские. Их можно считать бесконечно большими. Температуру катода T будем поддерживать постоянной. Начало координат поместим на поверхности катода, а ось X направим перпендикулярно к этой поверхности в сторону анода. Потенциал электрического поля φ будет функцией только координаты x. Он удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi\rho = 4\pi ne, \tag{101.10}$$

где e — абсолютное значение заряда электрона. Плотность тока по абсолютной величине $j = nev$. Если в межэлектродном пространстве создан достаточно высокий вакуум, то столкновения электронов можно не учитывать и определить скорость электрона из уравнения $mv^2/2 = e\varphi$. При этом потенциал катода мы принимаем равным нулю и пренебрегаем тепловыми скоростями, с которыми электроны покидают поверхность катода. Исключив из этих соотношений концентрацию электронов n и скорость v, придем к уравнению

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{a^2}{\sqrt{\varphi}}, \tag{101.11}$$

где введено обозначение

$$a^2 = 4\pi j\sqrt{\frac{m}{2e}}. \tag{101.12}$$

Величина a, очевидно, постоянна, так как ток j от координаты x не зависит.

Сопоставляя уравнение (101.11) с (101.10), видим, что объемная плотность электричества ρ на поверхности катода обращается в бесконечность. Точка $x = 0$ является особой точкой уравнения (101.11), в которой оно теряет смысл. Этот недостаток теории является следствием принятой идеализации, в которой полностью пренебрегается тепловым разбросом скоростей электронов, уходящих с поверхности катода. Однако поверхностная плотность заряда на катоде остается конечной. Более того, она должна обращаться в нуль, как и напряженность электрического поля у поверхности катода. Если бы это было не так, то все электроны, эмиттируемые катодом, увлекались бы электрическим полем к аноду и термоэлектронный ток достигал бы насыщения при любых напряжениях на лампе. Таким образом, уравнение (101.11) надо

дополнить граничными условиями

$$\lim_{x\to 0}\varphi = \lim_{x\to 0}\frac{d\varphi}{dx} = 0. \tag{101.13}$$

Для решения уравнения (101.1) умножаем его на производную $d\varphi/dx$ и интегрируем с учетом граничных условий (101.13). Таким путем получим

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = 4a^2\varphi^{1/2}.$$

При извлечении квадратного корня надо сохранить только знак плюс, так как потенциал φ должен возрастать от катода к аноду и, следовательно, должен быть положительным во всем межэлектродном пространстве. В результате после разделения переменных приходим к уравнению

$$\frac{d\varphi}{\varphi^{1/4}} = 2a\,dx.$$

Интегрируя вторично, найдем

$$\frac{4}{3}\,\varphi^{3/4} = 2ax, \tag{101.14}$$

или после подстановки значения a

$$j = \frac{1}{9\pi x^2}\sqrt{\frac{2e}{m}}\,\varphi^{3/2}. \tag{101.15}$$

В частности, если V — напряжение, а l — расстояние между электродами, то

$$j = CV^{3/2}, \tag{101.16}$$

где постоянная C определяется выражением

$$C = \frac{1}{9\pi l^2}\sqrt{\frac{2e}{m}}. \tag{101.17}$$

Формула (101.16) называется *законом трех вторых* Ленгмюра. Этот закон остается верным для электродов произвольной конфигурации. От формы электродов зависит только выражение для числового коэффициента C. Ленгмюр решил задачу для коаксиальных цилиндрических электродов, когда катодом служит внутренний, а анодом — наружный цилиндр. Та же задача была решена С.А. Богуславским (1883–1923), который, кроме того, рассмотрел противоположный случай, когда катодом был наружный, а анодом — внутренний цилиндр. Ленгмюр рассмотрел также случай сферических электродов. Во всех случаях, как и следовало ожидать, получился закон трех вторых.

При малых напряжениях закон трех вторых дает заниженные значения для термоэлектронного тока, так как этот закон не учитывает теплового разброса скоростей электронов. При больших напряжениях закон был бы точным, если бы эмиссионная способность катода была

бесконечно велика. Поскольку это не так, наблюдаются отступления от закона трех вторых и при больших напряжениях. При увеличении напряжения в конце концов наступает насыщение, и закон трех вторых утрачивает силу.

§ 102. Электронные лампы и их применения

1. Электроны в вакуумном диоде, испускаемые катодом, движутся к аноду. Если на анод подать положительный потенциал, то ток через диод пойдет. Если же подать отрицательный потенциал, то тока не будет. На этом основано применение вакуумных диодов для *выпрямления переменных токов.* Схема «однополупериодного» лампового выпрямителя представлена на рис. 225 *а*. Если входное напряжение представляется кривой рис. 225 *б*, то при отсутствии конденсатора C выходное напряжение изобразилось бы кривой рис. 225 *в*. Оно состояло бы из импульсов напряжения, следующих друг за другом через половину периода $T/2$. Такую же форму имела бы и кривая тока I, текущего через *нагрузочное сопротивление* R. Для того чтобы получить непрерывное течение тока I и сгладить его пульсации, вводится конденсатор C. Тогда за каждую половину периода, когда через лампу течет ток, последний не только поступает в сопротивление R, но и заряжает конденсатор C.

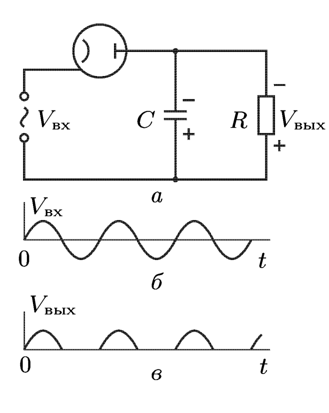


Рис. 225

В течение других полупериодов, когда лампа тока не пропускает, конденсатор разряжается через сопротивление R. Пульсации тока будут тем меньше, чем больше время $\tau = RC$, характеризующее быстроту разрядки конденсатора (см. § 48). Недостаток описанного выпрямителя состоит в том, что он пропускает ток только в течение одной половины периода T, а в течение другой половины не пропускает. На рис. 226 приведена схема «двухполупериодного» выпрямителя, в котором этот недостаток устранен.

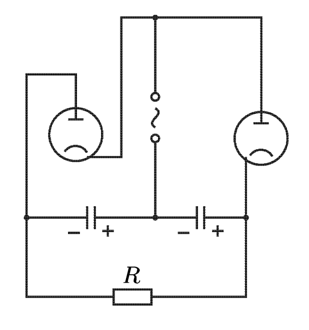


Рис. 226

2. Введением внутрь электронной лампы дополнительных электродов можно легко управлять электронным током. Эти дополнительные электроды называются *сетками*, так как им обычно придают форму металлических сеток или спиралей, окружающих катод. Простейшей является *трехэлектродная лампа*, или *триод*, имеющая всего одну сетку, называемую *управляющей сеткой.* Управляющая сетка располагается значительно ближе к като-

ду, чем анод. Поэтому изменение сеточного напряжения (т. е. разности потенциалов между сеткой и катодом) значительно сильнее влияет на напряженность электрического поля вблизи катода, а следовательно, и на электронный ток в лампе, чем равное по величине изменение анодного напряжения (т. е. разности потенциалов между анодом и катодом). Когда сеточное напряжение равно нулю, сетка практически не влияет на силу электронного тока в лампе. Если сетку зарядить положительно, то электронный ток увеличится. Если же ее зарядить отрицательно, то ток через лампу уменьшится и даже может совсем прекратиться. Изменениями потенциала сетки можно, следовательно, управлять силой электронного тока. Благодаря малости массы электрона инерционность триода также очень мала, и его управляющее действие сохраняется даже при очень быстрых изменениях сеточного напряжения.

Часть электронов, исходящих из катода, попадает на сетку, и в цепи последней возникает ток $I_\text{с}$, называемый *сеточным током.* Полный ток в лампе I слагается из анодного тока $I_\text{а}$ и тока на сетку $I_\text{с}$: $I = I_\text{а} + I_\text{с}$. Появление заметного сеточного тока нежелательно, так как оно приводит к бесполезному расходованию электрической энергии в цепи сетки. Однако в большинстве случаев основной поток электронов проходит сквозь редкую сетку, так что сеточный ток мал по сравнению с анодным током. Поэтому величиной $I_\text{с}$ мы, как правило, будем пренебрегать и считать, что $I = I_\text{а}$.

Анодный ток $I_\text{а}$ является функцией сеточного $V_\text{с}$ и анодного $V_\text{а}$ напряжений: $I_\text{а} = I_\text{а}(V_\text{с}, V_\text{а})$. На практике эту функцию принято характеризовать двумя семействами кривых, называемых *сеточными* и *анодными характеристиками.* Сеточная характеристика есть кривая $I_\text{а} = I_\text{а}(V_\text{с})$, изображающая зависимость анодного тока $I_\text{а}$ от сеточного напряжения $V_\text{с}$ при условии, что анодное напряжение и накал катода поддерживаются достоянными. Аналогично, анодная характеристика есть кривая, представляющая зависимость того же тока от анодного напряжения, если остаются постоянными сеточное напряжение и накал

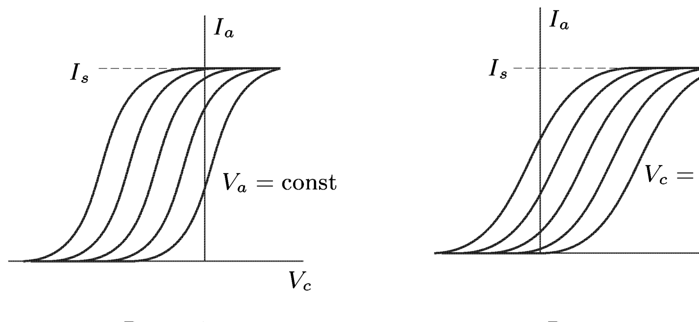


Рис. 227 Рис. 228

катода. Схематически сеточные и анодные характеристики представлены на рис. 227 и 228. Сеточные характеристики поднимаются более

круто, чем анодные. При увеличении параметра $V_\text{а}$ сеточные характеристики смещаются влево. То же происходит с анодными характеристиками при увеличении параметра $V_\text{с}$. При повышении температуры накала катода возрастает ток насыщения и оба семейства характеристик вытягиваются вверх.

Анодный ток $I_\text{а}$ меняется нелинейно как с изменением $V_\text{с}$, так и с изменением $V_\text{а}$. Только на средних участках характеристики почти прямолинейны, так что здесь приближенно соблюдается закон Ома. На этих участках производные

$$S = \left(\frac{\partial I_\text{а}}{\partial V_\text{с}}\right)_{V_\text{а}} \quad \text{и} \quad R_i = \left(\frac{\partial V_\text{а}}{\partial I_\text{а}}\right)_{V_\text{с}} \tag{102.1}$$

практически постоянны. Производная S называется *крутизной (сеточной) характеристики*, а производная R_i — *дифференциальным* или *внутренним сопротивлением лампы.*

Как видно из рис. 227, при изменении параметра $V_\text{а}$ форма сеточной характеристики практически остается неизменной, но вся характеристика смещается влево (при увеличении $V_\text{а}$) или вправо (при уменьшении $V_\text{а}$). При этом равным приращениям параметра $V_\text{а}$ соответствуют равные смещения характеристики. Отсюда следует, что анодный ток $I_\text{а}$ зависит не от напряжений $V_\text{с}$ и $V_\text{а}$ в отдельности, а только от их комбинации $V_\text{у} = V_\text{с} + DV_\text{а}$, где D — положительная постоянная, называемая *проницаемостью сетки.* Она меньше единицы, так как изменения сеточного напряжения значительно сильнее влияют на величину анодного тока, чем такие же изменения анодного напряжения. Таким образом, функция двух переменных $I_\text{а} = I_\text{а}(V_\text{с}, V_\text{а})$ фактически переходит в функцию одной переменной $V_\text{у} = V_\text{с} + DV_\text{а}$. По этой причине величина $V_\text{у}$ называется *управляющим напряжением.* Дифференцируя формулу $I_\text{а} = I_\text{а}(V_\text{у}) = I_\text{а}(V_\text{с} + DV_\text{а})$, получаем

$$S = \left(\frac{\partial I_\text{а}}{\partial V_\text{с}}\right)_{V_\text{а}} = \frac{dI_\text{а}}{dV_\text{у}}, \qquad \frac{1}{R_i} = \left(\frac{\partial I_\text{а}}{\partial V_\text{а}}\right)_{V_\text{с}} = \frac{dI_\text{а}}{dV_\text{у}}\left(\frac{\partial V_\text{у}}{\partial V_\text{а}}\right)_{V_\text{с}} = SD.$$

Отсюда следует, что параметры лампы S, D, R_i связаны соотношением

$$SDR_i = 1. \tag{102.2}$$

3. Трехэлектродная лампа может служить для *усиления электрических сигналов и переменных токов.* Принципиальная схема усилителя на триоде приведена на рис. 229. В анодную цепь лампы введена батарея с электродвижущей силой $\mathscr{E}$ и нагрузочное сопротивление $R_\text{а}$. Усиливаемое напряжение прикладывается между сеткой и катодом. Рассматривая анодный ток как функцию управляющего напряжения $V_\text{у}$, напишем

$$\mathit{\Delta} I_\text{а} = S\mathit{\Delta} V_\text{у} = S(\mathit{\Delta} V_\text{с} + D\mathit{\Delta} V_\text{а}).$$

Применяя же закон Ома к внешнему участку цепи $K\mathscr{E}A$ и пренебрегая при этом внутренним сопротивлением батареи и подводящих проводов,

получим

$$V_а = \mathscr{E} - R_а I_а.$$

Так как величина $\mathscr{E}$ постоянна, то

$$\Delta V_а = -R_а \Delta I_а = -R_а S(\Delta V_с + D\Delta V_а),$$

и, следовательно,

$$\frac{\Delta V_а}{\Delta V_с} = -\frac{R_а S}{1 + SDR_а}.$$

Используя соотношение (102.2), приведем эту формулу к виду

$$\frac{\Delta V_а}{\Delta V_с} = -\frac{R_а}{R_а + R_i}\frac{1}{D}. \qquad (102.3)$$

Полученная формула показывает, как связаны между собой амплитуды колебаний анодного и сеточного напряжений. В частном случае, когда $R_i \ll R_а$, она переходит в

$$\frac{\Delta V_а}{\Delta V_с} = -\frac{1}{D}. \qquad (102.4)$$

Поэтому величина $K = 1/D$ называется *коэффициентом усиления лампы*. В другом предельном случае, когда $R_i \gg R_а$,

$$\frac{\Delta V_а}{\Delta V_с} = -\frac{R_а}{R_i D} = -SR_а, \qquad (102.5)$$

и усиление тем больше, чем больше крутизна характеристики S. Знак минус в формулах (102.3)–(102.5) означает, что фазы колебаний сеточного и анодного напряжений противоположны.

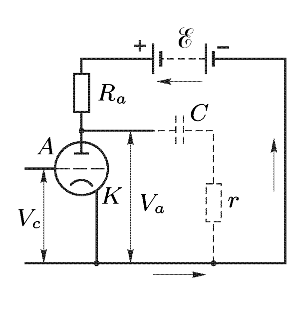


Рис. 229

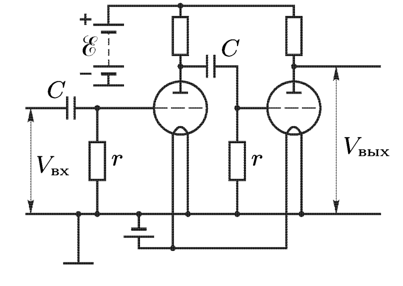


Рис. 230

Усиление электрического сигнала можно повторять многократно. Для этого напряжение, усиленное первой лампой, подается на сетку второй; напряжение, усиленное второй лампой, — на сетку третьей и т. д. Одна из схем такого *каскадного усилителя* представлена на рис. 230. Напряжение на сетку каждой лампы подается не непосредственно, а через *разделительный конденсатор* C. Последний, не препятствуя прохождению переменного усиливаемого сигнала, не допускает

на сетку высокое постоянное напряжение анодной батареи. Между сеткой и катодом каждой лампы включено сопротивление r (утечка сетки). Делается это с целью предотвращения *«запирания»* лампы. Дело в том, что в те периоды времени, когда потенциал сетки положителен, на нее попадают электроны. В отсутствие утечки на сетке накопились бы отрицательные заряды такой величины, что ток через лампу прекратился бы. Надлежащим подбором емкости C и сопротивления r можно добиться, чтобы колебания напряжения на сетке происходили около небольшого определенного значения, при котором еще сохраняется управляющее действие сетки, а сеточный ток пренебрежимо мал.

4. Для многих целей требуется, чтобы анодный ток зависел от *сеточного* и практически не зависел от анодного напряжения. Это достигается введением между управляющей сеткой и анодом *дополнительной сетки*, на которую подается положительный относительно катода потенциал, несколько меньший потенциала анода. Такая дополнительная сетка называется *экранной*, а *четырехэлектродная* лампа, в которую она входит, — *тетродом.* Введение экранной сетки ослабляет электрическое поле в окрестности анода, уменьшая тем самым влияние потенциала анода на анодный ток. В этом отношении экранная сетка действует так же, как уменьшение проницаемости D управляющей сетки. Поэтому коэффициент усиления у тетрода при прочих равных условиях гораздо больше, чем у триода. Однако введение экранной сетки легко может привести к нежелательным явлениям. Электроны, прошедшие через экранную сетку, попадают на анод и выбивают из него вторичные электроны. Это явление называется *динатронным эффектом.* Такое явление возникает и в триоде. Но в триоде при нормальной работе выбитые электроны обратно возвращаются к аноду под действием электрического поля последнего. В тетроде же экранная сетка всегда заряжена положительно, и в случае сильных колебаний анодного напряжения потенциал анода в отдельные периоды может стать ниже потенциала экранной сетки. Тогда выбитые электроны начнут попадать на экранную сетку и проходить через нее. Это ведет к уменьшению анодного тока, появлению провалов на характеристиках и ухудшению свойств тетрода. Нежелательные явления, вызванные динатронным эффектом, могут быть устранены введением третьей, так называемой *защитной* или *противодинатронной сетки.* Эта сетка помещается между экранной сеткой и анодом (рис. 231). Она соединяется с катодом (часто внутри лампы). Находясь под потенциалом катода, она тормозит вторичные электроны, препятствуя попаданию их на экранную сетку. В то же время она не оказывает существенного влияния на движение основного электронного потока. Лампы с пятью электродами, или *пентоды*, имеют высокий коэффи-

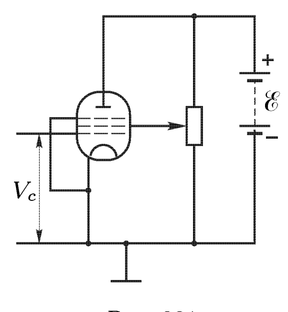


Рис. 231

циент усиления. Их характеристики гладкие, без провалов. Поэтому они получили более широкое распространение, чем тетроды.

Применение электронных ламп для генерации электрических колебаний будет рассмотрено в § 133.

§ 103. Вторичная и автоэлектронная эмиссия

1. При бомбардировке поверхностей металлов, полупроводников или диэлектриков пучком электронов наблюдается испускание *вторичных электронов*. Это явление называется *вторичной электронной эмиссией* (в электронных лампах его чаще называют *динатронным эффектом*, см. предыдущий параграф). В пучке эмиттируемых электронов наблюдаются три группы электронов: 1) электроны, упруго отраженные поверхностью эмиттера; 2) неупруго отраженные электроны; 3) вторичные электроны, т. е. такие электроны, которые выбиваются из эмиттера первичными электронами. Для количественного описания явления принято вводить *коэффициент вторичной эмиссии* σ. Так называют отношение σ полного количества электронов N, испущенных эмиттирующей поверхностью, к числу первичных электронов N_0:

$$\sigma = \frac{N}{N_0}.$$

Коэффициент вторичной электронной эмиссии зависит от природы, изготовления и от состояния поверхности облучаемого тела, а также от скорости электронов в падающем пучке и от угла падения последнего. Коэффициент σ не зависит от интенсивности пучка первичных электронов, если эта интенсивность не настолько велика, чтобы приводить к испарению и разрушению поверхности тела. Начальная энергия основной доли вторичных электронов, вышедших из эмиттера, составляет несколько электронвольт и в широком интервале не зависит от энергии первичных электронов. Первичные электроны, проникая внутрь бомбардируемого вещества, возбуждают на своем пути электроны эмиттера. Число электронов, возбуждаемых на единице пути первичного электрона, возрастает к концу пробега последнего. Именно здесь зарождается основная доля вторичных электронов, которые затем при благоприятных условиях могут выйти наружу. Чем больше скорость v первичных электронов, тем глубже они проникают в облучаемое тело и тем больше возбуждают вторичных электронов. Но, поскольку освобождение электронов происходит в более глубоких слоях тела, уменьшается вероятность выхода их наружу. Этим объясняется, почему коэффициент вторичной эмиссии сначала возрастает с увеличением скорости v первичных электронов, затем достигает размытого максимума, а при дальнейшем возрастании скорости v снова уменьшается. Аналогично объясняется возрастание коэффициента σ с увеличением угла падения первичных электронов: при скользящем падении первичного пучка вторичные электроны возникают в среднем ближе к поверхности эмиттера, чем при нормальном падении. Для

отчетливого наблюдения этого явления необходимо, конечно, чтобы поверхность эмиттера была достаточно гладкой.

Вторичная электронная эмиссия из толстых слоев металла всегда больше, чем из тонких металлических пленок, нанесенных на поверхность стекла. С увеличением толщины пленки до определенного предела эмиссия возрастает. Однако начиная с этого предела она становится такой же, как и у толстых металлических тел. Поэтому, экспериментируя с пленками, можно оценить толщину поверхностного слоя металла, из которого происходит эмиссия вторичных электронов. Таким путем найдено, что в металлах эта толщина не превосходит $5 \cdot 10^{-6}$ см.

Выход вторичных электронов, образовавшихся внутри эмиттера, в сильной степени зависит от природы последнего. В металлах, где велика концентрация электронов проводимости, вторичные электроны часто сталкиваются с ними и растрачивают свою энергию. В этих условиях вероятность выхода вторичных электронов наружу мала. Напротив, в полупроводниках и диэлектриках концентрация электронов проводимости мала, столкновения с ними происходят реже, а вероятность выхода электронов из эмиттера возрастает в несколько раз. Поэтому не существует металлов с большими коэффициентами σ и эффективные эмиттеры встречаются только среди полупроводников и диэлектриков. Значение σ в максимуме для всех чистых металлов не превышает 2, а для некоторых металлов даже меньше единицы. Так, для меди $\sigma_{\text{макс}} = 1{,}29$, никеля 1,25, серебра 1,47, платины 1,78, бериллия 0,53, алюминия 0,97. У полупроводников $\sigma_{\text{макс}}$ может достигать 10 и больше. Для получения сильной вторичной эмиссии на практике применяются *сложные катоды* (эмиттеры), состоящие из металлической подложки, на которой химическим путем и специальной обработкой создан тонкий слой полупроводника. Таковы, например, *сурьмяно-цезиевые эмиттеры*, получаемые обработкой сурьмы в парах цезия, *серебряно-цезиевые эмиттеры*, изготовляемые путем окисления серебра с последующей обработкой цезием, и другие аналогичные эмиттеры. Для таких эмиттеров $\sigma_{\text{макс}} \sim 10$.

2. Вторичная электронная эмиссия используется в *фотоэлектронных умножителях* (ФЭУ), предназначенных для усиления слабых электрических токов. Этот прибор представляет собой вакуумную трубку с катодом K и анодом A, между которыми расположено несколько электродов, эмиттирующих вторичные электроны (рис. 232). На эти электроды подается электрическое напряжение посредством делителей $Д$. Падающее электромагнитное излучение вырывает электроны с поверхности катода. Под действием электрического поля слабый электронный пучок ускоряется и направляется к эмиттеру $Э_1$, на котором происходит вторичная электронная эмиссия. Электроны с первого эмиттера направляются на второй эмиттер $Э_2$, где происходит вторичное усиление, и т. д. В результате получается усиленный во много раз (от 10^5 до 10^9) фототок, который и снимается с анода A.

3. Вторичная электронная эмиссия возникает не только при бомбардировке эмиттера электронами, но и при бомбардировке тяжелыми частицами — положительными и отрицательными ионами. Коэффициент

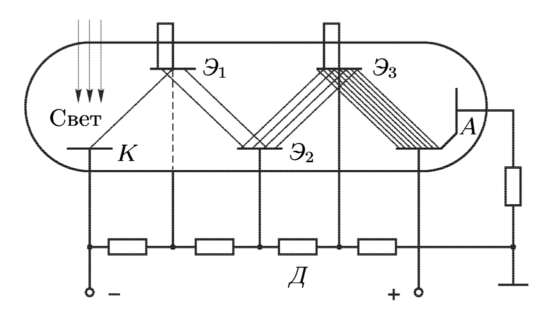


Рис. 232

вторичной эмиссии, т. е. среднее число электронов, вырываемых одной первичной частицей, здесь меньше, чем при бомбардировке электронами. Эмиссия электронов возникает также при облучении поверхности тела светом и другими короткими электромагнитными волнами (*фотоэлектрический эффект*). Это явление будет рассмотрено в т. V, ч. I нашего курса.

4. Эмиссия электронов из поверхности металлов может происходить под действием *сильного* электрического поля, вырывающего электроны из металла. Это явление называется *автоэлектронной*, или *холодной*, *эмиссией.* Для его наблюдения может служить хорошо откачанная вакуумная трубка, катодом которой служит металлическое острие, а анодом — обычный электрод с плоской или мало изогнутой поверхностью. При наложении напряжения на трубку у поверхности катода возникает сильное электрическое поле. Для оценки его числового значения катод можно считать маленьким шариком, а анод — удаленным в бесконечность. Если a — радиус шарика, а V — напряжение на трубке, то заряд шарика будет $q = Va$, а напряженность электрического поля на расстоянии r от центра шарика $E = q/r^2 = Va/r^2$. На самой поверхности шарика $E = V/a$. Пусть, например, радиус кривизны кончика острия $a = 10^{-2}$ мм. Тогда при напряжении $V = 1000$ В у поверхности катода возникнет поле $E \sim 10^6$ В/см. Если постепенно повышать напряжение на трубке, то при напряженности поля у поверхности катода $E \sim 10^5$–10^6 В/см в трубке возникает слабый ток, обусловленный автоэлектронной эмиссией с поверхности катода. Сила этого тока быстро увеличивается с повышением напряжения на трубке. Ток возникает и при холодном катоде По этой причине эмиссия и называется холодной. При дальнейшем повышении напряжения катод начинает сильно нагреваться и испаряться, а в трубке возникает газовый разряд. Объяснение механизма автоэлектронной эмиссии возможно только на основе волновой (квантовой) механики.

Глава VIII

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В КОНТАКТАХ

§ 104. Контактная разность потенциалов

1. При соприкосновении двух различных металлов между ними возникает разность потенциалов, называемая *контактной разностью потенциалов.* Это явление было открыто Вольтой в 1797 г. Исследуя различные металлы, Вольта расположил их в следующий ряд: Al, Zn, Sn, Pb, Sb, Bi, Hg, Fe, Cu, Ag, Au, Pt, Pd. Он нашел, что если металлы в указанной последовательности привести в контакт друг с другом, то при этом каждый предыдущий металл получит более высокий потенциал, чем последующий. Далее, Вольта установил, что если несколько металлов 1, 2, ..., n привести в контакт друг с другом (рис. 233), то разность потенциалов $\varphi_n - \varphi_1$ между крайними металлами не будет зависеть от того, какими промежуточными металлами они разделены. Это положение называется *законом последовательных контактов Вольты.* Для справедливости его необходимо, чтобы все контактирующие металлы находились *при одной и той же температуре.* Если крайние металлы ряда привести в контакт между собой таким образом, чтобы образовалось замкнутое кольцо (рис. 234), то из закона последовательных контактов Вольты следует, что электродвижущая сила в кольце будет равна нулю и, следовательно, никакой электрический ток через цепь не пойдет, если только все металлы имеют одну и ту же температуру. В противном случае мы имели бы дело с нарушением закона сохранения энергии. Таким образом, закон последовательных контактов Вольты может рассматриваться как *следствие закона сохранения энергии.* Это рассуждение неприменимо в тех случаях, когда в цепи есть электролиты и, следовательно, могут происходить химические реакции, за счет энергии которых и возбуждается электрический ток. Закон последовательных контактов в таких случаях не имеет места. Контактная разность потенциалов в вольтах колеблется для различных пар металлов от нескольких десятых до нескольких единиц. Как и работа выхода электронов, она сильно изменяется даже при ничтожных загрязнениях поверхностей соприкасающихся металлов, их окислении и т п. Поэтому для получения верных значений контактных разностей

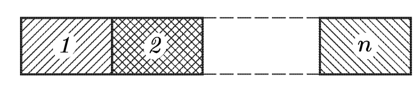


Рис. 233

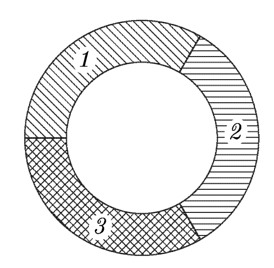


Рис. 234

потенциалов исследуемые вещества и их поверхности необходимо тщательно очищать, а измерения вести в вакууме.

2. Для объяснения возникновения контактной разности потенциалов будем пользоваться *моделью свободных электронов.* Допустим, что температура металла равна абсолютному нулю. Тогда все уровни энергии вплоть до границы Ферми μ будут заполнены электронами. Величина μ связана с концентрацией электронов проводимости n соотношением (99.6). Приведем два металла *1* и *2* в непосредственный контакт друг с другом (рис. 235). Так как энергии Ферми μ_1 и μ_2 у разных металлов разные, то будут разными и концентрации электронов проводимости n_1 и n_2. Пусть для определенности $\mu_2 > \mu_1$ и, следовательно, $n_2 > n_1$. В этом случае начнется диффузия электронов, в процессе которой электроны будут переходить от металла *2* к металлу *1*. Действительно, во втором металле имеются заполненные уровни, расположенные выше уровня Ферми μ_1 первого металла. Электроны с этих уровней могут переходить на соответствующие свободные уровни металла *1*, лежащие выше того же уровня μ_1. Обратный переход электронов из металла *1* в металл *2* невозможен, так как во втором металле все уровни с энергией μ_1 и ниже заполнены электронами. В результате диффузии металл *2* будет заряжаться положительно, а металл *1* — отрицательно. Потенциал металла *2* начнет повышаться, а металла *1* — понижаться. Уровень Ферми у первого металла поднимется, а у второго — опустится. Если потенциалы металлов обозначить через φ_{i1} и φ_{i2}, то энергии Ферми будут соответственно $\mu_1 + e\varphi_{i1}$ и $\mu_2 + e\varphi_{i2}$. На самой границе возникнет *скачок потенциала* или, что то же, электрическое поле, препятствующее процессу диффузии. Когда разность потенциалов $\varphi_{i2} - \varphi_{i1}$ достигнет определенной величины, диффузия прекратится. Это произойдет тогда, когда уровни Ферми обоих металлов сравняются, так как в этом случае в металле *1* уже не останется свободных уровней, на которые могли бы переходить электроны из металла *2*, а в металле *2* еще не освободятся уровни, на которые могли бы переходить электроны из металла *1*. Итак, в состоянии равновесия

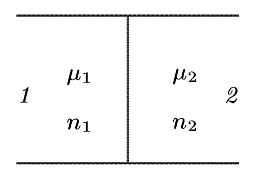


Рис. 235

$$\mu_1 + e\varphi_{i1} = \mu_2 + e\varphi_{i2}. \tag{104.1}$$

Отсюда

$$\varphi_{i2} - \varphi_{i1} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{e}. \tag{104.2}$$

Так как $e < 0$, то при $\mu_2 > \mu_1$ получится $\varphi_{i2} > \varphi_{i1}$, как и должно быть.

При выводе предполагалось, что металл находится при абсолютном нуле температуры. Однако результат (104.2) остается верным и при других температурах. В самом деле, μ, а при наличии электрического поля $\mu + e\varphi$, есть не что иное, как *химический потенциал* электронного газа, отнесенный к одному электрону, а в состоянии равновесия химические потенциалы электронных газов обоих металлов должны

быть одинаковы (см т. II, § 82, 83). Нужно лишь иметь в виду, что при $T \neq 0$ химический потенциал μ зависит не только от концентрации электронов, но и от температуры металла.

В формуле (104.2) предполагается, что точка *1* лежит внутри металла *1*, а точка *2* — внутри металла *2*, что и отмечено индексом i. Поэтому разность потенциалов $\varphi_{i2} - \varphi_{i1}$ называется *внутренней контактной разностью потенциалов.* Из формулы (104.2) непосредственно следует, что внутренняя контактная разность потенциалов удовлетворяет закону последовательных контактов Вольты. Для оценки этой разности выразим с помощью формулы (99.6) энергии Ферми μ_1 и μ_2 через концентрации электронов проводимости n_1 и n_2. Тогда получим

$$\varphi_{i2} - \varphi_{i1} = \frac{h^2}{8me}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}(n_1^{2/3} - n_2^{2/3}). \tag{104.3}$$

После подстановки числовых значений получим

$$\varphi_{i2} - \varphi_{i1} = -3{,}66 \cdot 10^{-15}(n_1^{2/3} - n_2^{2/3}) \quad \text{(в вольтах)}.$$

Если принять, что на каждый атом металла приходится один электрон проводимости, то для меди, например, $\varphi_{i2} - \varphi_{i1} = 3{,}66 \cdot 10^{-15} n^{2/3} \sim$ ~ 1 В. Поэтому внутренняя контактная разность потенциалов, по нашей оценке, будет порядка нескольких десятых или сотых долей вольта, а в некоторых случаях и порядка вольта. Понятно, что такая оценка не может считаться точной, поскольку в ее основе лежит модель свободных электронов.

3. Чтобы выйти из металла, электрон, как известно, должен совершить некоторую работу выхода A. Она совершается в тонком поверхностном слое, в котором на электрон действуют силы, стремящиеся втянуть его в металл. Толщина этого поверхностного слоя δ порядка нескольких атомных слоев. Заметив это, рассмотрим два металла, находящихся в непосредственном контакте между собой вдоль поверхности AB (рис. 236). При наличии такого контакта разность потенциалов между внутренними точками обоих металлов $\varphi_{i2} - \varphi_{i1}$ имеет вполне определенное значение. Пусть, далее, между теми же металлами имеется зазор CD макроскопической ширины. Возьмем внутри зазора две точки *1'* и *2'*, находящиеся в непосредственной близи от границ металлов CC' и DD'. Слова «в непосредственной близи» надо понимать в том смысле, что расстояние точки от границы металла больше толщины поверхностного слоя δ, но одинакового с ней порядка. Потенциалы во внешних точках *1'* и *2'* обозначим соответственно через φ_{e1} и φ_{e2}. Их разность $\varphi_{e2} - \varphi_{e1}$ называется *внешней контактной разностью потенциалов* между металлами. Ее величину можно связать с работой выхода электрона из металла. Сделаем это в предположении, что металл находится при абсолютном

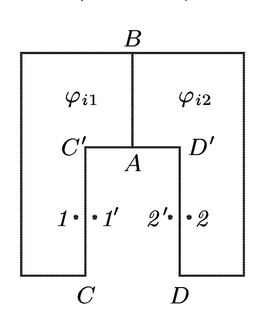


Рис. 236

нуле температуры. Тогда на границе CC' будем иметь

$$e\varphi_{e1} - (e\varphi_{i1} + \mu_1) = A_1,$$

а на границе DD'

$$e\varphi_{e2} - (e\varphi_{i2} + \mu_2) = A_2,$$

где A_1 и A_2 — работы выхода на этих границах. Вычитая почленно и воспользовавшись соотношением (104.1), получим

$$\varphi_{e2} - \varphi_{e1} = \frac{1}{e}(A_2 - A_1). \qquad (104.4)$$

Наличие внешней контактной разности потенциалов означает, что в зазоре между CC' и DD', а также во внешнем пространстве между поверхностями контактирующих металлов существует электрическое поле, а сами поверхности заряжены электричеством.

Внешняя контактная разность потенциалов также подчиняется закону последовательных контактов Вольты. Действительно, образуем замкнутое кольцо из нескольких металлов (рис. 234), чтобы между соседними металлами были небольшие зазоры. Электродвижущая сила в таком кольце равна нулю, как это следует из закона сохранения энергии. Но ее можно представить в виде $\sum \Delta\varphi_i + \sum \Delta\varphi_e$, где суммирование ведется по всем контактам. Поскольку выше было доказано, что $\sum \Delta\varphi_i = 0$, то отсюда следует, что и $\sum \Delta\varphi_e = 0$.

4. Вольта доказал существование контактной разности потенциалов с помощью следующего классического опыта. На стержень электроскопа (рис. 237 *а*) был навинчен медный диск M, покрытый сверху

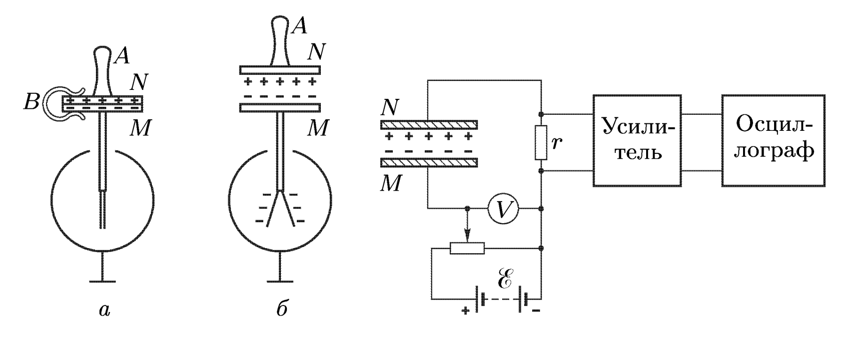


Рис. 237 Рис. 238

тонким изолирующим слоем шеллака. На него был положен второй такой же цинковый диск N, снабженный изолирующей ручкой A. Образовавшийся конденсатор обладал довольно большой емкостью, так как слой шеллака был чрезвычайно тонок. Диски на короткое время соединялись медной проволокой B. Тогда между M и N возникала контактная разность потенциалов порядка одного вольта, причем цинк

заряжался положительно, а медь — отрицательно. Такая разность потенциалов, однако, слишком мала, чтобы листочки электроскопа заметно разошлись. Для ее обнаружения удаляют соединяющую проволоку B и за изолирующую ручку A поднимают верхний диск N. Так как при этом заряд конденсатора не изменяется, а емкость уменьшается во много раз, то разность потенциалов увеличивается во столько же раз, и листочки электроскопа заметно расходятся (рис. 237 *б*).

5. Для измерения внешней контактной разности потенциалов применяется *компенсационный метод.* Пластинки из исследуемых материалов M и N (рис. 238) располагают параллельно на небольшом расстоянии друг от друга. Одна из них закрепляется неподвижно, а другую при помощи соответствующего механического устройства заставляют колебаться с частотой в несколько десятков герц и амплитудой порядка долей миллиметра. Поскольку пластинки соединены между собой проводами измерительной схемы, устанавливаются контактная разность потенциалов φ и электрическое поле между ними. На внутренней поверхности каждой пластинки появляется электрический заряд $q = C\varphi$, где C — емкость между пластинками, в цепи — переменный электрический ток $\dot{q} = \varphi\, dC/dt$, а на нагрузочном сопротивлении r — переменное напряжение $r\dot{q} = r\varphi\, dC/dt$. Контактную разность потенциалов φ можно скомпенсировать напряжением противоположного знака от батареи. Тогда ток через сопротивление r прекратится. Для констатации этого напряжение с нагрузочного сопротивления, усиленное усилителем, подают на осциллограф. Пока компенсации нет, осциллограф регистрирует колебания напряжения на нагрузочном сопротивлении. Меняя с помощью делителя напряжение от батареи, добиваются того, чтобы колебания прекратились. Тогда вольтметр укажет искомую контактную разность потенциалов.

§ 105. Термоэлектрический ток

1. Согласно закону последовательных контактов Вольты в замкнутой цепи, состоящей из нескольких (например, трех) металлов или полупроводников (см. рис. 234), не происходит возбуждения электрического тока, если все тела цепи находятся *при одной и той же температуре.* Если, однако, температуры в местах контактов разные, то в цепи появляется электрический ток. Этот ток называется *термоэлектрическим.* Само явление возбуждения термоэлектрического тока, а также тесно связанные с ним *явления Пельтье и Томсона*, о которых будет сказано ниже, получили собирательное название *термоэлектричества.* Явление термоэлектрического тока было открыто в 1821 г. немецким физиком Зеебеком (1770–1831), который его подробно исследовал, хотя и дал неправильное истолкование существа своего открытия. (Зеебек думал, что под влиянием разности температур в разнородных проводниках, соединенных между собой, происходит выделение свободного магнетизма.)

Возбуждение термоэлектрического тока можно наблюдать на следующем приборе (рис. 239). К пластинке из сурьмы (Sb) припаяна пластинка из меди (Cu). Между пластинками располагается магнитная стрелка NS. Если один из спаев нагревать, то появляется электрический ток, и магнитная стрелка отклоняется. По направлению отклонения можно судить о направлении электрического тока. Оказывается, что через нагретый спай ток идет от меди к сурьме. Если охладить тот же спай, то направление термоэлектрического тока меняется на противоположное.

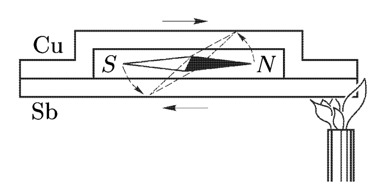


Рис. 239

Более эффектная демонстрация термоэлектрического тока осуществлена Полем. Толстая U-образная медная дуга перекрыта впаянным в нее в двух местах коротким мостиком *12* из константана (рис. 240 *а*). Место спая *1* подогревается пламенем газовой горелки через выступающий конец медной дуги. Для предотвращения нагревания спая *2* другой конец той же дуги загнут вниз и опущен в холодную воду. При разности температур между горячим и холодным спаями в 500 °C электродвижущая сила пары медь–константан составляет всего 0,027 В. Однако, ввиду малости сопротивления медной дуги, термоэлектрический ток может быть порядка сотен ампер. Для обнаружения такого большого тока берется кусок железа прямоугольной формы с двумя отверстиями, разрезанный на две половины *1* и *2*, как указано на рис. 240 *б* (поперечный разрез). Одна половина куска располагается сверху, а другая снизу медной дуги. Кусок в целом служит железным сердечником, а медная дуга — единственным витком, обвивающимся вокруг него. Нижний кусок 2 выполняет роль якоря. С помощью такого устройства на лекционных демонстрациях удается удерживать груз в несколько килограммов (вместе с якорем). Сам Поль доводил удерживаемый груз до 50 кг.

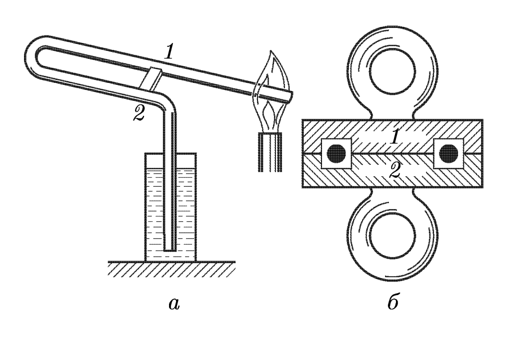


Рис. 240

Металл или полупроводник, к которому идет ток через более нагретый спай термоэлектрической пары, называется *положительным*, а другой — *отрицательным.* Первый играет роль анода, а второй — катода. Так, в термоэлектрической паре медь–сурьма (см. рис. 239) сурьма будет положительной, а медь — отрицательной. По этому признаку Зеебек, а затем и другие исследователи расположили металлы в так называемый *термоэлектрический ряд*, аналогичный ряду Вольты.

2. Электродвижущая сила всякой термопары складывается из электродвижущих сил обоих ее спаев. Электродвижущая сила одного спая зависит от рода контактирующих металлов и от температуры. Если обозначить ее через $f(t)$, то электродвижущая сила термопары представится разностью

$$\mathscr{E} = f(t_1) - f(t_2), \tag{105.1}$$

где t_1 — температура более, а t_2 — менее нагретого спаев. Производная $\alpha = df/dt$ называется *коэффициентом термоэлектродвижущей силы.* Как и функция f, коэффициент α является характеристикой обоих металлов термопары. На практике это создает определенные неудобства. Для избежания их условились величину α измерять по отношению к одному и тому же металлу, за который принимается свинец. Это означает, что α измеряется для термопары, у которой одна ветвь составлена из исследуемого материала, а другая — из свинца. Коэффициент термоэлектрической силы α_{12} металла 1 по отношению к металлу 2 определится формулой

$$\alpha_{12} = \alpha_1 - \alpha_2, \tag{105.2}$$

где α_1 и α_2 — значения коэффициентов термоэлектродвижущей силы металлов 1 и 2 соответственно по отношению к свинцу. Все эти величины зависят от чистоты материалов и сильно меняются с добавлением примесей.

Простейшей является линейная функция $f(t) = f_0 + \alpha t$. В этом случае

$$\mathscr{E} = \alpha(t_1 - t_2). \tag{105.3}$$

Существуют пары металлов, для которых такая простая формула оправдывается в довольно широких пределах. К ним относятся, например, термопары: (Cu, Bi), (Ag, Cu), (Au, Cu), (Pt, Fe). Для других термопар зависимость f от t более сложная, например: $f(t) = f_0 + \alpha t + \beta t^2$, где α и β — постоянные. В этом случае

$$\mathscr{E} = \alpha(t_1 - t_2)\left[1 + \frac{\beta}{\alpha}(t_1 + t_2)\right]. \tag{105.4}$$

К формуле такого вида пришел М. П. Авенариус (1835–1895) на основе анализа экспериментальных данных и Тэт (1831–1901) на основе полутеоретических соображений. Согласно формуле (105.4) величина $\mathscr{E}$ обращается в нуль при $t_1 = t_2$ и при $t_1 + t_2 = -\alpha/\beta$. Величина $\tau = (t_1 + t_2)/2$ называется *температурой нейтральной точки.* Если при неизменном значении t_2 повышать температуру t_1, то $\mathscr{E}$ будет возрастать по параболическому закону, достигнет максимума при $t_1 = \tau$, а затем обратится в нуль и изменит знак при температуре $t_1 = 2\tau - t_2$. Температура $t_1 = 2\tau - t_2$, при которой величина $\mathscr{E}$ проходит через нуль, называется *точкой инверсии.*

3. Необходимость возникновения термоэлектрического тока видна уже из формулы (104.2), определяющей внутреннюю контактную разность потенциалов на границе двух металлов. Дело в том, что химические потенциалы μ_1 и μ_2 зависят от температуры. Поэтому если

температуры спаев термопары неодинаковы, то будут неодинаковыми и внутренние контактные разности потенциалов. Это ведет к нарушению электрического равновесия и возникновению термоэлектрического тока.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Рассуждение проведем применительно к полупроводникам, так как таким путем будет достигнута большая общность, поскольку в полупроводниках ток переносят не только электроны, но и дырки. Предположим сначала, что носителями тока являются только электроны. Возьмем единственный полупроводник, имеющий форму стержня. Будем нагревать один из его концов, оставляя температуру второго неизменной. Концентрация электронов проводимости в полупроводниках возрастает с повышением температуры. Поэтому у нагретого конца она будет больше, чем у холодного. Электроны от нагретого конца начнут диффундировать к холодному. Горячий конец, теряя электроны, будет заряжаться положительно, а холодный — отрицательно. Внутри полупроводника возникнет электрическое поле $\mathbf{E}$, направленное от горячего конца к холодному. Тормозя диффузию электронов, оно будет нарастать до тех пор, пока диффузия не прекратится. Тогда установится *стационарное состояние*, в котором горячий конец полупроводника окажется заряженным положительно, а холодный — отрицательно. Градиент концентрации электронов, имеющийся в полупроводнике, в отношении возбуждения электрического тока формально эквивалентен полю сторонних сил $\mathbf{E}^{\text{стор}}$, уравновешивающему в установившемся состоянии электрическое поле $\mathbf{E}$: $\mathbf{E}^{\text{стор}} = -\mathbf{E}$. Таким образом, в электронном полупроводнике поле сторонних сил $\mathbf{E}^{\text{стор}}$ направлено от холодного к горячему концу (рис. 241 *а*).

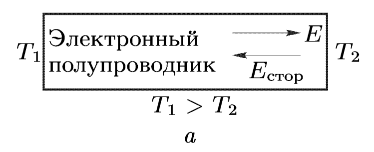


Рис. 241

Приведенное рассуждение применимо и к полупроводнику с дырочной проводимостью. Только теперь следует говорить о *диффузии дырок*, а не электронов. В дырочном полупроводнике нагретый конец зарядится отрицательно, а холодный — положительно. В установившемся состоянии поле $\mathbf{E}$ будет направлено от холодного конца к горячему, а поле сторонних сил $\mathbf{E}^{\text{стор}}$ — от горячего к холодному (рис. 241 *б*).

В проводниках смешанного типа от горячего конца к холодному диффундируют одновременно и электроны, и дырки, возбуждая электрические поля в противоположных направлениях. В таких полупроводниках, в зависимости от величины концентраций и подвижностей электронов и дырок, результирующее электрическое поле $\mathbf{E}$ и поле сторонних сил $\mathbf{E}^{\text{стор}} = -\mathbf{E}$ могут быть направлены как к горячему, так и к холодному концам стержня. В некоторых случаях электрические поля, возникающие из-за диффузии электронов и дырок, компенсируют друг

друга, т. е. $\mathbf{E} = -\mathbf{E}^{\text{стор}} = 0$. Тогда никакой разности потенциалов между концами полупроводника не возникает. Такой случай имеет место в свинце. Вот почему коэффициент термоэлектродвижущей силы α всех материалов принято выражать относительно свинца.

Разность потенциалов между нагретым и холодным концами полупроводника зависит от материала последнего. Поэтому если взять две проволоки AB и $A'B'$ из разных материалов, концы которых A и A' поддерживаются при одной, а концы B и B' при другой температуре (рис. 242 *а*), то равновесные разности потенциалов на концах каждой

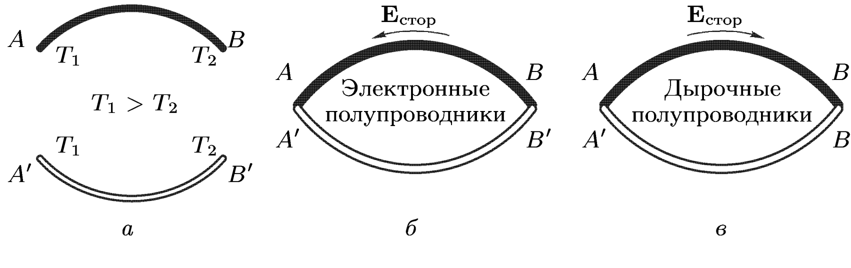


Рис. 242

проволоки будут разными. Соединим в термопару конец A с A', а конец B с B' (рис. 242 *б*, *в*). Тогда электрическое равновесие нарушится и в цепи $ABB'A'A$ потечет электрический ток. Это и есть термоэлектрический ток. Допустим, что проволока $A'B'$ сделана из свинца. Тогда в ней $\mathbf{E}^{\text{стор}} = 0$ и весь ток будет обусловлен сторонними силами, действующими в проволоке AB. Если AB изготовлена из электронного полупроводника, то ток через горячий спай потечет от A к A' (рис. 242 *б*). Если же она изготовлена из дырочного полупроводника, то он потечет в противоположном направлении (рис. 242 *в*). Мы видим, что по знаку коэффициента термоэлектродвижущей силы α можно судить о природе носителей тока в полупроводниках: коэффициент α положителен для дырочных и отрицателен для электронных полупроводников.

4. На основании изложенных соображений следует ожидать, что *термоэлектрические свойства должны быть выражены значительно сильнее у полупроводников, чем у металлов.* Действительно, электроны в металлах находятся в состоянии вырождения. Их энергия весьма слабо зависит от температуры, а концентрация имеет одинаковые значения как при низких, так и при высоких температурах. Слабо зависит от температуры у металлов и положение уровня химического потенциала. Поэтому коэффициент термоэлектродвижущей силы α для металлов и сплавов не превосходит нескольких микровольт на кельвин (табл. 6). В полупроводниках, напротив, концентрации дырок и электронов проводимости, а также все параметры, перечисленные выше, сильно меняются с температурой. Поэтому для них коэффициент термоэлектродвижущей силы α значительно больше, чем у металлов, и может превышать 1000 мкВ/К (табл. 7).

Таблица 6. Значения коэффициента термоэлектродвижущей силы для некоторых металлов и сплавов

Материал	α, мкВ/К	Материал	α, мкВ/К	Материал	α, мкВ/К
Висмут	−68,0	Натрий	−6,5	Золото	+2,9
Константан	−38,0	Платина	−4,4	Цинк	+3,1
Копель	−38,0	Ртуть	−4,4	Вольфрам	+3,6
Никель	−20,8	Алюминий	−0,4	Кадмий	+4,6
Нихром	−18,0	Олово	−0,2	Молибден	+7,6
Алюмель	−17,3	Магний	0,0	Железо	+15,0
Калий	−13,6	Свинец	0,0	Хромель	+24
Палладий	−8,9	Серебро	+2,7	Сурьма	+43

Таблица 7. Значения коэффициента термоэлектродвижущей силы для некоторых полупроводников

Материал	α, мкВ/К	Материал	α, мкВ/К	Материал	α, мкВ/К
Tl_2S	−780	Pb–Te–Se	−160	Bi_2Te_3	+170
MoS	−770	PbS	−160	Bi_2Se_3	+200
V_2O_5	−750	PbSe	−160	SbZn	+200
WO_3	−740	PbTe	−160	NiO	+240
CuO	−700	SnO	−140	MoS_2	+300
Fe_2O_3	−613	CdO	−40	Mn_2O_3	+385
FeO	−500	CuS	−7	CoO	+450
Fe_3O_4	−430	FeS	+26	SiC (черный)	+800
SiC (зеленый)	−300	CdO	+30	Tl_2S	+800
FeS_2	−200	Bi_2S_3	+80	Se	+1000
$CoSb_3$	−200	Sb_2Te_3	+100	CuO	+1120
MgO_3H_2	−200	$FeTiO_3$	+140	Cu_2O	+1200
Bi–Te–Se	−170	Bi–Sb–Te	+160		

5. Термоэлектричество может быть использовано для генераций электрического тока. Отдельная термопара (термоэлемент) имеет слишком малую электродвижущую силу. Для получения значительных напряжений термоэлементы соединяют последовательно в батареи, как указано на схематическом рис. 243. Все нечетные спаи поддерживаются при одной, а четные — при другой температуре. В результате электродвижущие силы отдельных термоэлементов складываются. Термобатарея подобна тепловой машине, включенной между нагревателем и холодильником. В такой машине большая часть теплоты, полученной от нагревателя, бесполезно теряется в результате теплопроводности и джоулева нагрева. Термобатареи из металлических термопар обладают слишком малыми КПД (около 0,1 %). Поэтому металлические тер-

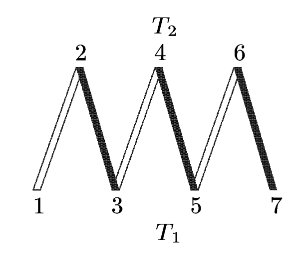


Рис. 243

мопары используются только для измерения температур и потоков лучистой энергии (см т. II, § 5). Значительно выгоднее термобатареи из полупроводников. Одна ветвь термопары в них изготовляется из проводника с электронной, а другая — с дырочной проводимостью. КПД полупроводниковых термоэлементов достигает 15 % и в дальнейшем, несомненно, будет повышен еще больше. В нашей стране и других промышленно развитых странах ведется разработка полупроводниковых термоэлектрогенераторов для прямого преобразования в электрическую тепловой энергии Солнца, ядерных реакторов и пр.

§ 106. Явление Пельтье

1. В 1834 г. французский часовщик Пельтье (1785–1845) опубликовал статью о температурных аномалиях, наблюдаемых на границе двух различных проводников при прохождении через них электрического тока. Сам Пельтье не совсем уяснил сущность открытого им явления. Истинный смысл явления Пельтье был установлен в 1838 г. Ленцем (1804–1865). В углубление на стыке стержней из висмута и сурьмы Ленц поместил каплю воды. При пропускании электрического тока в одном направлении вода замерзала, а при пропускании в противоположном направлении образовавшийся лед таял. Тем самым было установлено, что при прохождении через контакт двух проводников электрического тока, в зависимости от направления последнего, помимо джоулевой теплоты выделяется или поглощается дополнительная теплота, которая получила название *теплоты Пельтье.* В этом и состоит *явление Пельтье.* Таким образом, оно является обратным по отношению к явлению Зеебека. В отличие от теплоты Джоуля–Ленца, которая пропорциональна квадрату силы тока, *теплота Пельтье пропорциональна первой степени силы тока и меняет знак при изменении направления последнего.* Теплоту Пельтье, как показали экспериментальные исследования, можно выразить формулой

$$Q_{\Pi} = \Pi q, \tag{106.1}$$

где q — количество прошедшего электричества, а П — так называемый *коэффициент Пельтье*, значение которого зависит от природы контактирующих материалов и от их температуры. Теплота Пельтье Q_{Π} считается положительной, если она выделяется, и отрицательной, если она поглощается.

Сам Пельтье продемонстрировал открытое им явление на следующем изящном опыте. Две полоски из сурьмы AB и висмута CD (рис. 244) были спаяны в виде креста (*креста Пельтье*). К концам A и C можно было присоединять батарею, а к концам B и D — гальванометр. При пропускании электрического тока от батареи в направлении от сурьмы к висмуту спай нагревался. После этого батарея отключалась и присоединялся гальванометр. Последний обнаруживал ток в направлении от висмута к сурьме, т. е. в направлении, противоположном исходному току от батареи. Именно этого и следовало ожидать согласно принципу Ле Шателье–Брауна. Если повторить опыт, пропуская ток от

батареи в противоположном направлении, то спай охлаждается, а ток через гальванометр также меняет направление на противоположное.

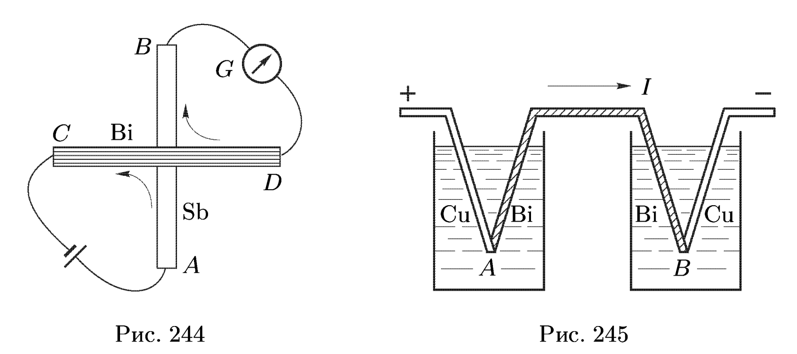


Рис. 244 Рис. 245

2. Для количественного исследования явления Пельтье Леру (1832–1907) припаял к концам висмутовой проволоки AB медные провода и опустил спаи в два калориметра (рис. 245). Пропуская через оба спая один и тот же ток I в течение определенного времени t, Леру измерял теплоту, выделившуюся в каждом калориметре за это время. Если сопротивления проводов R, опущенных в калориметры, одинаковы, то в калориметрах выделится одна и та же джоулева теплота, а именно RI^2t. Теплота Пельтье, напротив, в одном калориметре будет положительна, а в другом отрицательна: если ток I идет от меди к висмуту, то теплота Пельтье выделяется, а если от висмута к меди, то поглощается. Таким образом, можно написать

$$Q_1 = RI^2t + \Pi It, \quad Q_2 = RI^2t - \Pi It,$$

где Q_1 — полное количество теплоты, выделившееся в первом, а Q_2 — во втором калориметрах. Исключая почленным вычитанием джоулеву теплоту, получим

$$2\Pi It = Q_1 - Q_2.$$

Из этого соотношения и можно найти коэффициент Пельтье. Таким путем найдено, что для металлов коэффициент Пельтье порядка 10^{-2}–10^{-3} В, а для полупроводников порядка $3 \cdot 10^{-1}$–10^{-3} В.

3. Классическая теория объясняла явление Пельтье тем, что электроны, переносимые током из одного металла в другой, ускоряются или замедляются под действием внутренней контактной разности потенциалов между металлами. В первом случае кинетическая энергия электронов увеличивается, а затем выделяется в виде тепла. Во втором случае она уменьшается и убыль энергии пополняется за счет тепловых колебаний атомов второго проводника. В результате происходит охлаждение. С этой точки зрения следовало бы ожидать, что коэффициент Пельтье будет совпадать с контактной разностью потенциалов. На самом деле это неверно. Дело в том, что по классической теории средняя кинетическая энергия теплового движения электронов в обоих контактирующих металлах одинакова. А это неверно вследствие различного

положения уровней Ферми в обоих металлах. Классическое объяснение учитывает только различие *потенциальных энергий* по разные стороны границы раздела металлов, считая средние кинетические энергии их одинаковыми. Для того чтобы исправить объяснение, надо изменение потенциальной энергии при переносе электрона из одного металла в другой заменить изменением *полной энергии.* Исправленное таким образом объяснение, разумеется, справедливо не только для металлов, но и для полупроводников с электронной проводимостью.

Совершенно аналогичное объяснение можно привести и для того случая, когда в контакте находятся два полупроводника с дырочной проводимостью. Через границу раздела переходят, конечно, электроны. По одну сторону границы происходит рождение пар электрон–дырка, по другую — рекомбинация электронов с дырками. Один из этих процессов сопровождается выделением, другой — поглощением энергии. От соотношения между выделяющейся и поглощающейся энергией зависит знак коэффициента Пельтье.

Эффект Пельтье, как и все термоэлектрические явления, выражен особенно сильно в цепях, составленных из электронных и дырочных полупроводников. Рассмотрим контакт таких полупроводников. Допустим, что электрическое поле имеет такое направление, что ток идет от дырочного полупроводника к электронному. Тогда электроны в электронном полупроводнике и дырки в дырочном будут двигаться навстречу друг другу. Электрон из свободной зоны электронного проводника после прохождения через границу раздела попадает в заполненную зону дырочного полупроводника и там занимает место дырки. В результате такой рекомбинации освобождается энергия, которая и выделяется в контакте в виде тепла. Рассмотрим теперь случай, когда ток проходит через границу раздела от электронного полупроводника к дырочному. Тогда электроны в электронном и дырки в дырочном полупроводниках будут двигаться в противоположные стороны. Дырки, уходящие от границы раздела, будут пополняться в результате образования новых пар при переходах электронов из заполненной зоны дырочного полупроводника в свободную. На образование таких пар требуется энергия, которая поставляется тепловыми колебаниями атомов решетки. Электроны и дырки, образующиеся при рождении таких пар, увлекаются в противоположные стороны электрическим полем. Поэтому пока через контакт идет ток, непрерывно происходит рождение новых пар. В результате в контакте теплота будет поглощаться. Таким образом, если ток идет от дырочного полупроводника к электронному, то теплота Пельтье выделяется. При обратном направлении тока она поглощается.

А.Ф. Иоффе предложил использовать явление Пельтье в полупроводниках для создания охлаждающих устройств. Отличаясь простотой, такие устройства успешно прошли испытания в лабораторных условиях. Термоэлектрический метод охлаждения обладает рядом преимуществ по сравнению с другими методами охлаждения.

§ 107. Термодинамика термоэлектрических явлений. Явление Томсона

1. Клаузиус в 1853 г. применил к явлениям термоэлектричества принципы термодинамики. Рассмотрим термопару, горячий спай которой поддерживается при постоянной температуре T_1, а холодный — при постоянной температуре T_2 (рис. 246). При прохождении тока I в спае *1* в единицу времени выделяется теплота Пельтье $\Pi_1 I$, а в спае *2* поглощается теплота $\Pi_2 I$. (Их следует рассматривать как величины алгебраические — они могут быть и положительными, и отрицательными.) Происходит также выделение джоулевой теплоты. Однако последним можно пренебречь, если разность температур $T_1 - T_2$ взять бесконечно малой. Действительно, теплота Пельтье пропорциональна первой степени силы тока I, тогда как джоулева теплота — второй. Когда $T_1 - T_2 \to 0$, ток I стремится к нулю, и джоулева теплота становится исчезающе малой по сравнению с теплотой Пельтье. Если отвлечься также от передачи теплоты посредством теплопроводности, то прохождение термоэлектрического тока можно рассматривать как обратимый круговой процесс и применить к нему равенство Клаузиуса

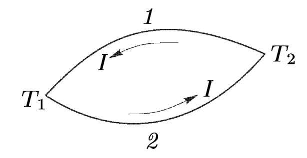


Рис. 246

$$\frac{\Pi_1}{T_1} - \frac{\Pi_2}{T_2} = 0. \qquad (107.1)$$

Это соотношение получено для бесконечно малых разностей температур $T_1 - T_2$. Но оно в тех же предположениях остается верным и при конечных значениях $T_1 - T_2$. Чтобы убедиться в этом, запишем его в дифференциальной форме:

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{\Pi}{T}\right) = 0, \qquad (107.2)$$

а затем проинтегрируем. Тогда получим

$$\Pi/T = \text{const}. \qquad (107.3)$$

Применим теперь к рассматриваемому процессу первое начало термодинамики. Термоэлектродвижущая сила $\mathscr{E} = \alpha(T_1 - T_2)$ совершает в единицу времени работу $\mathscr{E}I$. Приравнивая ее теплоте Пельтье и сокращая на I, придем к соотношению

$$\alpha(T_1 - T_2) = \Pi_1 - \Pi_2 = \frac{d\Pi}{dT}(T_1 - T_2),$$

откуда

$$d\Pi/dT = \alpha. \qquad (107.4)$$

С учетом (107.3) отсюда получаем

$$\alpha = \Pi/T = \text{const}. \qquad (107.5)$$

Таким образом, по теории Клаузиуса термоэлектродвижущая сила при всех температурах T_1 и T_2 должна быть пропорциональна $T_1 - T_2$, т. е. выражаться формулой $\mathscr{E} = \alpha(T_1 - T_2)$. Этот результат, как правило, не согласуется с опытом (см. § 105, п. 2).

2. Расхождение теории Клаузиуса с опытом было устранено Вильямом Томсоном, который независимо от Клаузиуса и почти одновременно с ним (1854 г.) развил *термодинамическую теорию термоэлектричества.* Томсон обратил внимание на то, что различные участки термопары нагреты неодинаково, а потому их физические состояния также неодинаковы. Неравномерно нагретый проводник должен вести себя как система находящихся в контакте физически разнородных участков. На этом основании Томсон пришел к заключению и подтвердил его экспериментально, что на границах таких участков должно происходить выделение или поглощение теплоты Пельтье. Такая теплота получила название *теплоты Томсона*, а само явление — *явления Томсона.*

С точки зрения электронной теории явление Томсона объясняется очень просто. Рассмотрим полупроводник с электронной проводимостью. Пусть $T_1 > T_2$, т. е. градиент температуры направлен от точки *2* к точке *1* (рис. 247 *а*). Из-за диффузии концентрация электронов в точ-

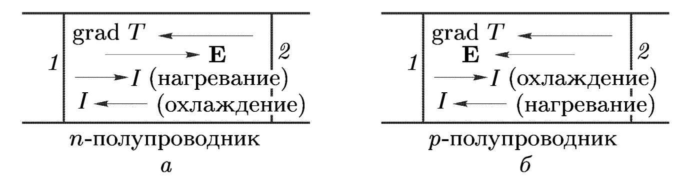


Рис. 247

ке *1* сделается меньше, чем в точке *2*. Возникнет электрическое поле $\mathbf{E}$, направленное от *1* к *2*, т. е. против градиента температуры. Если по проводнику течет ток в направлении $\operatorname{grad} T$ (т. е. электроны движутся в направлении поля $\mathbf{E}$), то поле $\mathbf{E}$ будет замедлять электроны, а участок полупроводника *12* станет охлаждаться. Если же ток течет в обратном направлении, то произойдет нагревание участка *12*. В дырочном полупроводнике соотношения будут обратными (рис. 247 *б*). Явление выглядит так, как если бы на обычный поток теплоты, вызванный теплопроводностью, накладывался дополнительный поток теплоты, связанный с прохождением электрического тока. В дырочных полупроводниках дополнительный поток теплоты направлен в ту же сторону, куда течет электрический ток, в электронных направления электрического тока и теплоты противоположны. Эффект Томсона считается положительным, если электрический ток, текущий в направлении градиента температуры, вызывает нагревание проводника, и отрицательным, если при том же направлении он охлаждает проводник.

Для количественного исследования явления Томсона Леру (1832–1907) в 1867 г. брал два одинаковых стержня AB и CD (рис. 248) из испытуемого материала. Концы A и C были соединены вместе

и поддерживались при температуре 100 °C. Температура свободных концов B и D была 0 °C. Пока электрический ток не был замкнут, термопары в точках a и b показывали одинаковые температуры. При пропускании электрического тока в одном стержне дополнительный поток теплоты проходил слева направо, а в другом — справа налево. В результате между точками a и b возникала разность температур, которая и регистрировалась термопарами. При изменении направления тока знак разности температур изменялся на противоположный.

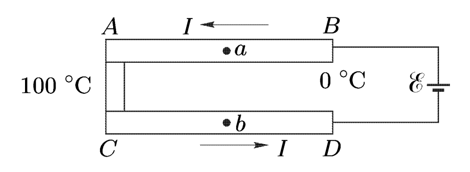


Рис. 248

Теплота Томсона, выделяющаяся в единицу времени на участке провода длиною dx, определяется выражением

$$dQ = \sigma I \frac{dT}{dx}\, dx, \tag{107.6}$$

где σ — так называемый *коэффициент Томсона.* Он зависит от материала провода и от температуры T. При этом за положительное принято направление градиента температуры, т. е. направление в сторону возрастания температуры.

3. Теперь нетрудно исправить теорию Клаузиуса, учтя в ней теплоту Томсона. Если разность температур $T_1 - T_2$ бесконечно мала, а ветви термопары бесконечно короткие (рис. 248), то в первой ветви в единицу времени выделится теплота Томсона $\sigma_1 I(T_1 - T_2)$, а во второй поглотится $\sigma_2 I(T_1 - T_2)$. С учетом этого равенство Клаузиуса примет вид

$$\frac{\Pi_1}{T_1} - \frac{\Pi_2}{T_2} + \left(\frac{\sigma_1}{T_1} - \frac{\sigma_2}{T_2}\right)(T_1 - T_2) = 0.$$

Переходя к дифференциальной форме и принимая во внимание, что разность $T_1 - T_2$ бесконечно мала, отсюда получим

$$\frac{d}{dT}\frac{\Pi}{T} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{T}, \tag{107.7}$$

или

$$\frac{\Pi}{T} - \frac{d\Pi}{dT} = \sigma_1 - \sigma_2. \tag{107.8}$$

Первое начало теперь дает

$$\Pi_1 - \Pi_2 + (\sigma_1 - \sigma_2)(T_1 - T_2) = \alpha(T_1 - T_2),$$

или после дифференцирования и сокращения на $T_1 - T_2$

$$\frac{d\Pi}{dT} + (\sigma_1 - \sigma_2) = \alpha. \tag{107.9}$$

Отсюда с учетом (107.8) получаем

$$\Pi = \alpha T, \tag{107.10}$$

т. е. такое же соотношение (107.5), как и в теории Клаузиуса. Однако теперь коэффициент термоэлектродвижущей силы α не постоянен, а зависит от температуры.

4. Слабая сторона термодинамической теории Клаузиуса–Томсона состоит в том, что она принимает во внимание только *обратимые процессы*, происходящие в термоэлектрической цепи. Между тем в цепи происходят и *необратимые процессы*: теплопроводность и выделение джоулевой теплоты. От последнего можно освободиться, перейдя к бесконечно малым циклам, как сделано выше. Но теплота, переносимая теплопроводностью, того же порядка, а иногда и значительно больше, чем теплота Пельтье. Если все температуры поддерживаются постоянными, то теплопроводность не влияет на баланс энергии, так как она только переносит теплоту в неизменном количестве из одних участков цепи в другие. Однако наличие необратимых переносов теплоты делает сомнительным применение второго начала термодинамики в обратимой форме. Томсон обошел эту трудность, заметив, что теплопроводность и джоулево тепло являются побочными эффектами, органически не связанными с явлениями Зеебека, Пельтье и Томсона. Теплопроводность и джоулево тепло не влияют на термоэлектрические явления, и по этой причине от них можно совсем отвлечься. Эти соображения, конечно, мало убедительны и лишены доказательной силы. Онзагер позднее указал условия, когда допустимо раздельное рассмотрение обратимых и необратимых процессов. По-видимому, в металлах и полупроводниках эти условия выполняются, по крайней мере приближенно. В пользу этого говорит то обстоятельство, что выводы термодинамической теории Клаузиуса–Томсона в пределах точности измерений согласуются с опытом.

ЗАДАЧА

Тэт (1831–1901) ввел предположение, что коэффициент Томсона σ пропорционален термодинамической температуре. Показать, что это предположение приводит к формуле Авенариуса для электродвижущей силы $\mathscr{E}$.

Р е ш е н и е. Из уравнений (107.9) и (107.10) получаем

$$\frac{d}{dT}\left(T\frac{d\mathscr{E}}{dT} - \mathscr{E}\right) + \sigma_1 - \sigma_2 = 0.$$

Интегрируя это уравнение с учетом справедливости предположения Тэта, приходим к требуемому результату.

§ 108. Выпрямляющее действие контактов полупроводников

1. Контакт двух металлов, полупроводников или металла с полупроводником обладает *выпрямляющим действием.* Это значит, что сопротивление такого контакта зависит от *направления* проходящего через него тока: в одном направлении (*запорном*) оно велико, в противоположном (*пропускном*) — мало. *Особенно резко выпрямляющее действие*

выражено на границе дырочного (p) *и электронного* (n) *полупроводников, когда работа выхода электрона из электронного полупроводника меньше, чем из дырочного.* О таком контакте говорят как об *электронно-дырочном p–n-контакте* или *переходе.* Хорошие p–n-переходы не удается получить, прижимая один полупроводник к другому, так как из-за шероховатости поверхностей тел соприкосновение всегда будет происходить лишь в нескольких точках, в воздушных зазорах между телами будут образовываться пленки окислов и т. п. Поэтому для получения хороших p–n-переходов в пластинку чистого полупроводника вводят две примеси — донорную и акцепторную (см. § 100). Первая сообщает полупроводнику *электронную*, а вторая — *дырочную проводимость.* Например, если пластинка сделана из германия или кремния, то в качестве донора можно взять элемент пятой группы периодической системы (фосфор, мышьяк и пр.), а в качестве акцептора — третьей (бор, индий и пр.). В результате в одной половине пластинки возникает электронная, в другой — дырочная проводимость, а между обеими половинами — тонкий переходный слой. Это и есть p–n-переход.

2. Рассмотрим теперь физические явления в электронно-дырочных контактах, с которыми связана односторонняя проводимость последних. Допустим сначала, что контакта между полупроводниками нет. Предположим, что оба полупроводника сделаны из одного и того же материала. Однако к одному из них добавлено небольшое количество донорной, а к другому — акцепторной примесей. В соответствии с этим границы энергетических зон в обоих полупроводниках совпадают (рис. 249 *а*). Но примесные (промежуточные) уровни в запре-

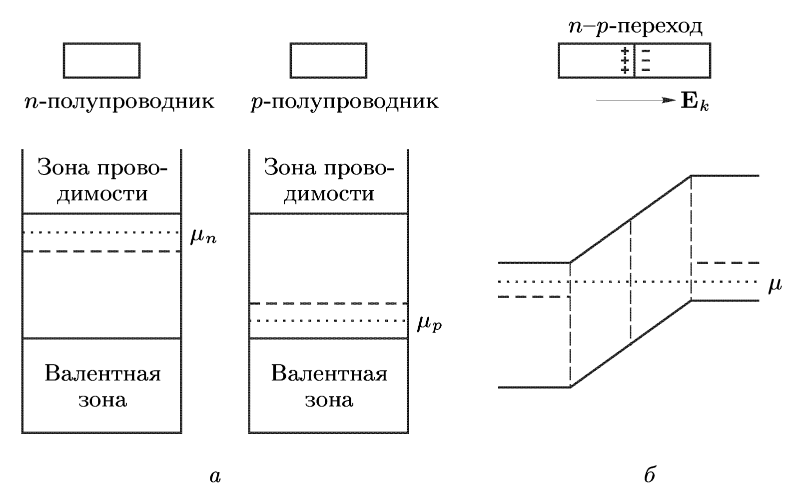


Рис. 249

щенной зоне расположены в электронном полупроводнике *вблизи зоны проводимости*, а в дырочном — *вблизи валентной зоны.* Благодаря этому средняя энергия электрона проводимости и уровень химического

потенциала μ в первом полупроводнике будут выше, а работа выхода — меньше, чем во втором полупроводнике.

Допустим теперь, что полупроводники приведены в контакт друг с другом (рис. 249 *б*). Так как работа выхода электрона из электронного полупроводника меньше, чем из дырочного, то электроны в большем количестве будут переходить из первого во второй. Электронный полупроводник начнет заряжаться положительно, а дырочный — отрицательно. В тонком слое между ними появится контактное электрическое поле, направленное от электронного к дырочному полупроводнику. В результате этого энергетические уровни электронного полупроводника начнут опускаться, а дырочного — подниматься. Контактное электрическое поле будет тормозить переход электронов из электронного в дырочный полупроводник. Процесс перехода электронов прекратится, когда уровни химического потенциала в обоих полупроводниках сделаются одинаковыми. Слева от переходной области энергетические уровни донорных примесей будут на тех же расстояниях от зоны проводимости, что и до контакта, а справа эти расстояния возрастут. Вследствие этого переходная область, в особенности ее правая граница, будет сильно обеднена электронами проводимости. Аналогично, переходная область, и в особенности ее левая граница, будет обеднена и дырками. Можно сказать, что контактное электрическое поле $\mathbf{E}_{\text{к}}$ выталкивает электроны проводимости в глубь электронного, а дырки — в глубь дырочного полупроводника. В результате переходный слой на границе обоих полупроводников оказывается сильно обедненным обоими носителями тока: и электронами, и дырками. Поэтому, несмотря на малую толщину (порядка 10^{-4}–10^{-6} см), электрическое сопротивление переходного слоя оказывается во много раз больше суммарного сопротивления обоих контактирующих полупроводников.

3. Допустим теперь, что наложено внешнее электрическое поле $\mathbf{E}$, направленное от электронного полупроводника к дырочному, т. е. одинаково с контактным полем $\mathbf{E}_{\text{к}}$. Ввиду большого сопротивления переходного слоя практически вся разность потенциалов, соответствующая наложенному полю, сосредоточится внутри переходного слоя, так что поле $\mathbf{E}_{\text{к}}$ внутри слоя может быть очень сильным. Такое поле усиливает контактное поле $\mathbf{E}_{\text{к}}$ и тем самым еще больше уменьшает концентрацию дырок и электронов проводимости в переходном слое. Сопротивление последнего еще больше возрастет. Практически ток через контакт не пойдет. Не то будет, когда внешнее поле $\mathbf{E}$ направлено против контактного поля $\mathbf{E}_{\text{к}}$. Достаточно уже небольшого поля $\mathbf{E}$, чтобы оно компенсировало поле $\mathbf{E}_{\text{к}}$. Тогда электроны проводимости и дырки будут беспрепятственно проникать в переходный слой, и сопротивление последнего практически исчезнет. Ток через контакт будет проходить. Если ток переменный, то в зависимости от его направления и силы сопротивление контакта становится пульсирующим, изменяясь от нуля практически до бесконечности. В соответствии с этим ток через контакт будет проходить только тогда, когда он направлен от

дырочного проводника к электронному. На этом принципе работают полупроводниковые выпрямители.

К этому надо добавить, что в любом полупроводнике, помимо *основных носителей тока*, имеется относительно малое количество *неосновных* (см. конец § 100). В электронных полупроводниках, помимо электронов проводимости, есть и дырки, а в дырочных — электроны. Очевидно, если внешнее поле **E** направлено от электронного к дырочному полупроводнику, то оно делает беспрепятственным проникновение в переходный слой неосновных носителей. В этом случае через контакт не идет ток основных носителей, но идет ток неосновных носителей. Однако, ввиду относительно малой концентрации последних, этот ток также мал.

4. Полупроводниковые выпрямители с успехом заменяют выпрямительные устройства старых систем. Эти выпрямители отличаются высокими КПД, малыми габаритами и невысокой стоимостью. Существует много различных систем полупроводниковых выпрямителей. Не останавливаясь на этом вопросе, опишем кратко устройство одного из типов германиевого выпрямителя. Он состоит из пластинки германия с электронной проводимостью, в которую с одной стороны вварен шарик индия, а с другой — шарик олова. Оловянный шарик служит только электродом для включения выпрямителя в цепь. Индий же играет принципиальную роль, сообщая германию дырочную проводимость. При нагревании в процессе сварки индий диффундирует в германий, вследствие чего вблизи индиевого электрода возникает дырочная проводимость, а на некоторой глубине — выпрямляющий p–n-переход. Такие выпрямители при площади контакта 1 мм^2 и напряжении 1 В пропускают токи больше 1 А, причем пропускаемые токи обратного направления обычно не превышают нескольких микроампер. При площади контакта в несколько квадратных сантиметров германиевые и кремниевые выпрямители могут пропускать токи в несколько сотен ампер, хотя они свободно умещаются на ладони руки. Их пробойные напряжения достигают многих сотен и даже нескольких тысяч вольт.

Полупроводниковые выпрямители, как и все полупроводниковые приборы, применяются не только для выпрямления обычных технических токов. В частности, полупроводниковые приборы нашли широкие применения в радиотехнике, для выпрямления и преобразования электрических колебаний высокой частоты, для усиления и генерации электрических колебаний, в счетно-решающих электронных устройствах и т. п. Они в значительной степени вытеснили из радиотехники электронные лампы. Без них было бы невозможно решение множества научно-технических задач. Применение полупроводников — необъятная область, которой посвящены специальные курсы. Однако в задачу настоящей книги не входит изложение практических применений полупроводников.

Глава IX
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТОКИ В ГАЗАХ
§ 109. Ионизация и рекомбинация

1. Газы в нормальном состоянии, в том числе и пары металлов, состоят из *электрически нейтральных* атомов и молекул и по этой причине не проводят электричества. Проводниками электричества могут быть только *ионизованные* газы. Помимо нейтральных молекул и атомов в них содержатся электроны, положительные и отрицательные ионы. Ионы в газах могут возникать под действием высоких температур, рентгеновских и ультрафиолетовых лучей, лучей радиоактивных элементов, космических лучей, в результате столкновений атомов газа с электронами и другими быстрыми элементарными и атомными частицами и т. д. Во всех этих случаях происходит вырывание из электронной оболочки атома или молекулы одного или нескольких электронов. Этот процесс называется *ионизацией.* Он приводит к освобождению электронов и образованию положительных ионов. Освободившиеся электроны могут присоединяться к нейтральным молекулам и атомам, превращая их в отрицательные ионы. Ионы и свободные электроны делают газ проводником электричества. Впрочем, и в нормальных условиях газы, например воздух, обладают электрической проводимостью, хотя и весьма ничтожной. Эта проводимость вызвана излучением радиоактивных веществ, имеющихся на поверхности Земли, а также космическими лучами, приходящими на Землю из мирового пространства. Электрическая проводимость воздуха была обнаружена еще Кулоном (1785). Наблюдая потери электричества с изолированных проводников, он пришел к заключению, что часть электричества теряется не через изоляторы, а прямо в воздух. Это заключение с особой убедительностью было подтверждено Чарлзом Бойсом (1855–1944) в 1889 г. Подвесив золотые листочки электроскопов к двум цилиндрам из кварца, из которых один был коротким и толстым, а другой — длинным и тонким, он наблюдал, что в обоих случаях потеря электричества была одинакова. Это было бы не так, если бы электричество уходило с листочков только через кварцевые цилиндры. Систематическое изучение электрических токов и разрядов в газах было начато лишь в конце XIX века. Была установлена природа газовых разрядов в различных условиях. Однако, ввиду сложности этих явлений, точной количественной теории их не существует до настоящего времени.

Ионизация газа, возникающая в результате вырывания электронов из молекул и атомов самого газа, называется *объемной ионизацией*, так как источники ионов здесь распределены в объеме, занимаемом газом. Помимо объемной ионизации существует *поверхностная ионизация.* При такой ионизации ионы или электроны поступают в газ со стенок

сосуда, в котором он заключен, или с поверхности тел, вносимых в газ. Например, источниками электронов могут служить раскаленные тела (*термоэлектронная эмиссия*) или поверхности металлов, освещаемые ультрафиолетовыми и прочими коротковолновыми электромагнитными излучениями (*фотоэлектрический эффект*).

2. После прекращения действия ионизатора положительные и отрицательные ионы газа соединяются между собой с образованием нейтральных молекул и атомов. Этот процесс называется *рекомбинацией.* В результате рекомбинации проводимость газа пропадает или, во всяком случае, возвращается к своему исходному значению. Проводимость спадает не сразу, а постепенно, так как для полной рекомбинации ионов газа требуется конечное время.

Следующий опыт может служить демонстрацией этого явления, а также явления ионизации газа. Внутри вертикальной металлической трубы на различной высоте укреплены металлические электроды, соединенные с наружными электроскопами проводами, изолированными от стенок трубы (рис. 250 *а*). Под нижнее отверстие трубы подносят

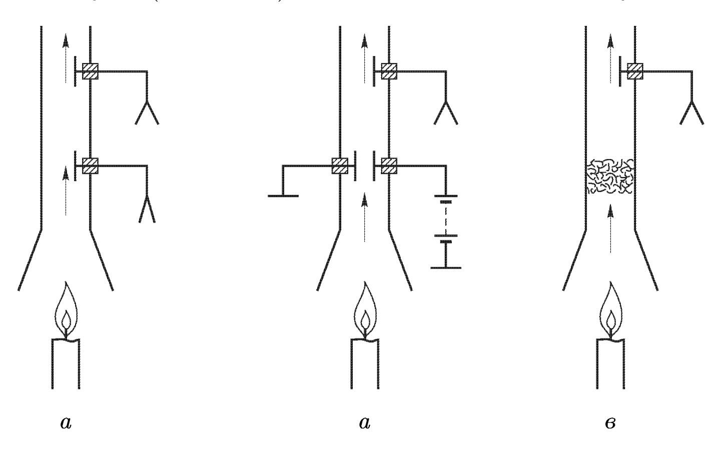


Рис. 250

зажженную свечу. В пламени последней образуются положительные и отрицательные ионы, уносимые вверх горячими газами. Воздух в трубе начинает проводить электричество, и листочки электроскопов спадают. Опыт показывает, что чем выше расположен электрод, тем медленнее спадают листочки соединенного с ним электроскопа. Дело в том, что за время поднятия вверх заметная доля ионов рекомбинирует и проводимость поднявшегося воздуха уменьшается. Поэтому скорость спада листочков электроскопа вверху должна быть меньше, чем внизу. Процесс спадания проводимости газа после прекращения действия ионизатора можно ускорить путем создания в газе электрического поля. Электрическое поле может практически мгновенно уничтожить повышенную проводимость газа. Изменим постановку предыдущего

опыта, поместив в трубе пластины плоского воздушного конденсатора, как указано на рис. 250 *б*. Если повторить опыт с незаряженным конденсатором, то после зажжения свечи листочки электроскопа спадают, как и раньше. Если же предварительно зарядить конденсатор, то после зажжения свечи спадания листочков не наблюдается. Ионы, поднимающиеся вверх вместе с потоком нагретого воздуха, увлекаются электрическим полем к пластинам конденсатора и выбывают из потока. Поэтому воздух после прохождения между пластинами конденсатора перестает проводить электричество, чем и объясняется результат опыта.

Проводимость ионизованного воздуха в предыдущих опытах можно также уничтожить, пропустив струю восходящего воздуха через слой ваты, как указано на рис. 250 *в*. При прохождении через вату происходит нейтрализация ионов.

3. Допустим, что источник создает в единицу времени в единице объема газа q пар ионов разных знаков. Допустим, далее, что в газе нет электрического тока и можно пренебречь уходом ионов из-за диффузии. Тогда единственным процессом потери ионов в газе останется рекомбинация. Обозначим через n число пар ионов разных знаков в единице объема газа. Рекомбинация происходит при встрече положительного иона с отрицательным. Число таких встреч пропорционально как числу положительных, так и числу отрицательных ионов, т. е. n^2. Поэтому убыль числа пар ионов в единицу времени в единице объема газа пропорциональна n^2 и может быть записана в виде αn^2, где α — постоянная, называемая *коэффициентом рекомбинации* ионов разных знаков. При справедливости введенных допущений уравнение баланса ионов в газе запишется в виде

$$dn/dt = q - \alpha n^2. \tag{109.1}$$

В стационарном состоянии $dn/dt = 0$,

$$n = \sqrt{q/\alpha}. \tag{109.2}$$

После выключения ионизатора

$$dn/dt = -\alpha n^2,$$

откуда

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n_0} = \alpha t, \tag{109.3}$$

где n_0 — концентрация пар положительных и отрицательных ионов при $t = 0$, т. е. в момент выключения ионизатора. Спустя время

$$\tau = 1/(n_0\alpha) \tag{109.4}$$

концентрация n убывает в 2 раза. Таким образом, убыль концентрации происходит не в геометрической прогрессии, а более медленно, так как время, в течение которого концентрация уменьшается вдвое, по мере уменьшения последней становится все больше и больше и в пределе при $n \to 0$ обращается в бесконечность.

Если включен ионизатор, то надо интегрировать уравнение (109.1). Допустим, что в момент включения ионизатора $n = 0$. Отсчитывая время t от этого момента и учитывая, что $q - \alpha n^2 > 0$, получим в результате интегрирования

$$n = \sqrt{q/\alpha}\,\operatorname{th}(t/\tau), \tag{109.5}$$

где время τ получится из (109.4), если подставить $n_0 = \sqrt{q/\alpha}$, т. е. $\tau = \sqrt{1/(q\alpha)}$.

ЗАДАЧА

В момент времени $t = 0$ начинает действовать ионизатор, создающий в единице объема газа q пар положительных и отрицательных ионов в единицу времени. Предполагая, что $q = \mathrm{const}$, найти выражение для концентрации пар ионов во все последующие моменты времени.

Ответ. $n = \sqrt{\dfrac{q}{\alpha}\,\dfrac{(\sqrt{q}+n_0\sqrt{\alpha})-(\sqrt{q}-n_0\sqrt{\alpha})e^{-2t/\tau}}{(\sqrt{q}+n_0\sqrt{\alpha})+(\sqrt{q}-n_0\sqrt{\alpha})e^{-2t/\tau}}}$, где $\tau = 1/\sqrt{q\alpha}$.

Заметим, что формула верна как при $n_0 < \sqrt{q/\alpha}$, так и при $n_0 > \sqrt{q/\alpha}$. В последнем случае концентрация убывает, несмотря на то что ионизатор непрерывно поставляет новые ионы.

§ 110. Измерение потенциала ионизации методом электронного удара

1. Чтобы из нейтрального атома или молекулы удалить электрон, требуется затрата энергии. Минимальное значение такой энергии называется *энергией ионизации* атома или молекулы. Энергию ионизации принято выражать в электронвольтах. Разность потенциалов, которую должен пройти электрон, чтобы приобрести энергию, равную энергии ионизации, называется *потенциалом ионизации* или *ионизационным потенциалом* атома или молекулы. Очевидно, ионизационный потенциал равен энергии ионизации, деленной на абсолютное значение заряда электрона. Можно говорить об энергии и потенциалах ионизации не только нейтральных атомов и молекул, но и ионов, у которых удаляется еще один электрон.

2. Джеймс Франк (1882–1964) и Густав Герц (1887–1975) в ряде классических работ, начатых в 1913 г., определяли ионизационные потенциалы атомов *методом электронного удара.* Схема их опыта с некоторыми изменениями изображена на рис. 251 *а*. Исследуемый газ при давлении 0,01–1 мм рт. ст. вводится в цилиндрический стеклянный сосуд, предварительно откачанный до высокого вакуума (для удаления посторонних газов). Источником электронов служит цилиндрический платиновый катод K, нагреваемый излучением помещенной внутри него вспомогательной спирали. При таком способе нагревания вся поверхность катода находится при одном и том же потенциале. Это было бы не так и вдоль катода возникло бы падение потенциала, если бы нагревание осуществлялось непосредственно пропусканием через катод

электрического тока (как было в первоначальных опытах Франка и Герца, в которых источником электронов служила платиновая проволока, нагреваемая электрическим током). Катод окружен цилиндрическими

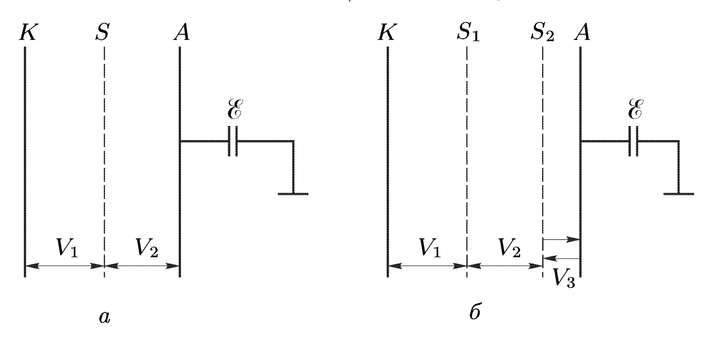


Рис. 251

сеткой S и коллектором A, изготовленными также из платины во избежание возникновения контактной разности потенциалов. Коллектор A соединен с чувствительным электрометром $\mathscr{E}$. Между катодом K и сеткой S прикладывается разность потенциалов V_1, ускоряющая электроны, а между S и коллектором A — несколько бо́льшая (на полвольта или вольт) разность потенциалов V_2, замедляющая их. Таким образом, потенциал коллектора A оказывается ниже потенциала катода K на величину ΔV порядка 0,5–1 В. Допустим, что ускоряющая разность потенциалов V_1 меньше потенциала ионизации V_i. Тогда, помимо электронов, в газе не будет никаких заряженных частиц. Но кинетической энергии электронов, ускоренных разностью потенциалов V_1, недостаточно, чтобы преодолеть задерживающий потенциал V_2. Коллектор A заряжаться не будет, и электрометр $\mathscr{E}$ не даст отклонения. Повысим разность потенциалов V_1, чтобы она стала равной потенциалу ионизации. Тогда в газе начнутся такие столкновения электронов с атомами, в результате которых образуются положительные и отрицательные ионы. Отрицательные ионы на коллектор A не попадут, так как этому препятствует задерживающий потенциал V_2. Для положительных ионов тот же потенциал способствует их попаданию на коллектор. В результате коллектор A начнет заряжаться положительно, что и укажет соединенный с ним электрометр $\mathscr{E}$. Франк и Герц думали, что разность потенциалов V_1 между сеткой S и катодом K в этот момент и будет равна ионизационному потенциалу V_i. На самом деле это не так. Франк и Герц начали свои опыты в то время, когда Бор разрабатывал свою теорию атома. Однако в то время эта теория Франком и Герцем не была принята во внимание.

Бор указал на возможность другого механизма попадания ионов на коллектор A. Атом может находиться в определенных стационарных состояниях, характеризующихся уровнями энергии $\mathscr{E}_0, \mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots$ Если разность потенциалов V_1 достаточна для возбуждения атома, хотя и меньше потенциала ионизации V_i, то в атомах начнутся квантовые

переходы с нормального уровня $\mathscr{E}_0$ на вышележащие уровни $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots$ При обратных переходах на нормальный уровень атомы излучают свет, частота которого ν определяется соотношением $h\nu = \Delta\mathscr{E}$, где h — постоянная Планка. Если эта частота лежит в ультрафиолетовой области спектра, то может оказаться, что свет начнет вырывать электроны с поверхности коллектора A и сетки S (фотоэффект). Эти электроны под действием задерживающей разности потенциалов V_2 будут отбрасываться от коллектора A, и последний станет заряжаться положительно еще до того, как начнется ионизация газа.

3. Чтобы отделить эффект, вызванный ионизацией атомов, от эффекта их возбуждения, Дэвис и Гухер изменили первоначальную схему опытов Франка и Герца. Между катодом K и коллектором A они поместили две сетки S_1 и S_2 (рис. 251 *б*). Ускоряющее напряжение V_1 по-прежнему включалось между катодом K и сеткой S_1, а замедляющее напряжение V_2 — между сетками S_1 и S_2. (На рис. 251 *б* стрелки указывают направления, в которых электроны ускоряются.) Между сеткой S_2 и коллектором A создается разность потенциалов V_3, малая по сравнению с V_2. Знак этой разности потенциалов можно менять во время опыта. Два возможных направления поля V_3 указаны на рис. 251 *б* противоположно направленными стрелками. Допустим сначала, что энергия электрона, ускоренного разностью потенциалов V_1, недостаточна, чтобы ионизовать газ, но достаточна, чтобы вызвать возбуждение атомов и связанное с ним испускание ультрафиолетовых лучей. Последние, падая на сетку S_2 и коллектор A, вырывают с поверхности этих тел медленные электроны. Если электрическое поле между A и S_2 направлено вправо, то эти электроны будут отброшены коллектором A, и на нем останутся положительные заряды. Если же электрическое поле направлено влево, то электроны, вырванные из A, возвратятся обратно, а вырванные из S_2 направятся к A, так что на A образуется отрицательный заряд. Таким образом, при изменении знака разности потенциалов V_3 будет меняться знак заряда электрометра $\mathscr{E}$. Допустим теперь, что между сетками S_1 и S_2 происходит ионизация частиц газа. Тогда появятся отрицательные и положительные ионы. Отрицательные ионы будут увлекаться электрическим полем V_2 влево, а положительные ионы — вправо.

Пройдя через сетку S_2, положительные ионы попадут на коллектор A, каков бы ни был знак разности потенциалов V_3. Действительно, так как разность потенциалов V_3 мала по сравнению с V_2, она не сможет задержать положительные ионы, когда электрическое поле направлено влево. Когда же электрическое поле направлено вправо, то оно еще больше ускорит положительные ионы и тем самым облегчит попадание их на коллектор. Таким образом, возможно отличить возбуждение частиц газа от их ионизации. Если между первым возбуждением (переходом на первый возбужденный уровень) и ионизацией замечаются еще резкие возрастания электризации, то это указывает на дальнейшие возбуждения, т. е. переходы атома на более высокие энергетические уровни.

4. Существуют и другие способы определения ионизационных потенциалов, например спектроскопический. Об этом последнем способе будет сказано в т. V. В пределах отдельных периодов естественной системы элементов Менделеева (1834–1907) наибольшими потенциалами ионизации обладают атомы инертных газов, наименьшими — атомы щелочных металлов. Так, ионизационный потенциал атома гелия равен 24,58 В, неона 21,56 В, лития 5,390 В, натрия 5,138 В. Вот почему пламя особенно эффективно ионизует воздух, когда в него введено небольшое количество поваренной соли. Внутри групп естественной системы Менделеева ионизационный потенциал, как правило, уменьшается с увеличением атомного номера элемента.

При рекомбинации положительного и отрицательного ионов потенциальная энергия уменьшается. Частично она идет на излучение электромагнитных волн. Последнее называется *рекомбинационным излучением.* Рекомбинационное излучение проявляется, например, в виде свечения газа в рекламных трубках.

§ 111. Измерение слабых токов

1. Токи, возникающие в газах под действием внешнего ионизатора, обычно очень слабы, порядка 10^{-6}–10^{-12} А. Предел чувствительности обычных зеркальных гальванометров порядка 10^{-12} А. Дальнейшее повышение чувствительности невозможно из-за броуновского движения, вызывающего такие же по порядку величины отклонения зеркальца гальванометра, какие вызываются измеряемыми токами. Поэтому для измерения таких токов в большинстве случаев пользуются электрометрами. Обычно применяются *струнные* или *квадрантные* электрометры. Ниже изложение ведется применительно к струнному электрометру, хотя все методы и схемы включения остаются неизменными и в случае квадрантного электрометра.

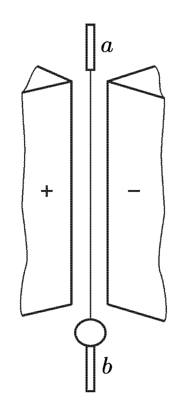


Рис. 252

В струнном электрометре подвижной частью прибора служит тончайшая платиновая нить диаметром 2–10 мкм, натянутая между двумя вертикальными металлическими «ножами», имеющими форму трехгранных призм (рис. 252). Призмы укреплены на янтарных изоляторах и могут быть заряжены до некоторой разности потенциалов (около 100 В), а нить с помощью стержней a и b, между которыми она натянута, соединяется с исследуемым источником электричества. Обычно укрепление платиновой нити на держателе b осуществляется посредством колечка или дужки из кварцевой нити. При зарядке нить электрометра изгибается по направлению к заряженным ножам в ту или в другую сторону, в зависимости от знака заряда. Изгиб получается тем больше, чем меньше натяжение нити. Для регулирования этого натяжения и получения желаемой чувствительности стержни a и b, к которым прикреплена нить, можно передвигать в направлении их длины с помощью микрометрического винта. Отклонение нити измеряется при помощи микроскопа с окулярной шкалой. Для градуировки прибора на нить подаются известные потенциалы и измеряются ее отклонения.

2. Для измерения слабых токов в газах применяются два метода, описываемые ниже.

Метод натекания. Схема этого метода изображена на рис. 253. Ножи электрометра M и N соединены с полюсами батареи B_1, середина которой заземлена. С помощью ключа K нить электрометра может либо заземляться, либо соединяться с электродом A ионизационной камеры, наполненной исследуемым газом. Между электродами A и B камеры создается напряжение с помощью батареи B_2. Допустим, что ионизация в камере создается рентгеновскими лучами от рентгеновской трубки. Сначала ключ K должен

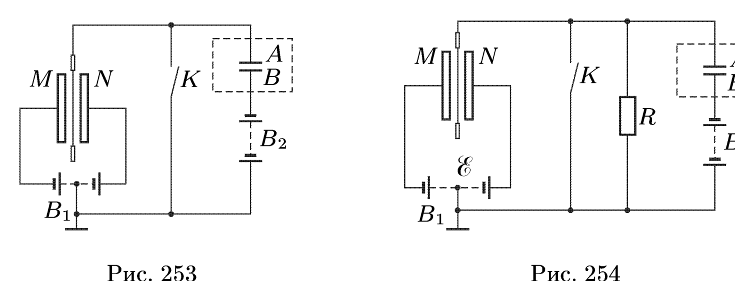


Рис. 253 Рис. 254

быть замкнут. Тогда нить электрометра, находясь при нулевом потенциале, останется неподвижной, несмотря на то что в цепи B_2BAK циркулирует ток. Затем ключ K размыкают, отключая тем самым электрод A и нить электрометра от земли. Теперь ионы будут заряжать пластину A, и отклонение нити начнет увеличиваться. Пусть V — потенциал нити, который она приобретет за время t с момента размыкания ключа K. Тогда количество электричества, натекшего в систему за это время, будет $Q = CV$, где C — емкость конденсатора AB, нити и подводящих проводов. Средний ток за время t определится выражением

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{CV}{t}.$$

Допустим, например, что $C = 25$ см и электрометр зарядился до 0,1 В = = 1/3000 СГСЭ-ед. за 25 с. Тогда $I = 1/3000$ СГСЭ-ед. $\approx 10^{-13}$ А. Основной недостаток рассматриваемого метода состоит в том, что он дает лишь среднюю силу тока за время наблюдения t.

Метод постоянного отклонения (рис. 254). Этот метод применяется, когда ионизационный ток не слишком мал. От предыдущего метода он отличается тем, что между проводом, соединяющим электрод A с нитью, и землей включено высокоомное известное сопротивление R. Через это сопротивление во все время ионизации течет ток I. Вследствие этого на сопротивлении R существует падение напряжения $V = IR$. Если с помощью ключа K нить отключить от земли, то электрометр покажет напряжение V. После этого ионизационный ток найдется по формуле $I = V/R$. Преимущество описанного метода состоит в том, что благодаря практической безынерционности нити он позволяет определить не только среднее, но и мгновенное значение тока I. Недостаток же заключается в трудности точного измерения высокоомного сопротивления R.

§ 112. Несамостоятельная проводимость газов

1. Переходя к рассмотрению токов в газах, будем считать для простоты, что ток течет между двумя плоскими электродами, заряженными противоположно. Направление от положительного электрода к отрицательному примем за ось X. Как и в электролитах, плотность

электрического тока определяется выражением

$$j = n^+e^+u^+ + n^-e^-u^- - e^+D^+\frac{\partial n^+}{\partial x} - e^-D^-\frac{\partial n^-}{\partial x}, \qquad (112.1)$$

где сохранены все прежние обозначения. Первые два члена обусловлены движением ионов под действием электрического поля $\mathbf{E}$, последние два — диффузией ионов. Введем подвижности b^+ и b^- газовых ионов и предположим, что заряды положительных и отрицательных ионов по абсолютной величине одинаковы ($e^+ = -e^- = e$). Кроме того, будем считать одинаковыми концентрации ионов обоих знаков ($n^+ = n^- = n$). Если концентрация одна и та же по всему объему камеры, в которой течет ток, то диффузионного тока не будет, и можно написать

$$j = ne(b^+ + b^-)E. \qquad (112.2)$$

Предположим, что ионы образуются в камере исключительно под действием внешнего ионизатора. В таком случае газовый разряд и соответствующая ему проводимость газа называются *несамостоятельными.* Не имеет значения, является ли ионизация объемной или поверхностной. Пусть в единице объема газа ежесекундно образуется q пар новых ионов. Число ионов, рекомбинирующих за то же время во всем объеме Sl камеры, будет $Sl\alpha n^2$, где S — площадь электрода, а l — длина камеры. При наличии электрического тока убыль ионов будет происходить также за счет ухода их на электроды. Ежесекундно ток уносит на электроды Sj/e пар ионов. Поэтому вместо уравнения баланса (109.1) теперь следует писать

$$\frac{d(Sln)}{dt} = Slq - Sl\alpha n^2 - \frac{Sj}{e},$$

или после сокращения

$$\frac{dn}{dt} = q - \alpha n^2 - \frac{j}{el}. \qquad (112.3)$$

Для стационарных токов

$$q = \alpha n^2 + \frac{j}{el}. \qquad (112.4)$$

2. Рассмотрим решение последнего уравнения в двух предельных случаях.

Во-первых, предположим, что плотность тока j настолько мала, что членом $j/(el)$ можно пренебречь по сравнению с αn^2. Тогда $n = \sqrt{q/\alpha} = \text{const}$ и формула (112.2) дает

$$j = e\sqrt{q/\alpha}\,(b^+ + b^-)E,$$

т. е. плотность тока j пропорциональна электрическому полю E. Такой случай имеет место при малых E. Таким образом, *в слабых электрических полях выполняется закон Ома.*

Во-вторых, предположим, что концентрация ионов n мала. Тогда можно пренебречь рекомбинацией, поскольку рекомбинационный член αn^2 квадратичен по n. В этом приближении $j = qle$, т. е. ток не зависит

от приложенного напряжения. Этот результат справедлив в случае сильных электрических полей. Он объясняется тем, что за время, требующееся иону, чтобы пролететь в сильном поле $\mathbf{E}$ от одного электрода к другому, ионы не успевают сколько-нибудь заметно рекомбинировать. Поэтому все ионы, производимые ионизатором, уходят на электроды. Ежесекундно на электрод поступает заряд $Slqe$. Это и есть сила тока, текущего через газ. Величина $I_s = Slqe$ называется *током насыщения*, а величина $j_s = qle$ — *плотностью тока насыщения.* Обе эти величины пропорциональны длине ионизационной камеры l, поскольку полное число ионов, производимое ионизатором, также пропорционально l.

При промежуточных значениях напряженности электрического поля зависимость тока от напряжения приобретает сложный характер. Плотность тока j связана с полем E нелинейно, т. е. закон Ома не выполняется.

Эти выводы теории подтверждаются экспериментально. На рис. 255 представлена зависимость тока I в камере от приложенного напряжения V между электродами. Ионизацию в камере можно создать рентгеновскими лучами, излучением радиоактивных веществ или ультрафиолетовыми лучами, падающими на отрицательный электрод ионизационной камеры. Существенно только, чтобы внешний источник, поставляющий ионы, оставался неизменным ($q = \mathrm{const}$). Участок OA соответствует области применимости закона Ома. На участке AB ток меняется с напряжением нелинейно. Начиная с точки B, ток I достигает насыщения I_s и остается постоянным на некотором участке BC. Однако в точке C снова начинается возрастание ионизационного тока, сначала медленное, а затем очень резкое. Это означает, что появился новый, внутренний источник ионов. Если в некоторой точке D убрать внешний источник ионов, то разряд не прекращается. Из несамостоятельного разряд перешел в *самостоятельный*, когда образование новых ионов происходит в результате *внутренних процессов*, происходящих в самом газе.

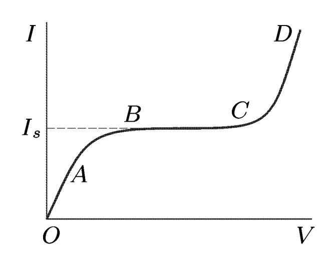


Рис. 255

3. Рассмотрим еще вопрос о распределении потенциала между электродами. Если между электродами не течет ток, то газ ведет себя как всякий диэлектрик. В газе возникнет однородная электрическая поляризация, но не появится никаких объемных зарядов. Поле $\mathbf{E}$ между электродами будет также однородным, а потенциал V будет линейно убывать с расстоянием x от значения $V_{\text{а}}$ на аноде до значения $V_{\text{к}}$ на катоде:

$$V = V_{\text{а}} - \frac{V_{\text{а}} - V_{\text{к}}}{l}\, x.$$

Не то будет, когда через газ проходит электрический ток. В этом случае у анода появятся избыточные отрицательные заряды, а у катода —

положительные. Иначе говоря, возникнут объемные заряды с объемной плотностью $\rho(x)$. В соответствии с уравнением $d^2V/dx^2 = -4\pi\rho$ потенциал V перестанет быть линейной функцией координаты x, а представится некоторой кривой $V = V(x)$. Эта кривая будет обращена выпуклостью вниз, если вторая производная d^2V/dx^2 положительна ($\rho < 0$), и вверх, если эта производная отрицательна ($\rho > 0$). В области, где нет пространственных зарядов, кривая переходит в прямолинейный участок. Изменение потенциала между электродами изображено на схематическом рис. 256 сплошной линией. Штриховая прямая соответствует распределению потенциала, когда между электродами пространственных зарядов нет. Пространственные заряды заставляют эту прямую изгибаться, так как отрицательные заряды, появляющиеся у анода, понижают потенциал вблизи этого электрода, а положительные заряды, накапливающиеся у другого электрода, повышают потенциал в окрестности катода. Мы видим, что прохождение тока через ионизованный газ делает падение потенциала вблизи электродов более крутым, а в середине между ними — более пологим. Это означает, что электрическое поле **E** перестает быть однородным. Оно максимально вблизи электродов и минимально между ними.

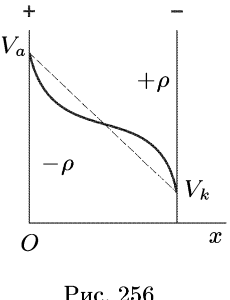


Рис. 256

Заметим в заключение, что требуется совсем ничтожное нарушение электрической нейтральности газа, чтобы вызвать в нем сильное электрическое поле. Поэтому даже при прохождении электрического тока в газе с высокой степенью точности выполняется равенство концентраций положительных и отрицательных ионов: $n^+ = n^-$. Если это имеет место, то говорят о *квазинейтральности* газа. Квазинейтральный — это такой идеализированный газ, в котором с большой точностью выполнено условие $n^+ = n^-$, хотя и могут существовать какие угодно неоднородные электрические поля. В расчетах пользуются такой идеализацией, несмотря на то что само наличие неоднородности электрического поля невозможно без нарушения равенства $n^+ = n^-$. Положение здесь аналогично тому, что имеет место при рассмотрении упругих деформаций тел. В достаточно твердых телах требуются ничтожные изменения плотности, чтобы возникли большие упругие напряжения. В теории упругости вводят представление об идеально недеформируемых упругих телах, в которых могут возникать сколь угодно большие напряжения, хотя реальной причиной возникновения последних и являются деформации.

§ 113. Измерение коэффициентов рекомбинации

Существует много методов измерения коэффициентов рекомбинации. Опишем три наиболее простых из них.

1. Метод Резерфорда (1897). Этот метод позднее (1900) был усовершенствован Таунсендом. Поток исследуемого газа продувается с постоянной скоростью v через латунную трубу, предварительно пройдя через слой ваты,

которой закрыт один из концов трубы (рис. 257). В начальном участке трубы имеется алюминиевое окошко AB, через которое могут проходить

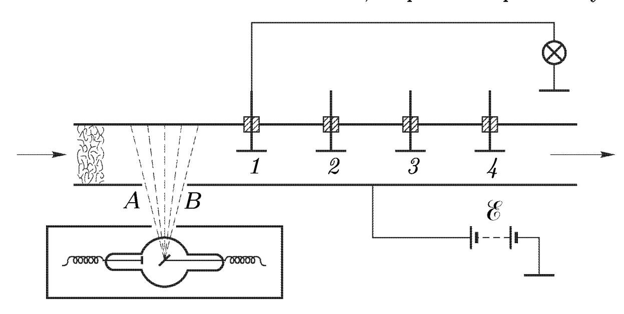


Рис. 257

рентгеновские лучи. Газ ионизуется рентгеновскими лучами или каким-либо другим способом. Образующиеся ионы увлекаются струей газа и по пути частично рекомбинируют. На некоторых расстояниях d_1, d_2, d_3, ... от места ионизации вдоль трубы располагаются тождественные электроды *1*, *2*, *3*, ... Каждый из них поочередно может соединяться с электрометром. При этом все остальные электроды соединяются с трубой, которая в свою очередь соединяется с одним из полюсов батареи, другой полюс которой заземлен. Сначала с электрометром соединяется электрод *1*. Тогда между этим электродом и стенками трубы возникает сильное электрическое поле, увлекающее на электрод *1* все проходящие мимо него ионы одного знака. Если n_1 — концентрация пар ионов у электрода *1*, то на него за время τ попадет $n_1 vS\tau$ ионов, которые передадут ему заряд $Q_1 = n_1 vSe\tau$, где S — площадь электрода, а e — заряд одного иона. После этого такие же измерения повторяют, соединив с электрометром электрод 2. Пусть в этом случае электрометр измерит заряд $Q_2 = n_2 vSe\tau$. Тогда на основании формулы (109.3)

$$\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1} = \alpha t,$$

где t — время, затрачиваемое потоком газа на прохождение расстояния $d_2 - d_1$. Выражая его через скорость v по формуле $t = (d_2 - d_1)/v$, получим

$$\alpha = \left(\frac{1}{Q_2} - \frac{1}{Q_1}\right)\frac{Sv^2 e\tau}{d_2 - d_1}. \tag{113.1}$$

Скорость v можно определить по расходу газа за определенный промежуток времени. Измерения можно повторить, соединив поочередно с электрометром электроды *1*, *1*, ... Резерфорд и его сотрудники убедились, что такие независимые измерения приводят к совпадающим результатам. Это может служить доказательством правильности исходных положений, лежащих в основе метода.

2. Метод переключения. Этот метод также был предложен Резерфордом (1897) и позднее усовершенствован Мак-Клюнгом (1902). Исследуемый газ, находящийся между двумя электродами ионизационной камеры, ионизуется рентгеновскими лучами. В определенный момент времени с помощью маятника выключается ток, питающий рентгеновскую трубку, а через некоторое время τ после этого тот же маятник замыкает цепь батареи, присоединенной к электродам камеры. В результате между электродами камеры создается сильное электрическое поле, увлекающее на один из электродов

ионы определенного знака. Поле выбирается сильным, чтобы при этом ионы в ионизационной камере не успели прорекомбинировать. Пусть Q — заряд, переходящий при этом на электрод камеры, соединенной с электрометром, с помощью которого он может быть измерен. Очевидно, $Q = Vne$, где V — объем камеры. Заряд Q измеряется для двух значений времени τ. Обозначим через Q_1 и Q_2 его значения для времени τ, равного соответственно τ_1 и τ_2. Тогда

$$\left(\frac{1}{Q_2} - \frac{1}{Q_1}\right) Ve = \alpha(\tau_2 - \tau_1), \tag{113.2}$$

откуда и можно определить коэффициент рекомбинации α.

3. Метод Мак-Клюнга. Исследуемый газ, помещаемый между пластинами плоского конденсатора, ионизуется рентгеновскими лучами. Пусть q — число пар ионов, создаваемых ионизатором в единице объема камеры в одну секунду. Для измерения q между обкладками конденсатора накладывается сильное электрическое поле, чтобы возник ток насыщения $I_s = Vqe$, где V — объем конденсатора. Из этого соотношения и можно найти q. Выключим электрическое поле. Тогда в установившемся состоянии, как следует из формулы (109.1), концентрация пар ионов n будет связана с q соотношением $\alpha n^2 = q$. Полный заряд ионов определенного знака в конденсаторе будет $Q = Vne = Ve\sqrt{q/\alpha}$. Его можно измерить, если в некоторый момент времени выключить ионизатор и тотчас же наложить на конденсатор сильное электрическое поле. Тогда заряд Q соберется на одной из пластин конденсатора и его можно измерить электрометром. После этого коэффициент рекомбинации найдется по формуле

$$\alpha = \frac{V^2e^2q}{Q^2} = \frac{Ve}{Q^2}\, I_s. \tag{113.3}$$

Значения коэффициента рекомбинации некоторых газов при давлении 1 атм и температуре 18 °C приведены в табл. 8.

Таблица 8. Значения коэффициента рекомбинации газов

Газ	α, 10^{-6} см^3/с	Газ	α, 10^{-6} см^3/с
Воздух	1,67	Углекислота	1,67
Кислород	1,61	Окись углерода	0,86
Водород	1,44	Водяные пары (100 °C)	0,86

От давления газа коэффициент α зависит слабо, немного уменьшаясь лишь при низких давлениях. С повышением температуры газа величина α уменьшается.

ЗАДАЧИ

1. Между плоскими электродами площадью $S = 100$ см^2 каждый, находящимися на расстоянии $l = 5$ см друг от друга, создана ионизация воздуха рентгеновскими лучами и наблюдается ток насыщения $I_s = 10^{-7}$ А. Определить число пар ионов q, создаваемых ионизатором в 1 см^3 в течение одной секунды, а также концентрацию этих пар n в установившемся состоянии. Ионы считать однозарядными.

Ответ. $q = \dfrac{I_s}{Sle} = 1{,}25 \cdot 10^9$ см$^{-3} \cdot$ с$^{-1}$; $n = \sqrt{q/\alpha} = 2{,}7 \cdot 10^7$ см$^{-3}$.

2. В атмосферном воздухе у поверхности Земли из-за радиоактивности почвы и ионизации космическими лучами в среднем образуется $q = 5$ ионов

в 1 см^3 в одну секунду. Определить ток насыщения, текущий благодаря этой естественной ионизации в плоском воздушном конденсаторе с площадью каждой обкладки $S = 100$ см^2 и расстоянием между обкладками $l = 5$ см.

Ответ. $I_s = qSle = 4 \cdot 10^{-16}$ А.

3. Оценить время разрядки конденсатора в условиях предыдущей задачи, если первоначально он был заряжен до разности потенциалов $V = 300$ В. Как будет меняться время разрядки с уменьшением давления воздуха в объеме конденсатора?

Ответ. $t \approx SV/(4\pi l I_s) \approx 1{,}3 \cdot 10^6$ с ≈ 15 сут. С уменьшением давления воздуха время разрядки будет увеличиваться. Круксу (1832–1919) удалось сохранить в вакууме заряженный электроскоп в течение нескольких месяцев.

4. Через какое время τ после выключения ионизатора число ионов в камере, наполненной воздухом, уменьшается 1) в 2 раза; 2) в 4 раза? Начальная концентрация пар ионов $n_0 = 10^7$ см$^{-3}$.

Ответ. 1) $\tau = 1/(n_0\alpha) = 0{,}06$ с; 2) $\tau = 3/(n_0\alpha) = 0{,}18$ с.

5. Определить эффективное сечение σ рекомбинации положительного молекулярного иона воздуха с отрицательным при комнатной температуре.

Решение. Массы положительных и отрицательных ионов и их концентрации одинаковы. Поэтому из формулы (86.15) второго тома находим $\nu = \sqrt{2}n^2\sigma\overline{v}$, где ν — среднее число столкновений положительных ионов с отрицательными в единице объема в единицу времени, сопровождающихся рекомбинацией. В стационарном состоянии это число должно равняться числу вновь образующихся пар ионов в том же объеме за то же время, т. е. $\sqrt{2}n^2\sigma\overline{v} = q$. Так как $q = \alpha n^2$, то $\sqrt{2}\sigma\overline{v} = \alpha$. Подставляя сюда

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{kT}{m}} = \sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{RT}{M}},$$

где R — универсальная газовая постоянная, M — молекулярный вес воздуха ($M \approx 28{,}8$), получим

$$\delta = \frac{\alpha}{4}\sqrt{\frac{\pi M}{RT}} \approx 2{,}5 \cdot 10^{-11}\ \text{см}^2.$$

Соответствующий эффективный диаметр d иона определяется по формуле $\sigma = \pi d^2$ и равен $d \approx 2{,}8 \cdot 10^{-6}$ см, т. е. примерно в сто раз больше газокинетических диаметров нейтральных молекул. Это объясняется электростатическим притяжением противоположно заряженных ионов, что ведет к увеличению числа столкновений между ними, а следовательно, и к возрастанию их эффективных диаметров.

6. Решить ту же задачу для рекомбинации положительного иона с электроном.

Решение. Если пренебречь массой электрона по сравнению с массой иона, то из формулы (86.15) второго тома получим $\nu_{ei} = n^2\sigma_{ei}\overline{v}_e$, где $\overline{v}_e$ — средняя тепловая скорость электрона. Рассуждая, как в предыдущей задаче, получим

$$\sigma_{ei} = \frac{\alpha_{ei}}{\overline{v}_e} = \frac{\alpha_{ei}}{4}\sqrt{\frac{2\pi m_e}{kT}},$$

где α_{ei} — коэффициент рекомбинации электрона с положительным ионом. Величины ν_{ei} и σ_{ei} мы также снабдили двумя индексами, чтобы явно отметить, что речь идет о столкновениях электронов с ионами. Так как радиус электрона можно считать бесконечно малым, то $\sigma = \pi r^2$, где r — радиус иона (см. т. II, § 86).

§ 114. Измерение подвижностей ионов

Из разнообразных методов измерения подвижностей газовых ионов опишем два простейших.

1. Метод переменного поля. Этот метод был предложен Резерфордом. В стеклянном сосуде S, наполненном исследуемым газом, имеются два плоских электрода: сплошной B и сетка A (рис. 258). Платиновая проволока C, нагреваемая электрическим током до высокой температуры, создает ионы в пространстве между C и A. Ионы определенного знака увлекаются к сетке A электрическим полем, создаваемым батареей B_2. Между электродами A и B с помощью трансформатора T создается переменная разность потенциалов $V = V_0 \sin \omega t$ и соответствующее ей электрическое поле $E = (V_0/l) \sin \omega t$, где l — расстояние между электродами A и B, а ω — круговая частота, с которой изменяется переменное напряжение V. Допустим, что ион, скажем положительный, проходит через сетку A в момент времени $t = 0$, когда электрическое поле E равно нулю. Далее он движется по направлению к электроду B со скоростью $v = bE = (V_0 b/l) \sin \omega t$, проходя за время t путь

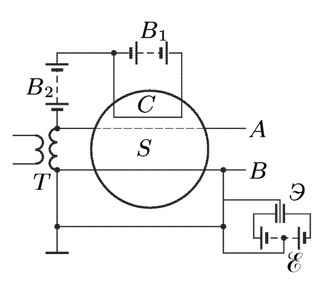


Рис. 258

$$x = \int v\, dt = \frac{V_0 b}{l\omega} (1 - \cos \omega t).$$

Наибольшее расстояние, на которое ион может удалиться от A, будет $x_{\text{макс}} = 2V_0 b/(l\omega)$. Если это расстояние меньше l, то заряд на электрод B и соединенный с ним электрометр Э не попадет. Повышая амплитуду напряжения V_0, можно добиться того, чтобы $x_{\text{макс}} = l$. Тогда электрометр начнет давать показания, и подвижность иона b можно вычислить по формуле

$$b = \frac{l^2 \omega}{2V_0} = \frac{\pi l^2}{V_0 T}, \qquad (114.1)$$

где $T = 2\pi/\omega$ — период колебаний переменного напряжения.

2. Метод Зелени (1884–1954). Внутренний цилиндр цилиндрического конденсатора был разрезан на две части BB' и CC', изолированные друг от друга (рис. 259). Во внешнем цилиндре AA' имелась узкая щель mn, через которую перпендикулярно к оси прибора можно было впускать пучок рентгеновских лучей, ионизовавший газ в области mn, ограниченной на рис. 259 двумя вертикальными штриховыми плоскостями. Внутренний цилиндр CC' был соединен с электрометром, а наружный цилиндр AA' — с одним из полюсов батареи. Другой полюс батареи, электрометр и цилиндр BB' были заземлены. В конденсаторе создавалось радиальное электрическое поле

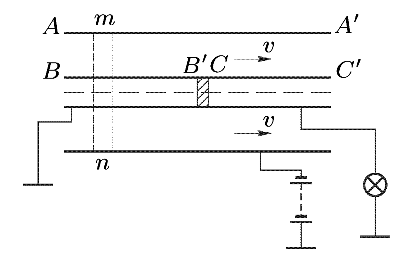


Рис. 259

$$E = \frac{V}{r \ln (r_2/r_1)},$$

где V — напряжение между обкладками конденсатора, r — расстояние от оси прибора, r_1 и r_2 — радиусы внутреннего и наружного цилиндров. Это электрическое поле собирает на цилиндрах BB' и AA' ионы, образованные рентгеновскими лучами. Если цилиндр BB' заряжен отрицательно, то к нему устремятся положительные ионы. Если же цилиндр BB' заряжен положительно, то он соберет отрицательные ионы. Существенно, что ни один ион не попадет на внутренний цилиндр CC', а следовательно, и на электрометр. Не то будет, если газ между цилиндрами продувается с определенной постоянной скоростью v. В этом случае ионы будут двигаться не только радиально к оси конденсатора, но и параллельно ей. Время, потребное иону для прохождения расстояния от наружного цилиндра до внутреннего, определяется выражением

$$t_1 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{bE} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{Vb} \int_{r_1}^{r_2} r\,dr = \frac{(r_2^2 - r_1^2)\ln(r_2/r_1)}{2Vb}.$$

Время же, которое требуется иону, чтобы от области ионизации mn дойти до цилиндра CC', равно $t_2 = l/v$, где l — расстояние от mn до цилиндра CC'. Если уменьшить напряжение V, то в некоторый момент ионы начнут попадать на цилиндр CC' и на электрометр. Это произойдет, когда $t_1 = t_2$, т. е. когда

$$b = \frac{v(r_2^2 - r_1^2)\ln(r_2/r_1)}{2Vl}. \qquad (114.2)$$

По этой формуле и может быть вычислена подвижность b.

3. В табл. 9 приведены результаты измерений подвижностей различных ионов при давлении 1 атм и температуре 18 °C.

Таблица 9. Значения подвижностей ионов газов

Газ	Подвижность, см^2/(с · В)		$\frac{b^-}{b^+}$
	положительных ионов b^+	отрицательных ионов b^-	
Водород	5,91	8,26	1,4
Кислород	1,29	1,79	1,4
Азот	1,27	1,84	1,4
Аргон	1,37	1,70	1,24
Окись углерода	1,10	1,14	1,04
Хлор	0,65	0,51	0,8
Водяной пар (100 °C)	0,62	0,51	0,78

Как показывает опыт, подвижность ионов в широких пределах обратно пропорциональна давлению $\mathscr{P}$. Это понятно, так как подвижность пропорциональна длине свободного пробега иона (см. § 42), а последняя в свою очередь обратно пропорциональна давлению $\mathscr{P}$.

Подвижность положительных ионов не зависит заметно от напряженности поля E. При не слишком больших E подвижность отрицательных ионов также не зависит от E, но при больших E она начинает возрастать с увеличением E. При дальнейшем увеличении E возрастание подвижности замедляется, и, наконец, в еще более сильных полях подвижность снова делается постоянной. Подвижность ионов,

в особенности отрицательных, очень сильно зависит ог ничтожного количества некоторых примесей. Так, для гелия при давлении 1 атм, содержащего следы кислорода, $b^+ = 5{,}09$ см^2/(с·В), $b^- = 6{,}31$ см^2/(с·В). В совершенно чистом гелии подвижность положительных ионов b^+ остается почти той же, тогда как b^- достигает огромной величины 500 см^2/(с·В). Эти факты объясняются тем, что при ионизации газа происходит *вырывание* из атома или молекулы электрона, который вначале и является отрицательным ионом. Остаток же атома или молекулы становится положительным ионом. Поскольку масса электрона очень мала по сравнению с массой атома или молекулы, следовало бы ожидать, что его подвижность должна во много раз превосходить подвижность положительного иона. Однако, как показывает табл. 9, различие между b^- и b^+ не так уж велико. Это объясняется тем, что электрон очень скоро, столкнувшись с нейтральной частицей, «прилипает» к ней, образуя отрицательный ион, подвижность которого почти равна подвижности положительного иона. В особенности быстро процесс «прилипания» электронов должен происходить в газах, атомы которых обладают большим сродством к электрону. Таковым является, например, кислород, от ничтожных примесей которого вообще трудно избавиться. При рассмотрении влияния всех этих процессов на подвижность ионов необходимо иметь в виду, что измерение дает некоторую среднюю подвижность, которая, конечно, зависит от соотношения между числом быстрых и медленных ионов. Так же объясняется и влияние напряженности поля E на величину подвижности отрицательных ионов. Дело в том, что с увеличением напряженности электрического поля возрастает скорость электрона, вследствие чего уменьшается вероятность прилипания его к нейтральным частицам. Благодаря этому средняя подвижность отрицательного иона возрастает. Для положительного иона это произойти не может, так как он образуется уже в первый момент ионизации и в дальнейшем не меняет свою массу. В этом случае подвижность не должна зависеть от напряженности поля.

§ 115. Теория Таунсенда

1. До сих пор принималась во внимание только ионизация газа внешним ионизатором, но не учитывалась возможность ионизации при столкновениях ионов и электронов с нейтральными атомами и молекулами. Так можно поступать только в случае сравнительно слабых электрических полей, когда кинетическая энергия eEl, накопленная электроном (или ионом) на длине свободного пробега l, меньше энергии ионизации $\mathscr{E}_i$, и, следовательно, при столкновениях с нейтральными частицами электроны лишь изменяют *направление движения* (*упругое рассеяние*). Не так будет в сильных полях, когда $eEl > \mathscr{E}_i$. Тогда столкновения электронов с нейтральными частицами могут сопровождаться ионизацией последних. Ионизация может происходить и тогда, когда $eE\bar{l} < \mathscr{E}_i$, где $\bar{l}$ — средняя длина свободного пробега электрона.

Действительно, среди электронов найдутся и такие, у которых $l > \bar{l}$, так что для них условие $eEl > \mathscr{E}_i$ будет выполняться.

Допустим теперь, что под влиянием внешнего ионизатора или вследствие какой-либо другой причины у катода возник свободный электрон. Ускоренный электрическим полем, электрон ионизует атом при столкновении с ним. Вместо одного электрона становится два. После ускорения в электрическом поле они ионизуют два атома, а число электронов увеличивается до четырех и т. д. В результате по мере продвижения к аноду число электронов будет лавинообразно нарастать. Этот процесс называется *электронной лавиной.* Каждая ионизация атома сопровождается не только освобождением нового электрона, но и появлением положительного иона, а ионы также могут ионизовать газ.

2. Для количественной характеристики ионизующей способности электронов и ионов Таунсенд (1868–1957) ввел два *коэффициента ионизации* α и β. Первый из них определяется как среднее число ионов одного знака, производимое электроном на единице длины своего пути. Такой же смысл имеет коэффициент β, характеризующий ионизующую способность положительных ионов. Коэффициент ионизации электронами α значительно превосходит коэффициент ионизации положительными ионами β.

Следующий классический опыт Таунсенда доказывает это утверждение. Берется ионизационная камера в виде цилиндрического конденсатора, внутренним электродом которого служит тонкая металлическая нить (рис. 260). Между нитью и наружным цилиндром конденсатора прикладывается разность потенциалов V, достаточная для того, чтобы в объеме камеры происходила *ударная ионизация* газа. Последняя практически будет происходить лишь вблизи нити, где электрическое поле очень сильное. Допустим, что на нить подан положительный потенциал. Тогда к нити устремятся электроны и будут вблизи нее ионизовать газ. Положительные же ионы, устремляясь к наружному цилиндру, пройдут через область слабого поля и практически никакой ионизации не вызовут. Изменим теперь полярность напряжения V, не меняя его величину. Тогда роли положительных и отрицательных ионов поменяются местами. К нити устремятся положительные ионы, и ионизация в камере будет возбуждаться практически только ими. Опыт показывает, что в первом случае ионизационный ток больше и быстрее растет с напряжением V, чем во втором (на рис. 261 кривая I относится к случаю, когда внутренний электрод положителен, а кривая II — к случаю, когда он отрицателен).

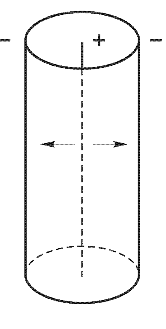


Рис. 260

Из изложенного следует, что *главную роль играет ионизация ударами электронов, по сравнению с которой ионизацией положительными ионами во многих случаях можно пренебречь.*

3. Перейдем теперь к изложению теории Таунсенда прохождения электрического тока через газ. В ней учитывается ударная ионизация атомов и молекул газа электронами и положительными ионами. Для простоты электроды разрядной трубки будем считать плоскими.

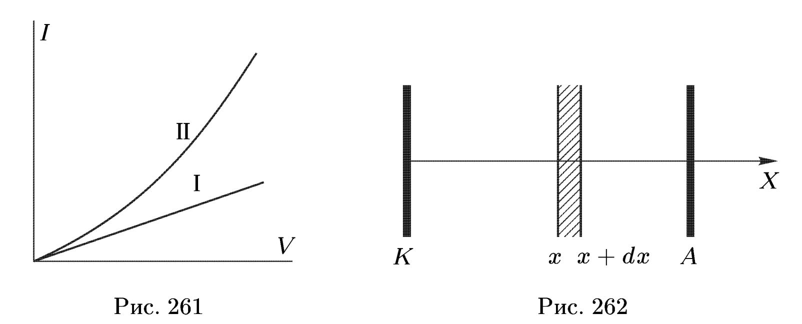


Рис. 261 Рис. 262

Рекомбинацией ионов и электронов пренебрежем, предполагая, что за время прохождения между катодом и анодом эти частицы рекомбинировать не успевают. Кроме того, ограничимся стационарным режимом, когда все величины, характеризующие разряд, не зависят от времени. Поместим начало координат на поверхности катода K, направив ось X в сторону анода A (рис. 262). Пусть $n_e(x)$ и $n_p(x)$ — концентрации электронов и положительных ионов, а v_e и v_p — их средние дрейфовые скорости (по абсолютной величине). Возьмем в газе бесконечно тонкий плоский слой, параллельный плоскостям анода и катода, и выделим на нем единичную площадку. Через эту площадку слева в слой ежесекундно входит $n_e(x)v_e(x)$электронов, а справа выходит $n_e(x{+}dx)v_e(x{+}dx)$. В объеме dx слоя из-за ионизации электронами ежесекундно возникает $\alpha n_e v_e dx$ электронов и столько же положительных ионов. Аналогично из-за ионизации положительными ионами образуется $\beta n_p v_p dx$ электронов и столько же положительных ионов. Наконец, может существовать внешний источник ионизации, создающий ежесекундно q пар ионов в единице объема газа. А так как в случае стационарности процесса число электронов в слое не меняется, то должно выполняться соотношение

$$n_e(x)v_e(x) - n_e(x + dx)v_e(x + dx) + (\alpha n_e v_e + \beta n_p v_p)dx + q dx = 0.$$

Аналогично, для положительных ионов, движущихся от анода к катоду,

$$n_p(x + dx)v_p(x + dx) - n_p(x)v_p(x) + (\alpha n_e v_e + \beta n_p v_p)dx + q dx = 0.$$

Заменяя разности соответствующими дифференциалами и сократив на dx, получим

$$\begin{aligned} -\frac{d(n_e v_e)}{dx} + \alpha n_e v_e + \beta n_p v_p + q = 0, \\ \frac{d(n_p v_p)}{dx} + \alpha n_e v_e + \beta n_p v_p + q = 0. \end{aligned} \qquad (115.1)$$

Введем плотности электрического тока электронов и положительных ионов:

$$j_e = n_e v_e e, \quad j_p = n_p v_p e, \tag{115.2}$$

где e — абсолютное значение заряда электрона. Тогда

$$\frac{dj_e}{dx} - \alpha j_e - \beta j_p - qe = 0, \quad \frac{dj_p}{dx} + \alpha j_e + \beta j_p + qe = 0. \tag{115.3}$$

Отсюда $\frac{d}{dx}(j_e + j_p) = 0$ и, следовательно,

$$j_e + j_p \equiv j = \text{const}. \tag{115.4}$$

Таким образом, полная плотность электрического тока j остается постоянной на всем протяжении от катода к аноду, как это и должно быть для квазистационарных процессов. Исключив теперь из уравнений (115.3) и (115.4) ток j_p, получим

$$\frac{dj_e}{dx} - (\alpha - \beta) j_e = \beta j + qe. \tag{115.5}$$

Оба коэффициента ионизации α и β зависят не только от рода газа, но также от давления и напряженности электрического поля. Давление газа $\mathscr{P}$ постоянно по всей длине разрядной трубки. Что касается поля E, то из-за наличия пространственных зарядов оно неоднородно, т. е. зависит от x. Благодаря этому коэффициенты α и β также зависят от x. Однако Таунсенд при интегрировании уравнений (115.3) ввел упрощающее предположение, приняв, что эти коэффициенты постоянны на протяжении всей длины трубки. Они могут измениться только при изменении напряжения на трубке (т. е. поля E). Такое упрощение означает, что поле E считается однородным во всем объеме разрядной камеры. Это может выполняться для сравнительно слабых токов, когда пространственные заряды, возникающие в объеме камеры, несущественны. Поэтому *теория Таунсенда применима лишь к начальной стадии разряда*, когда последнее условие может считаться выполненным. Разряд, для которого это условие выполняется, называется *таунсендовским.* Пренебрежение пространственными зарядами — существенный недостаток теории Таунсенда.

Предполагая α, β и q постоянными и интегрируя уравнение (115.5), находим j_e, а затем и j_p:

$$j_e = Ce^{(\alpha-\beta)x} - \frac{\beta j + qe}{\alpha - \beta}, \quad j_p = -Ce^{(\alpha-\beta)x} + \frac{\alpha j + qe}{\alpha - \beta}, \tag{115.6}$$

где C — постоянная интегрирования. Она найдется из граничных условий, которые должны выполняться на электродах.

4. Чтобы написать эти граничные условия, найдем сначала ток электронов и ток ионов, производимых объемным ионизатором. Число таких электронов, производимых во всем объеме камеры в одну секунду, будет Slq, а заряд, который они несут (по абсолютной величине), $Slqe$, где S — площадь поперечного сечения камеры, l — ее длина. Разделив на S, найдем для плотности электронного тока lqe. Такова же

будет плотность электрического тока, создаваемого положительными ионами. На аноде это и будет полная плотность тока положительных ионов. Таким образом, граничное условие на аноде имеет вид

$$j_p^{(a)} = qle, \tag{115.7}$$

где индекс a означает, что соответствующая величина берется на поверхности анода. Индекс k, вводимый ниже, означает то же самое для катода.

Напишем теперь граничное условие на поверхности катода. Предположим, что имеется внешний источник, создающий поверхностную ионизацию на катоде. Это могут быть рентгеновские или ультрафиолетовые лучи, освещающие поверхность катода. Это может быть высокая температура, при которой происходит термоэлектронная эмиссия. Обозначим через N число электронов, выходящих ежесекундно с единицы поверхности катода благодаря действию поверхностного ионизатора. Они вносят в плотность электронного тока слагаемое Ne. К нему надо добавить плотность электронного тока qle, создаваемого объемным ионизатором, а также плотность тока, создаваемого электронами, вырываемыми из катода положительными ионами (вторичная эмиссия). На единицу площади катода падает ежесекундно $j_p^{(k)}/e$ положительных ионов. Обозначим через γ среднее число электронов, вырываемых из катода одним положительным ионом. Тогда с единицы поверхности катода будет вырываться ежесекундно $\gamma j_p^{(k)}/e$ электронов, которые создадут электронный ток $\gamma j_p^{(k)}$. Заметим, что на границе катода с газом эмиссия электронов может происходить не только в результате ударов положительных ионов, но и в результате фотоэффекта и ударов других частиц. Но мы вместе с Таунсендом отвлечемся от этого обстоятельства и для простоты будем считать, что эмиссия электронов с катода вызывается только ударами положительных ионов. При таком упрощении полная плотность электронного тока у катода будет

$$j_e^{(k)} = Ne + qle + \gamma j_p^{(k)}. \tag{115.8}$$

Это и есть граничное условие на поверхности катода.

Из (115.6) находим

$$j_e^{(k)} = C - \frac{\beta j + qe}{\alpha - \beta}, \quad j_p^{(k)} = -C + \frac{\alpha j + qe}{\alpha - \beta},$$

$$j_p^{(a)} = -Ce^{(\alpha-\beta)l} + \frac{\alpha j + qe}{\alpha - \beta}.$$

После подстановки этих значений в (115.7) и (115.8) получим систему уравнений

$$\begin{gathered} Ce^{(\alpha-\beta)l} - \frac{\alpha}{\alpha - \beta}\, j = qe\left(\frac{1}{\alpha - \beta} - l\right), \\ (1+\gamma)C - \frac{\beta + \gamma\alpha}{\alpha - \beta}\, j = \left[N + ql + \frac{(1+\gamma)q}{\alpha - \beta}\right] e, \end{gathered} \tag{115.9}$$

из которой находим

$$j = \frac{A - Be^{(\alpha-\beta)l}}{\Delta}, \tag{115.10}$$

где введены обозначения

$$\begin{gathered} A = (1+\gamma)[1 + l(\alpha-\beta)]qe, \\ B = (Ne + qle)(\alpha - \beta) + (1+\gamma)qe, \\ \Delta = (\beta + \gamma\alpha)e^{(\alpha-\beta)l} - (1+\gamma)\alpha. \end{gathered} \tag{115.11}$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

Допустим, что внешняя ионизация — чисто поверхностная ($q = 0$). Пренебрежем ионизацией положительными ионами ($\beta = 0$), а также вторичной эмиссией с катода ($\gamma = 0$). Тогда

$$j = Ne\exp(\alpha l). \tag{115.12}$$

В случае объемной ионизации ($N = 0$) в тех же предположениях ($\beta = \gamma = 0$)

$$j = qle\left\{\left(1 + \frac{1}{\alpha l}\right)\exp(\alpha l) + \left(1 - \frac{1}{\alpha l}\right)\right\}. \tag{115.13}$$

Учтем теперь ионизацию положительными ионами, но пренебрежем вторичной эмиссией на катоде ($\gamma = 0$). Тогда для случая поверхностной внешней ионизации ($N \neq 0$, $q = 0$) получим

$$j = \frac{(\alpha-\beta)Ne}{\alpha - \beta\exp\{(\alpha-\beta)l\}}\exp\{(\alpha-\beta)l\}. \tag{115.14}$$

Ионизации положительными ионами Таунсенд первоначально придавал большое значение, так как он убедился на опыте, что формула (115.14) правильно передает зависимость ионизационного тока от длины разрядной трубки l. Напротив, формула (115.12) согласовывалась с опытом лишь при малых значениях l, а при больших l давала большие ошибки.

5. Из формулы (115.10) видно, что при $\Delta \neq 0$ конечный ионизационный ток получается лишь при наличии внешних ионизаторов. В этом случае разряд остается *несамостоятельным.* Не то будет, когда знаменатель Δ обращается в нуль. С точностью до множителя $(\alpha - \beta)$ величина Δ представляет собой определитель, составленный из коэффициентов левых частей системы уравнений (115.9). Для того чтобы при $\Delta = 0$ указанная система имела нетривиальные решения ($C \neq 0$, $j \neq 0$), необходимо, чтобы обращались в нуль ее правые части. Это будет всегда, когда $q = N = 0$, т. е. когда нет внешних ионизаторов. Вспомним, что коэффициенты α, β и γ зависят от напряженности электрического поля E. С увеличением E ионизационный ток j растет. При некотором значении поля Δ обращается в нуль. Если убрать внешние ионизаторы, то в этом случае ток через газ все же будет идти. Разряд

становится *самостоятельным.* При выполнении условия

$$\Delta \equiv (\beta + \gamma\alpha)e^{(\alpha-\beta)l} - (1+\gamma)\alpha = 0, \tag{115.15}$$

согласно теории Таунсенда, происходит *пробой газа*, или *зажигание газового разряда.* Конечно, для зажигания разряда, т. е. развития электронных и ионных лавин, необходимо наличие в газе какого-то минимального начального количества электронов или ионов. Но таковые всегда имеются в газе, хотя бы и в ничтожных количествах. Однако изложенная теория не позволяет проследить процесс перехода несамостоятельного разряда в самостоятельный, так как она была развита только для процессов, не меняющихся во времени.

§ 116. Закон Пашена

1. Исследуем теперь зависимость коэффициентов ионизации α и β от напряженности электрического поля E и давления газа $\mathscr{P}$. Для определенности будем иметь в виду электроны. Примем вместе с Таунсендом, что при каждом столкновении электрон теряет скорость, которую он приобрел в электрическом поле. Чтобы электрон мог ионизовать газ, он должен на пути свободного пробега x приобрести энергию, не меньшую энергии ионизации, т. е. величина x должна удовлетворять условию $xE \geqslant V_i$, где V_i — потенциал ионизации. Примем, что все такие электроны ионизуют газ. Возьмем пучок из N_0 электронов, которые начали двигаться в электрическом поле E с нулевой начальной скоростью. Как известно из кинетической теории газов (см. т. II, § 88), среднее число электронов, проходящих путь x без столкновений, будет $N = N_0 e^{-x/\bar{l}}$ где $\bar{l}$ — средняя длина свободного пробега электрона. Если взять $x = V_i/E$, то, согласно нашему предположению, все такие электроны будут ионизовать газ. На пути 1 см электрон испытывает в среднем $1/\bar{l}$ столкновений, так что на этом пути все N электронов вызовут $N/\bar{l} = (N_0/\bar{l})e^{-x/\bar{l}}$ ионизаций. Среднее число ионизаций, производимое на том же пути одним электроном, будет

$$\alpha = (1/\bar{l})e^{-V_i/E\bar{l}}.$$

Это и есть коэффициент ионизации. Средняя длина свободного пробега $\bar{l}$ обратно пропорциональна давлению газа: $\bar{l} = 1/(A\mathscr{P})$, так что

$$\alpha = A\mathscr{P}e^{-B\mathscr{P}/E}, \tag{116.1}$$

где A и B — постоянные. Отсюда следует, что

$$\frac{\alpha}{\mathscr{P}} = f\left(\frac{E}{\mathscr{P}}\right), \tag{116.2}$$

т. е. отношение $\alpha/\mathscr{P}$ зависит не от E и $\mathscr{P}$ в отдельности, а только от их комбинации $E/\mathscr{P}$. Понятно, что этот результат, пока функция f не фиксирована, является более общим, чем результат (116.1). Таунсенд экспериментально подтвердил справедливость соотношения (116.2) для

ряда газов. Более поздние исследования показали, что при давлениях, больших атмосферного, это соотношение удовлетворяется значительно хуже, чем для низких давлений, а при высоких давлениях перестает быть верным.

Простым дифференцированием по $\mathscr{P}$ легко убедиться, что при заданном значении E выражение (116.1) достигает максимума при $\mathscr{P} = E/B$. Максимальное значение α при этом оказывается равным

$$\alpha_{\text{макс}} = \frac{A}{eB}\,E, \tag{116.3}$$

где e — основание натуральных логарифмов. Таким образом, максимальное значение α при заданной напряженности электрического поля E пропорционально этой напряженности. Опыт подтверждает и эту зависимость.

Разумеется, все выведенные соотношения справедливы и для положительных ионов.

2. Обратимся теперь к условию зажигания разряда (115.15). Для простоты предположим, что вторичная эмиссия электронов с катода роли не играет ($\gamma = 0$). Тогда (115.15) переходит в

$$\beta e^{(\alpha-\beta)l} - \alpha = 0.$$

Подставим сюда

$$\alpha = \mathscr{P} f\left(\frac{V}{l\mathscr{P}}\right), \quad \beta = \mathscr{P} f_1\left(\frac{V}{l\mathscr{P}}\right),$$

где V — напряжение на трубке. Тогда после сокращения на $\mathscr{P}$ мы придем к уравнению вида

$$F\left(\frac{V}{l\mathscr{P}}\right) = 0,$$

где F — некоторая функция аргумента $V/l\mathscr{P}$. Решая это уравнение, найдем «потенциал зажигания» $V_{\text{заж}} = V_{\text{заж}}(l\mathscr{P})$. Отсюда следует, что *разность потенциалов между электродами трубки, при которой начинается пробой газа, есть функция произведения давления газа $\mathscr{P}$ на расстояние между электродами.* Если в нескольких разрядных трубках с плоскими электродами создать условия, при которых произведения $\mathscr{P}l$ постоянны, то для всех трубок потребуется одна и та же разность потенциалов, чтобы вызвать газовый разряд. Этот закон был установлен экспериментально Пашеном (1865–1947) еще до создания Таунсендом теории пробоя газа.

Закон Пашена можно вывести и из более общего условия пробоя (115.15), если только γ, наряду с $\alpha/\mathscr{P}$ и $\beta/\mathscr{P}$, также является функцией $E/\mathscr{P}$. Такое предположение весьма правдоподобно, так как оно означает, что γ есть функция лишь кинетической энергии, приобретаемой в среднем положительным ионом на каждом свободном пробеге перед ударом о катод. При высоких давлениях газа (порядка сотен атмосфер) наблюдаются отступления от закона Пашена.

§ 117. Тлеющий разряд

1. *Тлеющим разрядом обычно называют самостоятельный разряд, в котором катод испускает электроны вследствие бомбардировки его положительными ионами и фотонами, образующимися в газе.* В отличие от таунсендовского разряда, где плотности электрического тока невелики, а влияние пространственного заряда несущественно, в тлеющем разряде плотности тока значительно больше, а пространственные заряды, возникающие из-за большого различия в массах электронов и положительных ионов (см. § 112, п. 3), делают электрическое поле в газе существенно неоднородным. Для тлеющего разряда характерна большая напряженность электрического поля и соответствующее ей большое падение потенциала вблизи катода (так называемое *катодное падение*).

2. Возьмем стеклянную трубку длиной 30–50 см, в которую впаяны два электрода (рис. 263). Приложим между ними постоянное напряжение в несколько сот вольт. При атмосферном давлении такое

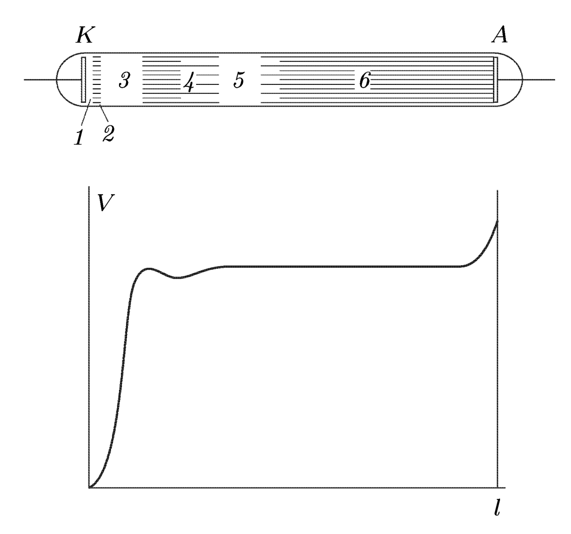


Рис. 263

напряжение недостаточно для пробоя газа, и трубка остается темной. Будем откачивать газ из трубки. При давлении 50 мм рт. ст. возникает самостоятельный разряд в виде светящегося шнура красноватого цвета, идущего от катода к аноду. При давлении 2–3 мм рт. ст. свечение заполняет всю трубку. При давлении газа порядка 0,1–0,01 мм рт. ст. разряд имеет вид, изображенный на схематическом рис. 263. На том же рисунке представлено примерное распределение потенциала V в трубке.

Непосредственно к катоду примыкает узкое так называемое *астоново темное пространство* (на рис. 263 обозначенное цифрой *1*), где электроны, исходящие из катода, еще не успели приобрести скорости, достаточной для возбуждения атомов и молекул газа. Оно впервые наблюдалось Фрэнсисом Астоном (1877–1945) в гелии, неоне и водороде, почему и получило его имя. Ширина астонова темного пространства (порядка десятых долей миллиметра) обратно пропорциональна давлению газа и уменьшается с увеличением плотности тока.

Затем идет тонкая светящаяся пленка, называемая *катодным слоем* (*2*), где происходит возбуждение атомов и молекул ударами электронов, но еще нет ионизации. Возвращаясь в нормальное состояние, возбужденные атомы излучают световые кванты, чем и объясняется свечение.

За катодным слоем следует *темное катодное пространство*, называемое также *темным круксовым* или *темным гитторфовым пространством* (*3*). На самом деле оно не совсем темное, но кажется таковым лишь на фоне примыкающих к нему более светлых областей разряда. В этой части пространства начинается *ионизация атомов и молекул* и *нарастание электронных лавин.* Из-за возможности ионизации уменьшается вероятность возбуждения атомов, с чем и связано ослабление свечения газа. Область темного катодного пространства наиболее важна для поддержания разряда, так как созданные здесь положительные ионы обеспечивают необходимую эмиссию электронов с катода.

Темное катодное пространство резко переходит в *отрицательное тлеющее свечение*, иногда называемое просто *тлеющим свечением* (*4*). Это свечение резко ограничено только со стороны катода. Свечение возникает из-за *рекомбинации* электронов с положительными ионами, а также вследствие *квантовых переходов* возбужденных атомов на более низкие энергетические уровни.

При продвижении к аноду яркость тлеющего свечения ослабевает, и оно постепенно переходит в так называемое *фарадеево темное пространство* (*5*), в которое уже не долетают быстрые электроны электронных лавин.

Перечисленные пять областей называются *катодными частями разряда. В них происходят все процессы, необходимые для поддержания разряда.*

3. За фарадеевым темным пространством следует так называемый *остов разряда.* В более или менее узких трубках он представляет собой столб ионизованного светящегося газа (*6*) и называется *положительным свечением* или *положительным столбом разряда.* Обычно положительный столб простирается до самой поверхности анода. При некоторых условиях между положительным столбом и анодом видно *темное анодное пространство*, а на самой поверхности анода — *анодное свечение*, или *анодная светящаяся пленка.* Положительный столб иногда разделяется на отдельные чередующиеся светлые и темные полосы — *страты.* Тогда разряд называется *сложным.* Наличие

положительного столба несущественно для поддержания разряда, хотя он и имеет большое значение в применениях разряда. В очень коротких трубках положительный столб отсутствует. В длинных трубках он служит проводящим мостом, соединяющим фарадеево темное пространство с анодом. Для положительного столба характерна относительно высокая степень ионизации и связанная с ней высокая проводимость газа. По той же причине плотность пространственного заряда в положительном столбе невелика (и даже равна нулю). Свечение в положительном столбе происходит в основном за счет рекомбинации электронов с положительными ионами. На последних нескольких свободных пробегах (в области так называемого анодного падения) электроны могут накопить достаточную кинетическую энергию, чтобы вызвать возбуждение атомов, в то время как положительные ионы оттягиваются от анода. Это приводит к анодному свечению.

4. Если анод трубки сделать подвижным и постепенно подвигать его к катоду, то катодные части разряда по своей форме и величине остаются неизменными вплоть до границы положительного столба, в то время как длина последнего уменьшается. При дальнейшем передвижении анода к катоду укорачивается длина фарадеева темного пространства, а затем и тлеющего свечения. При этом положение резкой границы тлеющего свечения со стороны катода остается неизменным. Когда расстояние от этой границы до анода уменьшается до долей миллиметра, тлеющий разряд прекращается. Аналогичные явления наблюдаются, если, оставляя анод неподвижным, передвигать к нему катод. При этом без изменения размеров и формы передвигаются и все катодные области разряда вместе с границей положительного столба. Затем положительный столб, фарадеево темное пространство и тлеющее свечение постепенно «съедаются» анодом. Разряд прекращается, когда толщина тлеющего свечения уменьшается до долей миллиметра. Если расстояние между катодом и анодом недостаточно, чтобы на нем поместить темное катодное пространство и начало тлеющего свечения, то разряд, когда это позволяет конструкция трубки, выбирает более длинный путь (рис. 264).

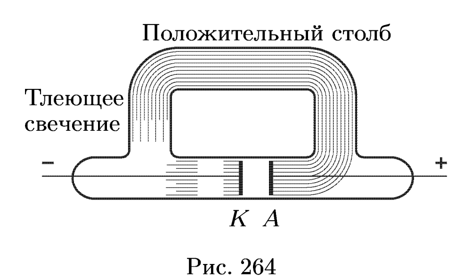


Рис. 264

5. При больших внешних сопротивлениях, когда сила тока в разрядной трубке невелика, поверхность катода, покрытая свечением и принимающая участие в разряде, пропорциональна силе тока в трубке (*закон Геля*). При изменении тока плотность его остается приблизительно постоянной. Вместе с ней остается постоянным и катодное падение потенциала. В этом случае оно называется *нормальным катодным падением.* До давлений в несколько десятков миллиметров ртутного столба нормальное катодное падение не зависит от давления газа,

а определяется только материалом катода и составом газа. В большинстве случаев оно лежит в пределах 100–300 В. Температура катода не оказывает влияния на величину нормального катодного падения, пока не возрастет заметно термоэлектронная эмиссия с поверхности катода. С хорошим приближением нормальное катодное падение пропорционально работе выхода электрона из катода. Это используется для устройства *газосветных трубок* с очень малым потенциалом зажигания. Такова, например, *неоновая лампочка*, в которой электродами служат два железных листочка, покрытых слоем бария для уменьшения работы выхода. Катодное падение составляет в этом случае всего 70 В, и тлеющий разряд зажигается в неоновой лампочке уже при включении в обычную осветительную сеть.

Когда с увеличением тока вся поверхность катода оказывается покрытой свечением, начинает возрастать и катодное падение. В этом случае оно называется *аномальным катодным падением*, а самый разряд — *аномальным тлеющим разрядом.*

6. Электроны, выбиваемые с поверхности катода положительными ионами, ускоряются в области катодного падения потенциала. Когда давление в трубке относительно велико (выше 0,1 мм рт. ст.), электроны теряют свои скорости в результате столкновений с частицами газа. При уменьшении давления газа увеличивается средняя длина свободного пробега электронов, а с ней и катодное темное пространство. При давлении 0,01–0,001 мм рт. ст. (в зависимости от размеров трубки) катодное темное пространство заполняет почти всю трубку и электронный пучок движется в трубке почти без столкновений. Такие электронные пучки получили название *катодных лучей.* Последние были открыты Круксом в конце 70-х годов XIX века, еще до установления их физической природы (и до открытия самого электрона). Если на пути катодных лучей поставить металлический экран, то за ним на противоположной стороне трубки наблюдается его тень. При поднесении магнита пучок лучей и образуемая им тень смещаются в сторону. Эти явления и наблюдались Круксом. Обычно в опытах с катодными лучами применяются короткие, но широкие стеклянные трубки, в которых анод помещается сбоку электронного пучка, исходящего из катода. Электроны, вышедшие с катода, ускоряются электрическим полем вблизи его поверхности и далее движутся перпендикулярно к ней по инерции. Попадая на стенки трубки, электроны сообщают им отрицательный заряд. Однако последний нейтрализуется положительными ионами, подтекающими из газа к стенкам трубки, а отрицательные ионы газа попадают на анод. Если поверхности катода придать вогнутую сферическую форму, то катодные лучи сфокусируются в центре этой сферы. Когда давление в трубке настолько мало, что область катодного темного пространства захватывает анод, тлеющий разряд в трубке прекращается. Вместе с ним прекращается также испускание катодных лучей и свечение стенок трубки.

7. Катодные лучи используются в так называемых *ионных рентгеновских трубках* для получения *рентгеновских лучей.* Устройство

такой трубки показано на схематическом рис. 265. Трубка имеет вогнутый катод K и два положительных электрода A и $A\kappa$. Один из них A, называемый *анодом*, более удален от катода и расположен в области тлеющего свечения. Он предназначен для поддержания в трубке тлеющего разряда. Второй электрод $A\kappa$ называется *антикатодом* и состоит из тугоплавкого металла (вольфрама, молибдена и пр.). На этом электроде фокусируются пучки электронов, испускаемые катодом. При их торможении из антикатода выходят рентгеновские лучи, представляющие собой очень короткие электромагнитные волны (длина волны порядка 10^{-8} см и меньше). Их свойства будут рассмотрены в четвертом и пятом томах нашего курса. Под действием бомбардирующих электронов антикатод сильно раскаляется. Поэтому в мощных рентгеновских трубках антикатод изнутри охлаждается проточной водой.

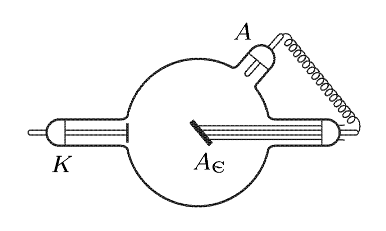


Рис. 265

Ионные рентгеновские трубки обладают тем недостатком, что в результате различных процессов количество газа в трубке уменьшается с течением времени. Когда давление газа в трубке делается меньше 0,001–0,0001 мм рт. ст., тлеющий разряд не зажигается, и трубка перестает работать. В настоящее время применяются почти исключительно *электронные рентгеновские трубки*, обладающие большей устойчивостью в работе, чем ионные трубки. В них тлеющий разряд не используется, а потому не нужен вспомогательный анод, служащий для поддержания такого разряда. Анод (в мощных трубках охлаждаемый) делается из таких же тугоплавких металлов, как и антикатод в ионных трубках. Катодом служит вольфрамовая спираль, накаливаемая электрическим током. Электроны, испускаемые катодом, образуются вследствие термоэлектронной эмиссии. Ускоренные электрическим полем, они бомбардируют анод и при торможении на нем испускают рентгеновские лучи.

8. Если в катоде просверлить малые отверстия, то положительные ионы, бомбардирующие катод, пройдя через эти отверстия, попадают в закатодное пространство и там распространяются в виде прямолинейных лучей (такой опыт впервые был произведен Гольдстейном (1850–1930) в 1882 г.). Эти лучи были названы *положительными*, или *каналовыми*, *лучами*, поскольку они выходят из отверстий катода, как из каналов. Каналовые лучи заметны в трубке в виде слабо светящихся пучков. Они, как и катодные лучи, вызывают свечение стекла трубки. Из-за наличия процессов *перезарядки* в пучке каналовых лучей имеются не только положительные, но и отрицательные ионы, а также быстрые, отчасти возбужденные нейтральные частицы. В магнитном поле такой пучок разделяется на три пучка: положительные ионы отклоняются в одну сторону, отрицательные — в противоположную, а нейтральные молекулы и атомы не испытывают никакого отклонения.

При повторном пропускании этих пучков через магнитное поле каждый из них снова распадается на три пучка. Отсюда следует, что процессы перезарядки происходят не только перед катодом, но и продолжаются в закатодном пространстве.

§ 118. Искровой разряд

1. *Искровой разряд* характеризуется прерывистой формой даже при пользовании источниками постоянного тока. Он возникает в газе обычно при давлениях порядка атмосферного. В естественных природных условиях искровой разряд наблюдается в виде *молнии.* По внешнему виду искровой разряд представляет собой пучок ярких зигзагообразных разветвляющихся тонких полосок, мгновенно пронизывающих разрядный промежуток, быстро гаснущих и постоянно сменяющих друг друга (рис. 266). Эти полоски называются *искровыми каналами.* Они начинаются как от положительного, так и от отрицательного электродов, а также от любой точки между ними. Каналы, развивающиеся от положительного электрода, имеют четкие нитевидные очертания, а развивающиеся от отрицательного, — диффузные края и более мелкое ветвление.

Так как искровой разряд возникает при больших давлениях газа, то потенциал зажигания очень высок. (Для сухого воздуха, например, при давлении 1 атм и расстоянии между электродами 10 мм пробивное напряжение 30 кВ.) Однако после того, как разрядный промежуток «пробит» искровым каналом, сопротивление этого промежутка становится очень малым, через канал проходит кратковременный импульс

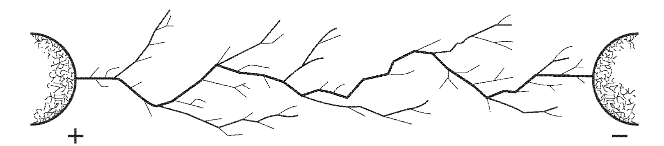


Рис. 266

тока большой силы, в течение которого на разрядный промежуток приходится лишь незначительное напряжение. Если мощность источника не очень велика, то после такого импульса тока разряд прекращается. Напряжение между электродами начинает повышаться до прежнего значения, и пробой газа повторяется с образованием нового искрового канала. Время τ нарастания напряжения тем больше, чем больше емкость C между электродами. Поэтому включение конденсатора параллельно разрядному промежутку увеличивает время между двумя последовательными искрами, а сами искры становятся более мощными. Через канал искры проходит большой электрический заряд, и поэтому увеличивается амплитуда и длительность импульса тока. При большой емкости C канал искры ярко светится и имеет вид широких полос. То же самое происходит при увеличении мощности источника тока.

Тогда говорят о *конденсированном искровом разряде*, или *конденсированной искре.* Максимальная сила тока в импульсе при искровом разряде меняется в широких пределах в зависимости от параметров цепи разряда и условий в разрядном промежутке, достигая нескольких сотен килоампер. При дальнейшем увеличении мощности источника искровой разряд переходит в *дуговой разряд.*

В результате прохождения импульса тока через канал искры в канале выделяется большое количество энергии (порядка 0,1–1 Дж на каждый сантиметр длины канала). С выделением энергии связано скачкообразное увеличение давления в окружающем газе — образование цилиндрической ударной волны, температура на фронте которой около 10^4 К. Происходит быстрое расширение канала искры, со скоростью порядка тепловой скорости атомов газа. По мере продвижения ударной волны температура на ее фронте начинает падать, а сам фронт отходит от границы канала. Возникновением ударных волн объясняются звуковые эффекты, сопровождающие искровой разряд: характерное потрескивание в слабых разрядах и мощные раскаты *грома* в случае молнии.

В момент существования канала, особенно при высоких давлениях, наблюдается наиболее яркое свечение искрового разряда. Яркость свечения неоднородна по сечению канала и имеет максимум в его центре.

2. Остановимся теперь на механизме искрового разряда. Вначале казалось, что искровой разряд обусловлен теми же основными процессами, что и тлеющий разряд. Согласно теории Таунсенда такими процессами являются объемная ионизация газа электронами и положительными ионами, а также вторичная эмиссия электронов с катода, обусловленная бомбардировкой его положительными ионами и фотонами, образующимися во время разряда. Однако такое предположение не согласуется с опытами. Если бы оно было верным, то время развития искрового разряда, например, было бы порядка времени, которое требуется ионам для прохождения расстояния между анодом и катодом. Это время, как нетрудно оценить, порядка 10^{-4}–10^{-5} с. Между тем осциллографические исследования показали, что фактическое время развития искрового разряда порядка 10^{-7} с и меньше.

В настоящее время общепринятой считается так называемая *стримерная теория искрового пробоя*, подтвержденная прямыми опытами. Качественно она объясняет основные особенности искрового разряда, хотя в количественном отношении и не может считаться завершенной. Если вблизи катода зародилась электронная лавина, то на ее пути происходит ионизация и возбуждение молекул и атомов газа. Существенно, что световые кванты, испускаемые возбужденными атомами и молекулами, распространяясь к аноду со скоростью света, сами производят ионизацию газа и дают начало новым электронным лавинам. Таким путем во всем объеме газа появляются слабо светящиеся скопления ионизованного газа, называемые *стримерами.* В процессе своего развития отдельные электронные лавины догоняют друг друга и, сливаясь вместе, образуют хорошо проводящий мостик из стримеров.

По этому мостику в последующий момент времени и устремляется мощный поток электронов, образующий канал искрового разряда. Поскольку проводящий мостик образуется в результате слияния практически одновременно возникающих стримеров, время его образования много меньше времени, которое требуется отдельной электронной лавине для прохождения расстояния от катода к аноду. Наряду с *отрицательными стримерами*, т. е. стримерами, распространяющимися от катода к аноду, существуют также *положительные стримеры*, которые распространяются в противоположном направлении.

§ 119. Коронный разряд

1. *Коронный разряд* возникает при сравнительно высоких давлениях газа (порядка атмосферного) в сильно неоднородном электрическом поле. Такое поле можно получить между двумя электродами, поверхность одного из которых обладает большой кривизной (тонкая проволочка, острие). Наличие второго электрода не обязательно, его роль могут играть окружающие заземленные электроды. Когда электрическое поле вблизи электрода с большей кривизной достигает примерно $3 \cdot 10^4$ В/м, вокруг этого электрода возникает свечение, имеющее вид оболочки или *короны*, откуда и произошло название разряда. Если корона возникает вокруг отрицательного электрода, то она называется *отрицательной.* В противоположном случае корона называется *положительной.* Механизм возникновения разряда в этих двух случаях разный.

В случае отрицательной короны положительные ионы, образуемые электронными лавинами, ускоряются в сильно неоднородном электрическом поле вблизи катода. Попадая на катод, они выбивают из него электроны (вторичная электронная эмиссия). Выбитые электроны, отталкиваясь от катода, на своем пути порождают новые электронные лавины. Так как электрическое поле убывает при удалении от проволоки, то на некотором расстоянии электронные лавины обрываются, электроны попадают в «темную» область и там прилипают к нейтральным молекулам газа. Образовавшиеся отрицательные ионы и являются основными носителями тока в «темной» области. Пространственный отрицательный заряд этих ионов вблизи анода ограничивает общий разрядный ток. В случае чистых электроположительных газов отрицательные ионы не образуются, а носителями тока в «темной» области являются *сами электроны.* В «темной» области разряд носит *несамостоятельный характер.*

В положительной короне, когда катодом служит электрод с большим радиусом кривизны, электрическое поле у катода слабое. Поэтому электронные лавины не могут порождаться электронами, выбиваемыми из катода вследствие вторичной эмиссии. Электронные лавины порождаются электронами, возникающими вблизи анода при *объемной ионизации газа* фотонами, излучаемыми коронирующим слоем. Они

зарождаются на внешней границе коронирующего слоя и распространяются к положительному электроду (обладающему большой кривизной). Положительные ионы, двигаясь через «темную» область к катоду, образуют *пространственный заряд*, который снова ограничивает силу разрядного тока.

При увеличении напряжения между электродами «темная» область коронного разряда исчезает и возникает *искровой разряд* с полным пробоем разрядного промежутка.

2. Корона иногда возникает в естественных условиях под влиянием *атмосферного электричества* на верхушках деревьев, корабельных мачт и пр. Это явление в старину получило название *огней святого Эльма.* С возникновением коронного разряда приходится считаться в технике высоких напряжений. Образуясь вокруг проводов высоковольтных линий передач электроэнергии, корона ионизует окружающий воздух, вследствие чего возникают вредные *токи утечки.* Для уменьшения этих вредных токов провода высоковольтных линий, а также подводящие провода к лабораторным высоковольтным установкам должны быть достаточно толстыми. Коронные разряды, поскольку они носят прерывистый характер, являются источниками значительных *радиопомех.*

Коронный разряд используется в *электрофильтрах*, предназначенных для очистки промышленных газов от примесей твердых и жидких частиц (дыма в производстве серной кислоты, в литейных цехах заводов цветных металлов и пр.). Принцип действия такого электрофильтра пояснен на рис. 267. Вдоль оси вертикальной трубы натянута заряженная (например, отрицательно) проволока AB, вокруг которой зажигается коронный разряд. Вследствие этого воздух внутри трубы становится сильно ионизованным. Ионы оседают на частицах дыма, поднимающегося вверх по трубе. Получив заряды, одноименные с зарядом коронирующей проволоки, частицы дыма отталкиваются от нее и оседают на стенках трубы. Отсюда они могут быть извлечены механическим способом и использованы для получения содержащихся в них ценных продуктов. Соответствующую демонстрацию легко осуществить в лекционной аудитории. Темным дымом заполняется прозрачная труба в отсутствие электрического поля между проволокой и стенками трубы. При включении напряжения воздух в трубе моментально становится светлым.

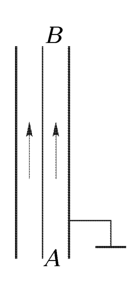


Рис. 267

§ 120. Дуговой разряд

1. Если после получения искрового разряда от мощного источника постепенно уменьшать расстояние между электродами (или сопротивление внешней цепи), то разряд из прерывистого становится *непрерывным* — возникает новая форма газового разряда, называемая *дуговым разрядом.* При этом ток резко увеличивается, достигая десятков и сотен

ампер, а напряжение на разрядном промежутке падает до нескольких десятков вольт.

Дуговой разряд можно получить от источника низкого напряжения, минуя стадию искры. Для этого электроды сближают до соприкосновения. В месте соприкосновения они сильно раскаляются электрическим током, после чего их разводят, получая при этом яркую *электрическую дугу.* Именно таким путем электрическая дуга была впервые получена в 1802 г. русским физиком В. В. Петровым (1761–1834). Электродами в его опытах служили два куска древесного угля, включенные в цепь мощной гальванической батареи. Угли раскалялись до ослепительного свечения, а между ними возникал яркий столб светящегося газа. Работа Петрова была опубликована на русском языке и осталась неизвестной заграничным ученым. В России на нее не обратили внимания, и она была основательно забыта. Явление электрической дуги было вновь открыто в 1810 г. английским химиком Дэви и без достаточных на то оснований названо *вольтовой дугой.*

В настоящее время электрическая дуга, горящая при атмосферном давлении, чаще всего получается между специальными угольными электродами, изготовляемыми из прессованного графита со связывающими веществами. Во время горения расстояние между электродами дуги бывает порядка 5 мм при токе 10–20 А и напряжении между ними 40–50 В. По мере горения дуги угольный катод заостряется, а на аноде образуется углубление, называемое *кратером.* Кратер — наиболее горячее место дуги. Его температура при атмосферном давлении достигает 4000 °С, а при давлении в 20 атм превышает 7000 °С (выше температуры границы фотосферы Солнца). В электрических дугах с металлическими электродами температура меньше (2000–2500 °С) из-за высокой теплопроводности электродов и быстрого испарения металлов, требующего большого количества тепла.

2. Согласно В. Ф. Миткевичу (1872–1951), дуговой разряд поддерживается главным образом за счет *термоэлектронной эмиссии с поверхности катода.* Подтверждением этой точки зрения может служить установленный на опыте факт, что во многих случаях устойчивая дуга получается только при условии, что температура катода достаточно высока. При охлаждении катода дуга горит неустойчиво, периодически гаснет и снова зажигается. Охлаждение же анода не вызывает нарушения устойчивого режима горения дуги.

С этим согласуется также поведение тлеющего разряда при увеличении тока в нем. Когда в результате бомбардировки положительными ионами катод газоразрядной трубки разогревается, появляется термоэлектронный ток, усиливающий электронный ток вторичной эмиссии. Вследствие этого пространственный положительный заряд вблизи катода, а с ним и катодное падение потенциала начинают уменьшаться. При дальнейшем возрастании разрядного тока последнее становится порядка потенциалов ионизации или возбуждения газа, т. е. около 10 В. Проводимость газового промежутка увеличивается, и тлеющий разряд переходит в дуговой. При охлаждении катода вследствие уменьшения

термоэлектронной эмиссии дуга не возникает или работает неустойчиво. Наоборот, тлеющий разряд можно перевести в дугу, нагревая проволочный катод газоразрядной трубки с помощью специальной батареи.

С возрастанием разрядного тока сопротивление дуги R сильно уменьшается из-за увеличения термоэлектронной эмиссии с катода и ионизации газа в разрядном промежутке. При этом сопротивление R убывает сильнее, чем возрастает ток I. Вследствие этого с увеличением тока I напряжение на разрядном промежутке $V = RI$ *не возрастает, а убывает.* Говорят, что дуга имеет *падающую вольт-амперную характеристику*, т. е. такую характеристику, когда напряжение на разрядном промежутке уменьшается с возрастанием тока. Поэтому для поддержания устойчивого горения дуги при случайных изменениях тока, например вследствие охлаждения катода, напряжение на электродах дуги должно быть повышено. Иначе дуга погаснет. С этой целью в цепь дуги включают последовательно *балластное сопротивление.* При случайном уменьшении тока напряжение на балластном сопротивлении уменьшается. Поэтому при неизменном подводимом общем напряжении напряжение на газоразрядном промежутке должно увеличиться, чем и обеспечивается стабильное горение дуги.

3. Наряду с дуговыми разрядами, обусловленными термоэлектронной эмиссией, существуют и разряды другого типа. Примером могут служить дуговые разряды в ртутных лампах. *Ртутная лампа* представляет собой предварительно откачанный кварцевый или стеклянный баллон, наполненный парами ртути. Дуговой разряд зажигается электрической искрой между двумя столбиками ртути, служащими электродами лампы. Ртутная дуга является мощным источником, ультрафиолетовых лучей. Поэтому такие лампы применяют в медицине и в научных исследованиях. Баллоны ламп делают из кварца или специальных сортов стекла, пропускающих ультрафиолетовые лучи.

Экспериментальные исследования показали, что источником мощной эмиссии электронов в ртутной лампе является небольшое, ярко светящееся пятно, возникающее на катоде и непрерывно бегающее по его поверхности (так называемое *катодное пятно*). Плотность тока в катодном пятне огромна и может достигать 10^6–10^7 А/см^2. Катодное пятно может возникнуть не только у поверхности ртутного, но и любого другого металлического электрода.

Ртутные дуги и аналогичные дуги с металлическими электродами получили название *электрических дуг с холодным катодом.* Дело в том, что раньше считалось, что катод действительно является холодным по всей его поверхности. Поэтому термоэлектронная эмиссия с катода не происходит или практически не играет никакой роли. Ленгмюр высказал предположение, что в случае холодного катода дуговой разряд поддерживается *автоэлектронной эмиссией с катода.* Действительно, катодное падение потенциала (10 В) происходит на протяжении порядка длины свободного пробега электрона. Поэтому вблизи

катода возникает сильное электрическое поле, достаточное, чтобы вызвать заметную автоэлектронную эмиссию. Несомненно, автоэлектронная эмиссия в дугах с *холодным* катодом играет существенную роль. Позднее появились указания на возможность нагрева таких катодов в отдельных точках до температур, при которых происходит большая термоэлектронная эмиссия, которая вместе с автоэлектронной эмиссией и поддерживает дуговой разряд. Этот вопрос еще недостаточно исследован.

§ 121. Плазма

1. *Плазмой называется ионизованный квазинейтральный газ, занимающий настолько большой объем, что в нем не происходит сколько-нибудь заметного нарушения квазинейтральности из-за тепловых флуктуаций.* Квазинейтральность газа означает, что количества положительных и отрицательных зарядов в нем *почти одинаковы.*

Оценим размеры области, в которой могут происходить заметные нарушения квазинейтральности, предполагая для простоты, что заряды положительных и отрицательных частиц одинаковы и равны элементарному заряду e. Пусть такая плазма заполняет пространство между плоскостями AB и MN (рис. 268). Допустим, что из-за тепловых флуктуаций отрицательные заряды сместились вверх на расстояние l. Тогда на границах плазмы возникнут макроскопические заряды противоположных знаков с поверхностной плотностью $\sigma = nle$, где n — концентрация частиц одного знака заряда. Напряженность электрического поля в плазме будет $E = 4\pi\sigma = 4\pi nle$, а плотность электрической энергии $E^2/8\pi = 2\pi(nle)^2$. Поскольку энергия электрического поля черпается из кинетической энергии теплового движения частиц газа, величина $E^2/8\pi$ не может превосходить $3nkT$. (На долю отрицательных частиц единицы объема приходится в среднем кинетическая энергия $(3/2)kT$, и такая же энергия — на долю положительных.) Следовательно, если опустить числовой коэффициент 3, то должно быть $2\pi(nle)^2 < nkT$, или $l < D$, где

Рис. 268

$$D = \sqrt{\frac{kT}{2\pi ne^2}}. \tag{121.1}$$

Величина D называется *дебаевской длиной* или *дебаевским радиусом.* (Более точное определение дается в задаче 1.)

Таким образом, *чтобы плазма сохраняла квазинейтральность, ее линейные размеры должны намного превосходить дебаевский радиус* D. Только при соблюдении условия квазинейтральности плазма ведет себя как *связанный коллектив заряженных частиц*, а не как простая совокупность невзаимодействующих частиц. Например, если в плазме есть градиент концентрации, то, несмотря на различие коэффициентов

диффузии, положительные и отрицательные ионы не диффундируют с различными скоростями, а благодаря квазинейтральности плазмы перемещаются с одной и той же средней скоростью в одном и том же направлении. Такая диффузия называется *амбиполярной.* Физическая причина амбиполярного характера диффузии плазмы состоит в том, что из-за различия в коэффициентах диффузии и подвижности ионов в плазме возникает некоторое разделение электрических зарядов и связанное с ним электрическое поле, которое замедляет диффузию ионов одного знака и ускоряет диффузию ионов противоположного знака. В результате скорости диффузии положительных и отрицательных ионов выравниваются. Восстановление нарушенной квазинейтральности плазмы аналогично появлению восстанавливающих сил в упругих телах при их деформациях. С этим связана возможность разнообразных *коллективных колебаний* плазмы, значительно более разнообразных, чем в газах, состоящих из нейтральных частиц.

2. В зависимости от степени ионизации α различают *слабо ионизованную* (при α порядка долей процента), *умеренно ионизованную* (α порядка нескольких процентов) и *полностью ионизованную плазму.* В земных природных условиях плазма встречается довольно редко (например, в канале молнии). В верхних слоях атмосферы, в большей степени подверженных воздействию ионизующих факторов (ультрафиолетовые и космические лучи), постоянно присутствует слабо ионизованная плазма — *ионосфера*, отражающая радиоволны и делающая возможной радиосвязь на больших расстояниях (порядка расстояния между диаметрально противоположными точками земного шара). В космическом пространстве плазма представляет собой наиболее распространенное состояние вещества. Солнце и горячие звезды, имеющие высокие температуры, состоят из полностью ионизованной плазмы. Поэтому многие проблемы астрофизики связаны с изучением физических свойств плазмы. На почве астрофизики возникла *магнитная гидродинамика*, в которой плазма, движущаяся в магнитных полях, рассматривается как *сплошная жидкая среда*, обладающая *высокой проводимостью.* Плазма образуется в различных формах газового разряда, например в положительном столбе тлеющего разряда, а также в главном канале искрового разряда. Физика плазмы — сравнительно новый, быстро развивающийся раздел физики, которому посвящены специальные курсы. В курсе общей физики можно сообщить только некоторые отрывочные сведения о плазме.

3. Оценим удельную проводимость λ полностью ионизованной плазмы, состоящей из электронов и положительно заряженных ионов с зарядом Ze каждый. Движение ионов, ввиду их больших масс, можно не учитывать и считать, что весь ток создается движением легких электронов. Величина λ определяется столкновением электронов с ионами. Столкновения электронов между собой на величину тока не влияют, поскольку при таких столкновениях полный импульс электронов не изменяется. От этих столкновений можно отвлечься. Между

ионами и электронами плазмы действуют *кулоновские силы притяжения.* Это — *дальнодействующие силы.* Электрон сравнительно редко подходит к иону на такие малые расстояния, чтобы направление его движения изменилось резко и имело характер скачка. Гораздо большее значение имеют взаимодействия электрона сразу *с очень большим количеством ионов*, при которых направление траектории электрона меняется *плавно и непрерывно.* Отклонения электрона на большие углы от первоначального направления движения происходят в результате накопления *малых отклонений* при взаимодействии его с «далекими» ионами. Поэтому о столкновениях, длине и времени свободного пробега можно говорить лишь в условном смысле. Условимся называть временем свободного пробега электрона промежуток времени τ, в течение которою направление движения электрона меняется на угол порядка 90°.

Для оценки величины τ допустим сначала, что единственный электрон движется в поле положительного иона с зарядом Ze. Если v — скорость электрона на бесконечности, а b — прицельный параметр, то при прохождении мимо иона траектория электрона отклоняется на угол, определяемый формулой

$$\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{mv^2 b}{Ze^2},$$

где m — масса электрона (см. т. I, § 58, где аналогичная формула получена для движений под действием гравитационных сил). Прицельный параметр b, для которого $\vartheta = 90^\circ$, определяется выражением $b = Ze^2/(mv^2)$. Ему соответствует «эффективное поперечное сечение»

$$\sigma = \pi b^2 = \pi\left(\frac{Ze^2}{mv^2}\right)^2.$$

Учет далеких взаимодействий приводит к тому же результату, но увеличенному в L раз:

$$\sigma = \pi L\left(\frac{Ze^2}{mv^2}\right)^2.$$

Коэффициент L называется *кулоновским логарифмом.* Он почти не зависит от температуры и плотности плазмы. Для плазмы, состоящей из полностью ионизованного дейтерия, при $kT \sim 10$ кэВ и концентрации электронов $n \sim 10^{12}$–10^{15} см$^{-3}$ $L \approx 15$. Так как каждый положительный ион содержит Z элементарных зарядов, то концентрация таких ионов будет n/Z, а средняя длина и время «свободного пробега»

$$\bar{l} = \frac{1}{\sigma n/Z} = \frac{Z}{\sigma n}, \quad \bar{\tau} \approx \frac{\bar{l}}{v} = \frac{m^2\bar{v}^3}{\pi Z n e^4 L}.$$

Подставив сюда $m\bar{v}^2 \approx 3kT$, получим

$$\bar{\tau} \approx \frac{(3kT)^{3/2}\sqrt{m}}{\pi Z n e^4 L}. \qquad (121.2)$$

Отсюда для удельной проводимости плазмы находим

$$\lambda \approx \frac{ne^2\overline{\tau}}{m} \approx \frac{(3kT)^{3/2}}{\pi Z e^2 L\sqrt{m}}. \tag{121.3}$$

Конечно, приведенный вывод надо рассматривать как грубую оценку, а не как доказательство формулы (121.3). Однако можно дать и более обоснованный вывод этой формулы. Подставляя числовые значения и выражая энергетическую температуру $\Theta = kT$ в электронвольтах, приходим к оценочной формуле для λ (в обратных секундах):

$$\lambda \approx \frac{10^{13}}{Z}\,\Theta^{3/2},$$

причем мы приняли $L \approx 15$. Проводимость плазмы растет пропорционально абсолютной температуре в степени 3/2. В горячей плазме проводимость становится очень высокой. Так, при $\Theta = 10$ кэВ для дейтериевой плазмы $\lambda \approx 10^{19}$ с$^{-1}$, т. е. больше, чем у меди ($5\cdot 10^{17}$ с$^{-1}$). Еще быстрее растет с температурой теплопроводность плазмы, а именно пропорционально $\Theta^{5/2}$, так как для плазмы, очевидно, должен быть справедлив закон Видемана–Франца.

4. Большое различие в массах электронов и ионов плазмы делает возможным в плазме существование таких квазиравновесных состояний, которые в известном приближении могут быть характеризованы *двумя температурами.* Действительно, пусть начальное распределение скоростей электронов и ионов плазмы изотропно, но не максвелловское. При столкновении электрона с другим электроном они обмениваются энергией, величина которой порядка начальной энергии самих электронов. Поэтому время установления распределения электронов по энергиям (т. е. максвелловского распределения) из-за столкновений между ними можно оценить по формуле (121.2). (Это станет ясно, если в ней массу электрона m заменить приведенной массой $m/2$.) Это время, называемое *электронным временем релаксации* $\overline{\tau}_e$, пропорционально квадратному корню из массы электрона: $\overline{\tau}_e \sim \sqrt{m_e}$. Точно так же определяется *ионное время релаксации*, за которое успевает устанавливаться распределение по энергиям между ионами из-за столкновений между ними: $\overline{\tau}_i \sim \sqrt{m_i}$. Не то будет при взаимодействии электронов с ионами. Здесь по формуле (121.2) получается время порядка $\sqrt{m_e}$. Однако при каждом столкновении быстрая частица передает медленной лишь незначительную долю своей энергии. В среднем эта доля порядка m_e/m_i от первоначальной энергии быстрой частицы (см. т. I, § 28, задача 9). Для выравнивания энергий потребуется релаксационное время $\overline{\tau}_{ie}$, в m_i/m_e раз большее, чем $\overline{\tau}_e$. Таким образом,

$$\overline{\tau}_e : \overline{\tau}_i : \overline{\tau}_{ie} \sim 1 : \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} : \frac{m_i}{m_e}. \tag{121.4}$$

Отсюда следует, что $\overline{\tau}_e \ll \overline{\tau}_i \ll \overline{\tau}_{ie}$. Если плазму предоставить самой себе, то сначала установится максвелловское распределение скоростей электронов, затем — ионов. Возникнет квазиравновесное состояние,

в котором электроны будут иметь температуру T_e, а ионы — температуру T_i. Вообще говоря, $T_e \neq T_i$. В этом случае плазму называют *неизотермической* или *двухтемпературной*. Затем в результате обмена энергиями между электронами и ионами установится максвелловское распределение для всей плазмы, характеризующееся общей температурой электронов и ионов (*изотермическая плазма*).

Когда плазма находится в электрическом поле, то в ней начинает течь электрический ток и выделяться джоулева теплота. При этом энергию от поля получают почти исключительно электроны, как наиболее подвижные частицы. Ионы нагреваются главным образом за счет энергии, которую они получают от «горячих» электронов при кулоновских взаимодействиях с ними. Так как последний процесс происходит сравнительно медленно, то *температура электронов в плазме оказывается выше температуры ионов*. Различие между ними может быть весьма значительным. Так, в положительном столбе тлеющего разряда при давлениях порядка 0,1 миллиметров ртутного столба температура электронов может достигать 50 000 °C и выше, тогда как температура ионов не превышает нескольких сотен градусов.

5. Основной практический интерес, который представляет физика плазмы, связан с решением проблемы *управляемого термоядерного синтеза*. Для того чтобы в веществе начались достаточно интенсивные термоядерные реакции, его необходимо нагреть до температуры в несколько килоэлектронвольт или десятков килоэлектронвольт, а при таких температурах всякое вещество находится в состоянии плазмы. Наиболее перспективными «рабочими веществами» для термоядерного реактора являются *изотопы водорода*: *дейтерий* (D) и *тритий* (T). Термоядерную реакцию синтеза легче получить не в чистом дейтерии, а в его смеси с тритием. Полное количество дейтерия в океанах $4 \cdot 10^{13}$ тонн, что эквивалентно энергии 10^{20} кВт · лет (полная потребляемая на всем земном шаре мощность составляет 10^{10} кВт). Тритий, как сильно радиоактивный элемент, в природных условиях не встречается, а получается искусственно. В будущих термоядерных реакторах расход трития должен с избытком пополняться воспроизводством (регенерацией) его в результате облучения ^{6}Li нейтронами, получающимися в самих термоядерных реакторах.

Так как термоядерные реакции должны происходить сравнительно плавно и медленно, то возникает необходимость достаточно длительного удержания горячей плазмы в ограниченном объеме рабочей камеры и изоляции ее от стенок этой камеры. Для этого предлагается использовать *магнитную термоизоляцию*, т. е. помещать плазму в сильное магнитное поле, препятствующее ионам и электронам перемещаться в поперечном направлении и уходить на стенки камеры.

Необходимое требование, которому должен удовлетворять всякий термоядерный реактор, состоит в том, чтобы энергия, выделяющаяся в ядерных реакциях, с избытком компенсировала затраты энергии от

внешних источников. Основными источниками потерь энергии является *тормозное излучение* электронов при кулоновских столкновениях последних, а также *магнитотормозное* (*циклотронное* или *бетатронное*) излучение, возникающее вследствие ускоренного движения электронов в магнитном поле. Для самоподдерживающихся термоядерных реакций требуется нагреть плазму до некоторой «критической» температуры (50 кэВ для реактора на чистом дейтерии и 10 кэВ для реактора на равнокомпонентной смеси дейтерия с тритием). При этом, как показывает расчет, должен выполняться так называемый критерий Лоусона: $n\tau > 10^{16}$ с/см^3 для реактора D–D и $n\tau > 10^{14}$ с/см^3 для реактора D–T. Здесь n — концентрация ионов плазмы (одного знака), а τ — среднее время удержания плазмы.

Основная трудность, стоящая на пути создания управляемого термоядерного синтеза, связана с получением *спокойной*, или *устойчивой*, *плазмы*. Дело в том, что из-за дальнодействующего характера кулоновских сил в плазме происходят разные коллективные процессы, например самопроизвольно возникающие *шумы* и *колебания*, делающие плазму *неустойчивой*. Основные усилия при решении проблемы управляемого термоядерного синтеза и направлены на подавление этих неустойчивостей.

ЗАДАЧИ

1. Полупространство справа от бесконечной заряженной плоскости AB (рис. 269) заполнено полностью ионизованной плазмой, состоящей из однозарядных положительных ионов и электронов. Найти электрическое поле и распределение зарядов в плазме на любых расстояниях от плоскости AB, если поверхностная плотность внешних зарядов на плоскости AB равна σ.

Решение. В плазме вблизи плоскости AB образуется избыток ионов, заряженных разноименно с σ, и недостаток ионов, заряженных одноименно. В плазме возникает электрическое поле $\mathbf{E}$, перпендикулярное к плоскости AB. Направим координатную ось X внутрь плазмы перпендикулярно к этой плоскости. Из соображений симметрии ясно, что все величины будут функциями только координаты x. Следовательно,

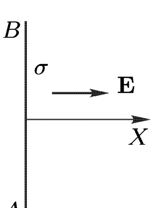


Рис. 269

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{dE}{dx} = 4\pi\rho. \tag{121.5}$$

Плотность свободных электрических зарядов ρ можно представить в виде $\rho = (n^+ - n^-)e$, где n^+ — концентрация положительных, а n^- — отрицательных ионов. Вдали от границы AB (в бесконечности) плазма *электрически нейтральна*, там $n^+ = n^- \equiv n$. Вблизи границы концентрации n^+ и n^- различны. Если φ — электрический потенциал поля $\mathbf{E}$, то согласно формуле Больцмана

$$n^+ = n\exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right), \quad n^- = n\exp\left(+\frac{e\varphi}{kT}\right). \tag{121.6}$$

При $x = +\infty$ потенциал φ равен нулю, а потому $n^+ = n^- = n$. Итак,

$$n^+ - n^- = n\left[\exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right) - \exp\left(+\frac{e\varphi}{kT}\right)\right] = -2n\operatorname{sh}\frac{e\varphi}{kT}.$$

Следовательно,

$$\frac{dE}{dx} = -8\pi ne\,\mathrm{sh}\,\frac{e\varphi}{kT}.$$

Умножая обе части последнего уравнения на $2E\,dx = -2d\varphi$, получим

$$dE^2 = 16\pi ne\,\mathrm{sh}\,\frac{e\varphi}{kT}\,d\varphi.$$

Простое интегрирование дает

$$E^2 = 16\pi nkT\,\mathrm{ch}\,\frac{e\varphi}{kT} + C.$$

Постоянную C надо определить из условия, чтобы в бесконечности (где $\varphi = 0$) поле E обращалось в нуль. Это дает

$$E^2 = 16\pi nkT\left(\mathrm{ch}\,\frac{e\varphi}{kT} - 1\right) = 32\pi nkT\,\mathrm{sh}^2\,\frac{e\varphi}{kT}.$$

При извлечении квадратного корня перед ним надо взять знак плюс. Это следует из того, что когда поле E положительно, т. е. направлено вправо, то и потенциал φ также положителен. Если же поле отрицательно, т. е. направлено влево, то и потенциал φ отрицателен. Итак,

$$E = -\frac{d\varphi}{dx} = 4\sqrt{2\pi nkT}\;\mathrm{sh}\,\frac{e\varphi}{kT}. \tag{121.7}$$

После интегрирования получим

$$\mathrm{th}\,\frac{e\varphi}{kT} = C_1 e^{-x/D},$$

где D — постоянная:

$$D = \sqrt{\frac{kT}{8\pi ne^2}}. \tag{121.8}$$

Эта формула и дает точное выражение дебаевского радиуса, введенного выше в тексте настоящего параграфа.

Постоянную интегрирования C_1 можно выразить через потенциал φ_0 на границе плазмы. Таким путем получим

$$\mathrm{th}\,\frac{e\varphi}{kT} = \mathrm{th}\,\frac{e\varphi_0}{kT}\,e^{-x/D}. \tag{121.9}$$

Самый потенциал φ легко связать с напряженностью внешнего электрического поля $E_0 = 2\pi\sigma$. При $x = 0$ должно быть $E = E_0$, а потому

$$E_0 = 4\sqrt{2\pi nkT}\;\mathrm{sh}\,\frac{e\varphi_0}{kT}. \tag{121.10}$$

Таким образом, при удалении от границы плазмы величина $\mathrm{th}\,(e\varphi/kT)$ экспоненциально убывает. На протяжении дебаевского радиуса она убывает в e раз. Этим определяется и закон убывания поля E с координатой x. Можно сказать, что по порядку величины дебаевский радиус D определяет глубину, на которую электрическое поле проникает в плазму.

2. Решить предыдущую задачу для точечного заряда q, окруженного со всех сторон плазмой. Ограничиться расстояниями от заряда r, на которых выполняется условие $|e\varphi| \ll kT$.

Решение. При выполнении условия $|e\varphi| \ll kT$ выражения (121.6) можно разложить в ряды и оборвать их на членах первой степени. Подставляя полученные выражения в уравнение Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi e(n^+ - n^-)$,

придадим ему вид

$$\Delta\varphi + \frac{\varphi}{D^2} = 0, \tag{121.11}$$

где D определяется прежним выражением (121.8). Ввиду сферической симметрии

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) + \frac{\varphi}{D^2} = 0.$$

Общее решение этого уравнения

$$\varphi = \frac{1}{r}\left(Ce^{-r/D} + C'e^{r/D}\right). \tag{121.12}$$

Постоянная интегрирования C' должна обращаться в нуль, чтобы удовлетворить условию $\varphi = 0$ при $r = \infty$. Для определения постоянной C допустим, что условие $|e\varphi| \ll kT$ выполняется уже при $r \ll D$. Тогда на таких расстояниях еще применимо решение (121.12). Но тогда оно переходит в кулоновский потенциал $\varphi = q/r$. Следовательно, должно быть $C = q$, т. е.

$$\varphi = \frac{q}{r}e^{-r/D}. \tag{121.13}$$

Этот потенциал называется *дебаевским потенциалом.* Формула (121.13) показывает, что дебаевский радиус по порядку величины определяет расстояние от заряда q, на котором кулоновское поле этого заряда экранируется противоположно заряженными ионами плазмы Можно также сказать, что действие кулоновского поля заряда q простирается на расстояние порядка дебаевского радиуса D, а на больших расстояниях практически не имеет места.

3. В электростатике считается, что в состоянии равновесия электричество распределяется по поверхности проводника. Фактически оно распределяется не по математической поверхности, а внутри поверхностного слоя конечной толщины l. Оценить эту толщину.

Ответ. Величина l порядка дебаевского радиуса D, если выражение для D изменить с учетом распределения Ферми для электронов металла. Для этого величину kT надо заменить энергией Ферми (99.6). Сделав это и опуская числовые множители порядка единицы, получим

$$l = \sqrt{a_1 n^{-1/3}},$$

где $a_1 = h^2/(4\pi^2 me) = 0{,}53\cdot 10^{-8}$ см (радиус первой боровской орбиты в атоме водорода), а $n^{-1/3}$ — среднее расстояние между свободными электронами металла.

Глава X
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

§ 122. Уравнение колебательного контура

1. Колебаниями в физике называют не только периодические или почти периодические движения тел, когда колеблющееся тело многократно повторяет одно и то же движение туда и обратно около определенного положения равновесия, а придают этому понятию более широкий смысл. *Под колебанием понимают всякий периодический или приблизительно периодический процесс, в котором значения той или иной физической величины повторяются точно или приближенно через равные или приблизительно равные промежутки времени.*

Допустим, например, что прямоугольная рамка (рис. 270) равномерно вращается в постоянном однородном магнитном поле с постоянной угловой скоростью ω. Если S — площадь рамки, то пронизывающий ее магнитный поток будет $\varPhi = BS\cos\alpha$, где α — угол между направлением вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$ и нормалью к плоскости рамки $\mathbf{N}$. При равномерном вращении $\alpha = \omega t$, $\varPhi = \varPhi_0\cos\omega t$, где $\varPhi_0 = BS$. В рамке возбуждается электродвижущая сила $\mathscr{E}_{\text{инд}} = -d\varPhi/dt = \mathscr{E}_0\sin\omega t$ и электрический ток $I = I_0\sin\omega t$, где $\mathscr{E}_0$ и I_0 — постоянные. Все эти выражения описывают колебательный процесс, в котором колеблющимися величинами являются магнитный поток $\varPhi$, электродвижущая сила $\mathscr{E}$ и электрический ток I.

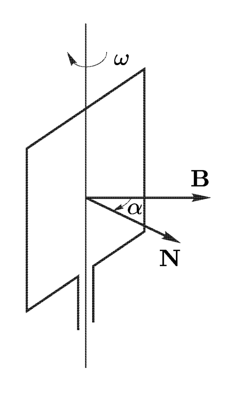


Рис. 270

Специфические закономерности колебательных явлений, определяющие не мгновенные значения колеблющихся величин, а характеризующие *колебательный процесс в целом*, не зависят от того, какова физическая природа величин, совершающих колебания. Такие закономерности изучает *теория колебаний*, характеризующаяся *единым подходом* к колебаниям различной физической природы. В дальнейшем эта особенность колебательных закономерностей будет проиллюстрирована на конкретных примерах.

В настоящей главе будут изучаться преимущественно электрические колебания. Однако для лучшего понимания этих явлений мы будем сопоставлять их с аналогичными колебаниями механических систем.

2. Изучение электрических колебаний мы начнем с вывода *уравнения колебательного контура.* Так называется система, состоящая из последовательно соединенных конденсатора, катушки самоиндукции

L и проводника с омическим сопротивлением R (рис. 271). Внешняя электродвижущая сила создает между полюсами *1* и *2* определенное напряжение $\mathscr{E}$, вообще говоря, меняющееся с течением времени. Одно из направлений при обходе контура тока примем за положительное. Оно обозначено на рис. 271 стрелками. Ток считается положительным, если он течет по контуру в положительном направлении, и отрицательным в противоположном случае. Обозначим через q заряд той из обкладок конденсатора, направление от которой к другой обкладке совпадает с положительным направлением контура *13421*. Применим к этому контуру уравнение Максвелла

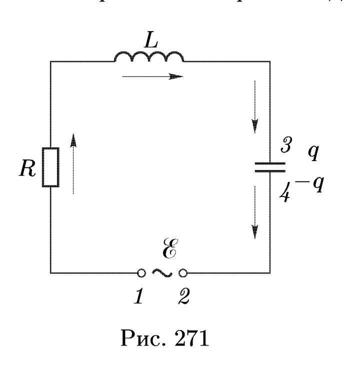


Рис. 271

$$\int E_l\,dl = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{122.1}$$

Мы пользуемся *практическими единицами*, которые при рассмотрении электрических колебаний более удобны. Пусть выполнено условие квазистационарности. Тогда, применяя к участку *13* закон Ома, найдем

$$\int\limits_{13} E_l\,dl = \int \frac{j}{\lambda}\,dl = I\int \frac{dl}{S\lambda} = RI,$$

где R — омическое сопротивление этого участка. Если сопротивление участка *42* пренебрежимо мало, то интеграл по пути *32* равен напряжению V между обкладками конденсатора. Для квазистационарных процессов

$$\int\limits_{32} E_l\,dl = V = \frac{q}{C}.$$

Наконец, интеграл $\int\limits_{21} E_l\,dl = -\int\limits_{12} E_l\,dl$ есть подводимое напряжение между полюсами *1* и *2*, взятое с противоположным знаком:

$$\int\limits_{21} E_l\,dl = -\mathscr{E}.$$

В результате уравнение (122.1) примет вид

$$\frac{d\Phi}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \mathscr{E}. \tag{122.2}$$

Для квазистационарных токов $\Phi = LI$. Кроме того,

$$I = \frac{dq}{dt}, \tag{122.3}$$

так что

$$\frac{d}{dt}\left(L\frac{dq}{dt}\right) + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathscr{E}. \tag{122.4}$$

Это и есть уравнение колебательного контура. Если катушка самоиндукции не деформируется ($L = \text{const}$), оно переходит в

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathscr{E}. \qquad (122.5)$$

Механическим аналогом (122.5) может служить уравнение движения груза на пружине (рис. 272). Если справедлив закон Гука (1635–1703), а при движении груза возникает тормозящая сила $-\alpha\dot{x}$, пропорциональная скорости $\dot{x}$, то уравнение движения имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \alpha\dot{x} + F,$$

или

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\dot{x} + kx = F, \qquad (122.6)$$

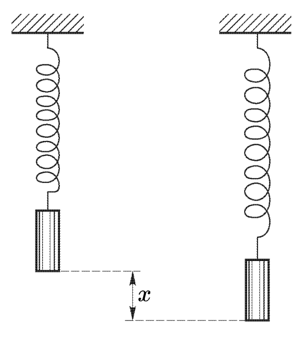


Рис. 272

где x — отклонение груза из положения равновесия, считаемое положительным, если оно направлено вниз. Величина $-kx$ есть *восстанавливающая сила*, равная сумме веса тела и силы натяжения пружины, F — результирующая всех прочих сил, действующих на груз. Это уравнение отличается от (122.5) только обозначениями и физическим смыслом входящих в него величин. Математически оба уравнения тождественны. В уравнении (122.5) роль отклонения x играет заряд конденсатора q; массы m — самоиндукция L; коэффициента сопротивления α — электрическое сопротивление R; коэффициента упругости пружины k — величина, обратная емкости, $1/C$; внешней силы F — внешняя электродвижущая сила $\mathscr{E}$. Одинаковые уравнения должны иметь и одинаковые решения. Заметив это, допустим, что в уравнении (122.6) $F = 0$, а коэффициент сопротивления α мал. Тогда, как хорошо известно из повседневного опыта, при отклонении груза из положения равновесия или сообщении ему толчка в вертикальном направлении возникнут колебания, слабо затухающие во времени. При $\alpha = 0$ затухания совсем не будет. Из математической тождественности уравнений (122.5) и (122.6) следует, что возникнут *электрические колебания*, если заряженный конденсатор замкнуть через катушку самоиндукции. При этом заряд конденсатора q будет меняться во времени по тому же закону, что и отклонение груза из положения равновесия. Если нет омического сопротивления, то электрические колебания в колебательном контуре будут *незатухающими*. При наличии сопротивления R колебания затухают.

3. И без обращения к уравнениям и механической аналогии нетрудно понять, почему в колебательном контуре возникают и поддерживаются электрические колебания. Для простоты будем считать, что электрическое сопротивление колебательного контура равно нулю. Пусть

в начальный момент верхняя пластинка конденсатора заряжена положительным электричеством, нижняя — отрицательным, а ток в колебательном контуре равен нулю (рис. 273 *а*). В этот момент вся энергия колебательного контура сосредоточена в конденсаторе. При отсутствии

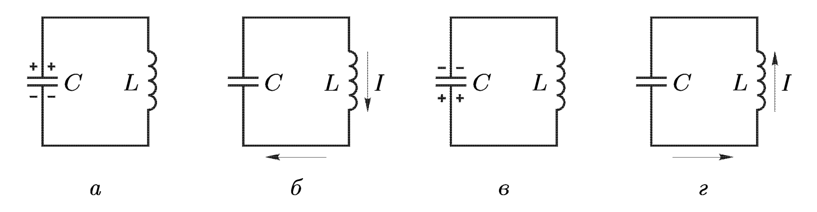


Рис. 273

внешних электродвижущих сил конденсатор начнет разряжаться, через катушку самоиндукции потечет электрический ток. Электрическая энергия конденсатора начнет превращаться в магнитную энергию катушки самоиндукции. Этот процесс закончится, когда заряд конденсатора обратится в нуль, а ток в контуре достигнет максимума (рис. 273 *б*). Начиная с этого момента ток, не меняя направления, начнет убывать. Однако он не сразу упадет до нуля, так как этому препятствует электродвижущая сила индукции. Ток будет заряжать нижнюю пластинку конденсатора положительно, а верхнюю — отрицательно. Возникнет электрическое поле, стремящееся ослабить ток. В конце концов ток обратится в нуль, а заряд на конденсаторе достигнет максимума (рис. 273 *в*). Тогда заряды на пластинках конденсатора по абсолютной величине станут такими же, что и в исходном положении *а*, только знаки их будут противоположными. С этого момента конденсатор начнет разряжаться вновь — по проводам потечет ток в направлении, противоположном направлению тока в положении *б*. В момент максимума тока (рис. 273 *г*) конденсатор разрядится, а затем колебательный контур вернется в исходное состояние *а*. После этого описанный цикл разрядки и зарядки конденсатора повторится снова. И если бы не было потерь энергии, то такое повторение происходило бы неограниченно долго — в контуре совершались бы строго периодические незатухающие электрические колебания.

4. Уравнения (122.5) и (122.6) — *дифференциальные уравнения второго порядка.* Если «внешних сил» $\mathcal{E}$ или F нет, то уравнения *линейны и однородны* относительно неизвестных q или x и их производных по времени. Они описывают так называемые *свободные колебания.* Колебательные системы, свободные колебания которых описываются линейными уравнениями, называются *линейными колебательными системами.* Введем обозначения:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{или} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \tag{122.7}$$

$$2\gamma = \frac{R}{L} \quad \text{или} \quad 2\gamma = \frac{\alpha}{m}, \tag{122.8}$$

$$X = \frac{\mathscr{E}}{C} \quad \text{или} \quad X = \frac{F}{m}. \tag{122.9}$$

Тогда

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = X, \tag{122.10}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = X. \tag{122.11}$$

Величина ω_0 называется *собственной частотой* колебательной системы, а γ — *коэффициентом затухания.* Смысл этих названий выяснится в дальнейшем.

5. Уравнение (122.5) можно переписать в виде

$$V_L + V_R + V_C = V_{\text{вх}},$$

где V_L, V_R, V_C — напряжения на катушке самоиндукции, омическом сопротивлении и конденсаторе, а $V_{\text{вх}}$ — входное напряжение, подводимое к колебательному контуру. Как видно из (122.5), эти величины связаны соотношениями

$$V_R = R\frac{dq}{dt} = CR\frac{dV_C}{dt}, \quad V_L = L\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{L}{R}\frac{dV_R}{dt}.$$

На этих соотношениях основано применение электрических схем для *автоматического дифференцирования* и *интегрирования.* Соответствующие устройства называются *дифференцирующими* и *интегрирующими ячейками.* Допустим, например, что конденсатора в цепи нет. Тогда (122.5) запишется в виде

$$V_L + V_R = V_{\text{вх}},$$

причем $V_L = \dfrac{L}{R}\dfrac{dV_R}{dt}$, т. е. напряжение на самоиндукции с точностью до числового множителя равно производной от напряжения на сопротивлении R. Если параметры L и R подобрать так, чтобы было выполнено условие $|V_L| \ll |V_{\text{вх}}|$, то $V_R \approx V_{\text{вх}}$ и, следовательно, $V_L = \dfrac{L}{R}\dfrac{dV_{\text{вх}}}{dt}$. Подадим на осциллограф напряжение с катушки самоиндукции. Тогда получится осциллограмма, представляющая производную входного напряжения. Аналогичная RL-ячейка может быть использована и для интегрирования. Действительно, $V_R = \dfrac{R}{L}\displaystyle\int V_L\,dt$. Подберем параметры R и L так, чтобы было $|V_R| \ll |V_L|$. Тогда приближенно $V_L = V_{\text{вх}}$ и, следовательно, $V_R = \dfrac{R}{L}\displaystyle\int V_{\text{вх}}\,dt$. Подавая на осциллограф напряжение с сопротивления R, мы получим осциллограмму, представляющую интеграл от входного напряжения. Аналогично действуют дифференцирующие и интегрирующие RC-ячейки.

ЗАДАЧА

Колебательный контур содержит конденсатор с утечкой. Это значит, что небольшая часть тока, поступающего на одну из обкладок конденсатора, проходит через диэлектрик на другую обкладку. Емкость конденсатора равна C, его сопротивление R. Пренебрегая сопротивлением катушки самоиндукции и прочих проводов и предполагая, что выполнено условие квазистационарности, вывести уравнение собственных колебаний колебательного контура.

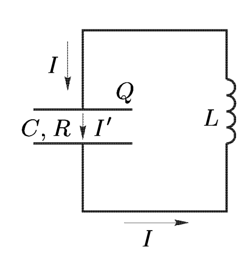


Рис. 274

Найти собственную частоту ω_0 и коэффициент затухания γ.

Решение. При выполнении условия квазистационарности (рис. 274)

$$L\frac{dI}{dt} + V = 0, \quad Q = CV,$$

$$\dot{Q} = I - I', \quad V = RI'.$$

Исключая Q, I и I', отсюда находим

$$\ddot{V} + 2\gamma\dot{V} + \omega_0^2 V = 0, \text{ где } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \ \gamma = \frac{1}{2RC}.$$

§ 123. Свободные колебания гармонического осциллятора

1. Если нет омического сопротивления, то свободные колебания в колебательном контуре описываются уравнением

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \tag{123.1}$$

Уравнением такого же типа описываются свободные незатухающие колебания груза на пружине. Всякая система — механическая, электрическая или какая-либо другая, свободные колебания которой подчиняются уравнению типа (123.1), называется *гармоническим осциллятором.* При наличии силы сопротивления $2\gamma\dot{q}$ система называется *гармоническим осциллятором с затуханием.*

Для решения уравнения (123.1) умножим обе части его на $\dot{q}$. Тогда после небольших преобразований получим

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2\right) = 0.$$

Отсюда следует, что величина $\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2$ не меняется во времени. Так как эта величина есть сумма двух квадратов, то она существенно положительна и может быть представлена в виде

$$\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2 = \omega_0^2 q_0^2,$$

где q_0 — постоянная. Это равенство выражает сохранение энергии, так как его можно записать в виде

$$\frac{1}{2}LI^2 + \frac{q^2}{2C} = \text{const}.$$

Чтобы выполнить второе интегрирование, разделим переменные:

$$\frac{dq}{\sqrt{q_0^2 - q^2}} = \pm\omega_0\,dt.$$

Отсюда

$$\arccos\frac{q}{q_0} = \pm\omega_0 t + \text{const},$$

или

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \delta). \tag{123.2}$$

Постоянные интегрирования q_0 и δ определяются начальными условиями. В качестве таковых можно, например, взять значения заряда q и тока $I = \dot{q}$ в момент времени $t = 0$.

2. Формулой вида (123.2) описываются также свободные колебания груза, подвешенного на пружине, физического или математического маятника при малых отклонениях, ножки звучащего камертона, а также колебания напряжения в цепи городского тока. Если какая-либо величина меняется во времени по закону (123.2), то говорят, что она совершает *гармоническое колебание.* С гармоническими колебаниями механических систем мы подробно ознакомились уже в первом томе, где нас больше всего интересовали периоды свободных колебаний таких систем. Величина ω_0 называется *круговой* или *циклической частотой* гармонического колебания. Она совпадает с собственной круговой частотой колебательной системы, определяемой формулой (122.7). Промежуток времени

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}, \tag{123.3}$$

через который значения колеблющейся величины периодически повторяются, называется *периодом колебания.* Число колебаний в единицу времени

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} \tag{123.4}$$

называется *частотой колебаний.* За единицу частоты принимают *герц.* Герц есть такая частота, когда в одну секунду совершается одно колебание. В дальнейшем прилагательное «круговая» будет часто опускаться. О какой частоте идет речь, будет видно из обозначений. Круговая частота всегда обозначается ω или Ω, просто частота — ν. Величина q_0 называется *амплитудой*, а величина $\omega_0 t + \delta$ — *фазой колебания.* Величину δ называют *начальной фазой.* Собственные частоты ω_0 и ν_0, а также период собственных колебаний T_0 зависят только от *устройства* колебательной системы. Напротив, амплитуда q_0 и начальная фаза δ определяются не самой колебательной системой, а *начальными условиями.*

Для электрических колебаний собственная частота определяется формулой (122.7). Поэтому

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}. \tag{123.5}$$

Эта формула называется *формулой Вильяма Томсона.*

Если по оси абсцисс откладывать время, а по оси ординат — значение колеблющейся величины q, то получится *синусоида* (рис. 275). Это — периодическая кривая, значения ее ординат периодически повторяются через период T_0. Амплитуда q_0 есть максимальное отклонение величины q от ее нулевого значения.

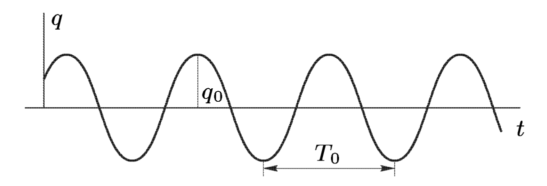


Рис. 275

Ток при электрических колебаниях найдется дифференцированием выражения (123.2):

$$I = \dot{q} = -\omega_0 q_0 \sin(\omega_0 t + \delta),$$

или

$$I = \omega_0 q_0 \cos(\omega_0 t + \delta + \pi/2).$$

Отсюда видно, что колебания тока I опережают по фазе колебания заряда q на $\pi/2$. Электрическая и магнитная энергии определяются выражениями

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t + \delta),$$

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}L\omega_0^2 q^2 \sin^2(\omega_0 t + \delta) = \frac{q_0^2}{2C}\sin^2(\omega_0 t + \delta).$$

Представим их в виде

$$W_e = \frac{q_0^2}{4C} + \frac{q_0^2}{4C}\cos(2\omega_0 t + \delta),$$

$$W_m = \frac{q_0^2}{4C} - \frac{q_0^2}{4C}\cos(2\omega_0 t + \delta).$$

Средние значения этих величин одинаковы и равны

$$\overline{W}_e = \overline{W}_m = \frac{q_0^2}{4C} = \frac{1}{4}LI_0^2.$$

Около этих средних значений величины W_e и W_m совершают гармонические колебания с круговой частотой $2\omega_0$. Непрерывно происходит переход электрической энергии в магнитную и обратно. Когда электрическая энергия достигает максимума, магнитная обращается в нуль, и наоборот. Полная энергия

$$W = W_e + W_m = \frac{q_0^2}{2C} \qquad (123.6)$$

остается постоянной, как и должно быть по закону сохранения энергии. Она, как видно из формулы (123.6), пропорциональна *квадрату амплитуды*. Это справедливо и для механических гармонических колебаний.

3. В заключение точно сформулируем *условие квазистационарности*, выполнение которого предполагалось при рассмотрении всех колебаний в колебательном контуре. Квазистационарность означает,

что мгновенные значения тока I практически одинаковы на всех участках проводов, соединяющих обкладки конденсатора. Для этого все изменения во времени должны происходить настолько медленно, чтобы распространение электродинамических взаимодействий можно было считать *мгновенным.* Такие взаимодействия распространяются со скоростью, которая по порядку величины совпадает со скоростью света в вакууме c. Обозначим через l длину провода, соединяющего обкладки конденсатора (практически эта величина совпадает с длиной провода, из которого изготовлена обмотка катушки самоиндукции). На прохождение длины l электромагнитное возмущение затрачивает время порядка $\tau = l/c$. Условие квазистационарности будет выполнено, если $\tau \ll T_0$ или

$$l \ll \lambda, \tag{123.7}$$

где λ — длина электромагнитной волны в вакууме:

$$\lambda = cT_0. \tag{123.8}$$

ЗАДАЧА

Полностью ионизованная плазма, состоящая из электронов и положительных ионов, ограничена двумя параллельными плоскостями (рис. 268). Если все электроны сместить вдоль оси X(выбранной перпендикулярно к этим плоскостям), то возникнет сила, возвращающая их в положение равновесия. В плазме начнутся колебания. Они называются *плазменными колебаниями.* Определить их характер и собственную частоту. «Тяжелые» ионы можно считать неподвижными.

Решение. Если смещение электрона из положения равновесия равно x, то электрическое поле, возникающее в плазме, будет $E = 4\pi nex$, а сила, действующая на электрон, $F = -4\pi ne^2x$. Под действием этой силы электроны будут совершать гармонические колебания с круговой частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi ne^2}{m}}, \tag{123.9}$$

называемой *плазменной частотой.*

§ 124. Затухающие колебания

Учтем теперь тормозящие силы. Полагая в уравнении (122.10) $X = 0$, получим уравнение свободных колебаний

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \tag{124.1}$$

Для его решения введем новую переменную ξ, полагая

$$q = \xi e^{-\gamma t}. \tag{124.2}$$

Тогда

$$\ddot{\xi} + (\omega_0^2 - \gamma^2)\xi = 0. \tag{124.3}$$

Формально это уравнение совпадает с дифференциальным уравнением свободных незатухающих колебаний (123.1). Однако коэффициент

$\omega_0^2 - \gamma^2$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Надо различать три случая.

Случай 1. $\omega_0^2 - \gamma^2 > 0$. Введем обозначение

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2. \tag{124.4}$$

Тогда

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0.$$

Отсюда следует, что величина ξ должна совершать незатухающие гармонические колебания с круговой частотой ω:

$$\xi = a\cos(\omega t + \delta).$$

Следовательно,

$$q = ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \delta). \tag{124.5}$$

Кривая $q = q(t)$, представляемая этой формулой (рис. 276), *не периодична.* Однако величина q периодически проходит через нуль и бесконечное число раз достигает максимума и минимума. В этом смысле процессы, описываемые формулой (124.5), являются колебательными. Они называются *затухающими колебаниями.* Промежуток времени между двумя последовательными прохождениями величины q через нуль равен π/ω. Удвоенное его значение

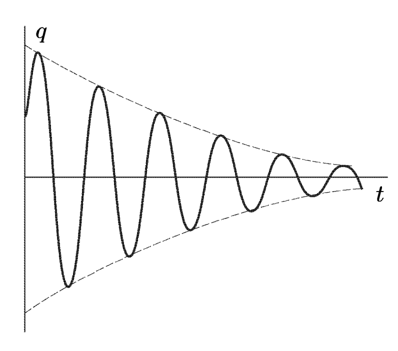


Рис. 276

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (\gamma/\omega_0)^2}} \tag{124.6}$$

называется *периодом колебаний*, хотя слово «период» здесь не совсем уместно, так как процесс не периодический. Из формулы (124.6) видно, что $T > T_0$, т. е. тормозящие силы понижают частоту колебаний и удлиняют их период. Приравнивая нулю производную $\dot{q}$, легко убедиться, что период T есть также время между двумя последовательными прохождениями величины q через максимум или минимум. Множитель

$$A = ae^{-\gamma t}, \tag{124.7}$$

стоящий перед периодической функцией $\cos(\omega t + \delta)$ в формуле (124.5), называется *амплитудой затухающих колебаний.* Она экспоненциально убывает во времени. Время

$$\tau = 1/\gamma, \tag{124.8}$$

по истечении которого амплитуда A убывает в e раз, называется *временем затухания.* Число полных колебаний, совершаемое за время τ, равно

$$N = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\gamma T}. \tag{124.9}$$

Отношение амплитуд в моменты последовательных прохождений колеблющейся величины через максимумы или минимумы равно $A_1/A_2 = e^{\gamma T}$. Логарифм этого отношения

$$d = \ln \frac{A_1}{A_2} = \gamma T \tag{124.10}$$

называется *логарифмическим декрементом колебания.* Он связан с числом колебаний N соотношением

$$N = 1/d. \tag{124.11}$$

Величина

$$Q = \pi N = \pi/d \tag{124.12}$$

называется *добротностью* колебательного контура. Физический смысл этой величины будет установлен ниже (см. § 127).

Постоянные интегрирования a и δ определяются начальными условиями. Допустим, например, что в начальный момент $q = 0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$, где $\dot{q}_0$ — известная постоянная. Полагая в выражении (124.5) $t = 0$, получим $\cos\delta = 0$, и, следовательно, $\delta = \pm\pi/2 + 2n\pi$, $q = \pm a e^{-\gamma t} \sin\omega t$. Без потери общности двойной знак можно опустить и написать

$$q = a e^{-\gamma t} \sin\omega t,$$

так как постоянную интегрирования можно обозначить и через $+a$, и через $-a$. Отсюда

$$\dot{q} = (\omega\cos\omega t - \gamma\sin\omega t) a e^{-\gamma t}.$$

Подставляя сюда $t = 0$, получим $\dot{q}_0 = \omega a$,

$$q = \frac{\dot{q}_0}{\omega}\, e^{-\gamma t} \sin\omega t. \tag{124.13}$$

С л у ч а й 2. $\omega_0^2 - \gamma^2 = 0$. Это предельный случай предыдущего, когда период T обращается в бесконечность. Уравнение (124.3) переходит в $\ddot{\xi} = 0$, и, следовательно,

$$q = (a + bt)e^{-\gamma t}. \tag{124.14}$$

В зависимости от значений постоянных интегрирования a и b величина q будет или не будет проходить через максимум (один раз). На рис. 277 изображены два случая: 1) $a \neq 0$, $b = 0$ и 2) $a = 0$, $b \neq 0$. При любых a и b величина q асимптотически приближается к нулю, когда $t \to \infty$. Процесс не будет колебательным. Он называется *апериодическим.*

Если в начальный момент $q_0 = 0$, то $a = 0$,

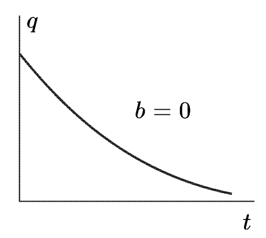
$$q = bte^{-\gamma t}, \quad \dot{q} = (1 - \gamma t) b e^{-\gamma t}.$$

Полагая $t = 0$, находим $b = \dot{q}_0$. Следовательно,

$$q = \dot{q}_0 t e^{-\gamma t}. \tag{124.15}$$

С л у ч а й 3. $\omega_0^2 - \gamma^2 < 0$. Общее решение уравнения (124.3) будет

$$\xi = C_1 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\,t} + C_2 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\,t},$$



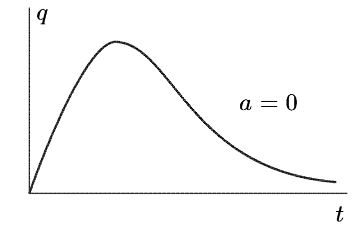


Рис. 277

а уравнения (124.1) —

$$q = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}. \qquad (124.16)$$

Через α_1 и α_2 обозначены положительные постоянные:

$$\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \qquad (124.17)$$

Если в начальный момент $q_0 = 0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$, то

$$q = \frac{\dot{q}_0}{\alpha_1 - \alpha_2}\left(e^{-\alpha_2 t} - e^{-\alpha_1 t}\right) = \frac{\dot{q}_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}\left(e^{-\alpha_2 t} - e^{-\alpha_1 t}\right). \qquad (124.18)$$

§ 125. Баллистический гальванометр

Баллистический гальванометр предназначен для измерения количества электричества, проходящего через цепь при кратковременных импульсах тока. Подвижной частью прибора является прямоугольная рамка с обмоткой из тонкой изолированной проволоки, подвешенная на нити между полюсами магнита, где она может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси. Возвращающий момент, стремящийся вернуть рамку в положение равновесия, создается закрученной нитью и пропорционален угловому отклонению φ. Момент инерции рамки Θ выбирают большим, чтобы период собственных колебаний ее был не меньше 10 с. При колебаниях в обмотке рамки возбуждается индукционный ток, тормозящий движение последней. Тормозящий момент должен быть пропорционален угловой скорости $\dot{\varphi}$. Для достижения этого полюсным наконечникам придают такую форму, чтобы они оканчивались цилиндрическими поверхностями, а между самими полюсами помещают цилиндр из мягкого железа (рис. 278, вид сверху, рамка не показана). При таком устройстве магнитные силовые линии в зазоре между полюсами магнита и цилиндром, где совершаются крутильные колебания рамки, практически радиальны. Вертикальные стороны рамки пересекают магнитные силовые линии, оставаясь все время перпендикулярными к ним. Вследствие этого возникающая электродвижущая сила и обусловленный ею тормозящий

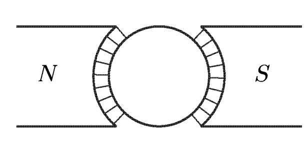


Рис. 278

момент оказываются пропорциональными угловой скорости $\dot{\varphi}$. Тормозящий момент, обусловленный сопротивлением воздуха, также пропорционален $\dot{\varphi}$. Поэтому крутильные колебания рамки гальванометра будут описываться дифференциальным уравнением того же типа, что и затухающие колебания, рассмотренные в предыдущем параграфе.

Допустим, что через гальванометр проходит кратковременный импульс тока I, длительность которого τ много меньше периода собственных колебаний рамки T. Во время прохождения такого импульса можно пренебречь всеми силами, за исключением амперовых сил, действующих на рамку со стороны внешнего магнитного поля. Эти силы создают вращающий момент, пропорциональный току I, так что уравнение движения рамки может быть записано в виде $\Theta\ddot{\varphi} = kI$, где k — постоянная. Интегрируя по времени прохождения импульса, найдем угловую скорость рамки, которую она приобретет за это время:

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{k}{\Theta}\int I\,dt = \frac{k}{\Theta}\,q,$$

где q — количество прошедшего электричества. За то же время массивная рамка не успеет заметно сместиться. Импульс тока действует на рамку аналогично удару молотка по массивному шару. Пренебрегая временем τ, движение рамки гальванометра можно рассматривать как свободное затухающее колебание при начальных условиях $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = kq/\Theta$. Такая задача была решена в предыдущем параграфе. Было показано, что амплитуда, а с ней и максимальное отклонение $\varphi_{\text{макс}}$ (отброс гальванометра) пропорциональны $\dot{\varphi}_0$ независимо от того, будет ли режим колебательным или апериодическим. Таким образом, отброс гальванометра связан с количеством прошедшего электричества соотношением

$$q = B\varphi_{\text{макс}}, \tag{125.1}$$

где B — постоянная, называемая *баллистической постоянной гальванометра.* Она измеряется экспериментально. Для этого достаточно разрядить через гальванометр конденсатор известной емкости, заряженный до определенного потенциала, и измерить отброс гальванометра. После такой градуировки формулой (125.1) можно пользоваться для количественных измерений.

§ 126. Векторная диаграмма и комплексные обозначения

1. Существует наглядный геометрический способ представления гармонических колебаний, о котором уже говорилось в первом томе. Допустим, что геометрическая точка M равномерно вращается по окружности радиуса r (рис. 279) с угловой скоростью ω_0. Положение точки на окружности можно задать центральным углом φ между радиусом OM и положительным направлением оси X. Он равен $\varphi = \omega_0 t + \delta$, где δ — значение угла φ в начальный момент $t = 0$. При вращении точки M ее проекция N на ось X движется по диаметру AB

туда и обратно, совершая колебания между точками A и B с периодом $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Абсцисса точки N

$$x = a\cos\varphi = a\cos(\omega_0 t + \delta), \tag{126.1}$$

как и сама точка N, совершает незатухающее гармоническое колебание. Этим способом можно представлять гармонические колебания любых

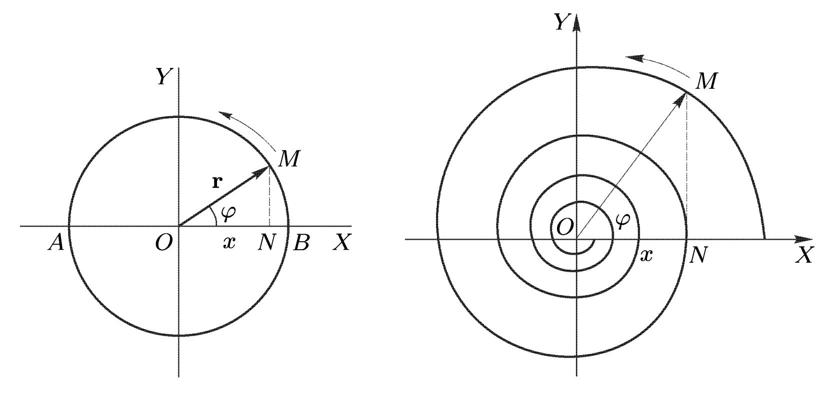


Рис. 279 Рис. 280

величин. Надо только условиться изображать колеблющуюся величину абсциссой точки M, равномерно вращающейся по окружности. Вместо абсциссы можно, конечно, брать ординату $y = a\sin(\omega_0 t + \delta) = a\cos[\omega_0 t + (\delta - \pi/2)]$, но во избежание недоразумений условимся всюду пользоваться абсциссой.

Для представления затухающих колебаний вместо окружности надо взять логарифмическую спираль, асимптотически приближающуюся к фокусу O (рис. 280). Если точка M движется по спирали с постоянной угловой скоростью ω_0, приближаясь к фокусу, то ее проекция N на ось X будет совершать затухающее гармоническое колебание.

2. Вместо точки M можно взять радиус-вектор $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$, равномерно вращающийся вокруг начала координат O. Гармонически колеблющаяся величина изобразится проекцией x этого радиуса-вектора на ось X. При этом во многих задачах оказывается удобным математические операции над величиной x заменить соответствующими операциями над самим радиусом-вектором $\mathbf{r}$. Например, если нужно вычислить сумму слагаемых

$$x_1 = a_1 e^{-\gamma_1 t}\cos(\omega_1 t + \delta_1), \quad x_2 = a_2 e^{-\gamma_2 t}\cos(\omega_2 t + \delta_2),$$

то можно сначала сложить по правилу параллелограмма векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, проекциями которых являются эти слагаемые, а затем спроецировать полученный вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ на ось абсцисс. Результат этих операций, очевидно, будет равен $x = x_1 + x_2$. Операция проецирования производится в самом конце вычисления. При известном навыке можно совсем отвлечься от проекций, а изображать колеблющуюся величину

непосредственно самим вектором **r**, равномерно вращающимся вокруг своего начала. Его проецирование на ось X *подразумевается, но не выполняется фактически.* Такой метод называется *методом векторных диаграмм.* Рисунок 279 можно поэтому назвать *векторной диаграммой незатухающего*, а рис. 280 — *затухающего гармонического колебания.* Метод векторных диаграмм широко применяется в электротехнике при изучении переменных токов.

3. В физике более широкое распространение получил другой метод, отличающийся от метода векторных диаграмм только по форме. В этом методе колеблющаяся величина представляется *комплексным числом.* Положение точки на плоскости (рис. 279) можно однозначно задать комплексным числом $z = x + iy$. Если точка M вращается, то

$$x = a\cos(\omega_0 t + \delta), \quad y = a\sin(\omega_0 t + \delta).$$

Поэтому, используя известную формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

величину z можно представить в виде

$$z = ae^{i(\omega_0 t + \delta)}.$$

Вещественная часть этого выражения

$$\mathrm{Re}\,(z) = a\cos(\omega_0 t + \delta) = x$$

представляет гармонические колебания величины x. Условимся опускать знак взятия вещественной части Re и писать просто

$$x = ae^{i(\omega_0 t + \delta)}. \tag{126.2}$$

Это символическое равенство не следует понимать буквально. Его надо понимать в том смысле, что физическая величина x равна *вещественной части* комплексного выражения, стоящего в этом равенстве справа. Модуль этого комплексного выражения a равен амплитуде колебания, а его аргумент $\omega_0 t + \delta$ — фазе. Можно формально упростить запись (126.2). Введем комплексную величину $A = ae^{i\delta}$, называемую *комплексной амплитудой колебания.* Тогда

$$x = Ae^{i\omega_0 t}. \tag{126.3}$$

Комплексность амплитуды A означает, следовательно, что колебание происходит с *начальной фазой*, отличной от нуля.

Наконец, можно формально рассматривать выражения типа (126.3) при комплексных значениях величины ω_0. Для раскрытия физического смысла таких выражений полагаем $\omega_0 = \omega_1 + i\omega_2$. Тогда

$$x = Ae^{i(\omega_1 + i\omega_2)t} = ae^{-\omega_2 t}e^{i(\omega_1 t + \delta)} = ae^{-\omega_2 t}\cos(\omega_1 t + \delta).$$

Если $\omega_2 > 0$, то это выражение представляет *затухающее гармоническое колебание* с круговой частотой ω_1 и показателем затухания ω_2. Если $\omega_2 < 0$, то получится *колебание с неограниченно нарастающей амплитудой.* Таким образом, если частота комплексна, то это означает,

что амплитуда колебания *экспоненциально затухает или нарастает во времени.*

Очень важно научиться понимать физический смысл уравнений, записанных в комплексной форме, не переходя к вещественной форме записи. Комплексная форма позволяет часто избежать громоздкости формул и делает сами формулы более общими и легче обозримыми. Особенно широко комплексная форма применяется при изучении распространения волн.

4. Над комплексными величинами можно производить многие математические операции, как если бы эти величины были вещественными. Так можно поступать не всегда. Это можно делать только тогда, когда операции *вещественны и линейны.* К ним относятся, например, сложение, вычитание, умножение и деление на вещественное число, дифференцирование и интегрирование по вещественной переменной и пр. Вообще, операция L называется *линейной*, если результат действия ее на величину $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2$ представляется в виде

$$L(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = \alpha_1 L(z_1) + \alpha_2 L(z_2), \qquad (126.4)$$

где z_1 и z_2 — какие угодно (вообще говоря, комплексные) величины, а α_1 и α_2 — любые постоянные. При этом в физике нас, в конце концов, интересуют лишь *вещественные операции*, т. е. такие, результаты действия которых на *вещественные величины* сами *вещественны.*

Комплексные выражения сами по себе не соответствуют никаким физическим величинам. Последние всегда вещественны и только из соображений удобства иногда представляются вещественными частями комплексных выражений. И математические операции в физике должны, в конце концов, определяться как операции над вещественными физическими величинами. Допустим, однако, что над вещественной величиной x надо выполнить линейную вещественную операцию L. Результат будет $L(x)$. Но тот же результат можно получить иначе. Возьмем комплексную величину $x + iy$ и применим к ней операцию L. Получим

$$L(x + iy) = L(x) + iL(y).$$

Отбросив мнимую часть, снова найдем $L(x)$. Если вычисление по второму методу окажется проще, то его применение оправдано.

Например, вместо того, чтобы дифференцировать по t функцию $x = a\cos(\omega_0 t + \delta)$, можно продифференцировать по тому же аргументу комплексное выражение (126.2) или (126.3), а затем взять вещественную часть результата. В обоих случаях получится одно и то же.

Но было бы грубой ошибкой переносить этот прием на *нелинейные операции.* Пусть, например, требуется возвести в квадрат вещественную величину x. Правильный результат будет x^2. Попробуем, однако, формально применить комплексный метод. Заменим x на $x + iy$ и возведем в квадрат, получим $(x^2 - y^2) + i2xy$. Вещественная часть этого выражения равна $x^2 - y^2$. Она зависит не только от вещественной части выражения $x + iy$, но и от мнимой. Ошибка получилась потому, что возведение в квадрат — нелинейная операция.

§ 127. Вынужденные колебания затухающего осциллятора под действием синусоидальной силы

1. Вынужденные колебания затухающего осциллятора описываются уравнением

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = X(t), \tag{127.1}$$

где $X(t)$ — внешняя действующая сила, точнее, электродвижущая сила, деленная на индуктивность катушки самоиндукции, или (в случае механических колебаний) сила, деленная на массу колеблющегося тела. Уравнение (127.1) *линейно*, т. е. первой степени относительно неизвестного q и его производных по времени. Оно *неоднородно*, т. е. содержит правую часть $X(t)$. Для линейных однородных уравнений (т. е. уравнений без правой части) справедлив *принцип суперпозиции*, согласно которому сумма любых двух решений уравнения есть также решение того же уравнения. Для линейных неоднородных уравнений это несправедливо. Однако здесь имеет место суперпозиция решений *в другом смысле.* Пусть правая часть в уравнении (127.1) представляется в виде суммы $X = \sum X_i(t)$, а $q_i(t)$ — решение уравнения (127.1), в котором правая часть заменена на $X_i(t)$. Тогда сумма $q = \sum q_i(t)$ будет решением уравнения (127.1) с правой частью $X = \sum X_i(t)$. Для теории колебаний отмеченное свойство линейных уравнений имеет большое значение. Оно позволяет общую задачу о вынужденных колебаниях под действием *произвольно меняющейся силы* свести к частной задаче о вынужденных колебаниях под действием *синусоидальной силы.* Дело в том, что согласно известной математической *теореме Фурье* всякая функция $X(t)$ довольно общего вида может быть представлена в виде суммы синусоидальных функций (см. § 128).

Покажем теперь, как связаны между собой решения неоднородного и соответствующего ему однородного уравнений. Пусть $\overline{q}(t)$ — любое частное решение неоднородного уравнения (127.1). Тогда $\ddot{\overline{q}} + 2\gamma\dot{\overline{q}} + \omega_0^2\overline{q} = X(t)$. Вычитая это соотношение из (127.1) и вводя обозначение $Q = q - \overline{q}$, получим $\ddot{Q} + 2\gamma\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0$. Отсюда видно, что Q есть решение однородного уравнения. Таким образом, $q = \overline{q} + Q$, т. е. *общее решение неоднородного уравнения* (127.1) *может быть представлено в виде суммы частного решения того же уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения.*

2. После этих предварительных замечаний обратимся к задаче о колебаниях затухающего осциллятора при наличии внешней силы. Сначала исследуем частный случай, когда сила X меняется синусоидально, т. е. представляется выражением

$$X = X_0 \cos\omega t, \tag{127.2}$$

где X_0 и ω — постоянные. Задача сводится к решению уравнения

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = X_0 \cos\omega t. \tag{127.3}$$

Среди частных решений этого уравнения есть такое, которое меняется во времени *синусоидально с частотой внешней возбуждающей силы* ω. Будем искать его в комплексной форме, что можно делать, так как все математические операции, с которыми придется иметь дело, линейны и вещественны. Заменим правую часть уравнения (127.3) на комплексную величину $X_0 e^{i\omega t}$, т. е. напишем

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = X \equiv X_0 e^{i\omega t}. \qquad (127.4)$$

Частное решение последнего уравнения ищем в виде $q = q_0 e^{i\omega t}$, откуда $\dot{q} = i\omega q$, $\ddot{q} = -\omega^2 q$. Подстановкой в уравнение (127.4) получаем

$$q = \frac{X}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}\, e^{i\omega t}. \qquad (127.5)$$

Это частное решение описывает так называемые *вынужденные колебания осциллятора.* Они происходят с частотой внешней возбуждающей силы ω. Добавив к частному решению (127.5) общее решение соответствующего однородного уравнения, получим

$$q = \frac{X_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}\, e^{i\omega t} + e^{-\gamma t}(C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t). \qquad (127.6)$$

Добавленное слагаемое описывает *свободные колебания* осциллятора. Выбором произвольных постоянных C_1 и C_2 можно удовлетворить любым начальным условиям. Однако, каковы бы ни были эти условия, свободные колебания всегда *экспоненциально затухают*, причем за время $\tau = 1/\gamma$ амплитуда свободных колебаний убывает в e раз. Процесс затухания свободных колебаний называется *установлением колебаний*, а время τ — *временем затухания* или *временем установления.* Если $t \gg \tau$, то свободные колебания практически совсем затухнут. Останутся одни только вынужденные колебания, *совершенно не зависящие от начальных условий.* Исследованием таких колебаний мы прежде всего и займемся.

3. Конечно, решение (127.5) лишь символически представляет вынужденное колебание. В нем должна быть оставлена *только вещественная часть.* Для нахождения последней введем обозначение

$$\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma = \rho e^{i\delta}, \qquad (127.7)$$

где ρ и δ — величины вещественные. Тогда $q = (X_0/\rho)e^{i(\omega t - \delta)}$, или в вещественной форме

$$q = a\cos(\omega t - \delta). \qquad (127.8)$$

Величины ρ и δ найдем, приравнивая вещественные и мнимые части в соотношении (127.7). Таким путем получаем

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \rho\cos\delta, \quad 2\omega\gamma = \rho\sin\delta,$$

откуда

$$a = \frac{X}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}}, \tag{127.9}$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{127.10}$$

Таким образом, *вынужденное колебание будет гармоническим, амплитуда и фаза которого определяются формулами* (127.9) и (127.10).

Формулы (127.9) и (127.10) можно получить также с помощью векторной диаграммы. Это будет сделано в § 129 на примере переменных токов, где соотношения совершенно аналогичны.

4. Исследуем сначала поведение *амплитуды* вынужденных колебаний в зависимости от частоты ω. Электрические и механические колебания будем рассматривать совместно, называя величину q либо *зарядом конденсатора*, либо *смещением колеблющегося тела из положения равновесия.* Оставляя амплитуду силы X_0 неизменной, будем менять ее частоту ω. При $\omega = 0$ получаем *статическое отклонение* под действием постоянной силы X_0: $a_0 = X_0/\omega_0$. При возрастании частоты ω амплитуда смещения a сначала также возрастает, затем проходит через максимум и, наконец, асимптотически стремится к нулю (рис. 281). Приравнивая нулю производную $da/d\omega$, убеждаемся, что амплитуда смещения (заряда) a достигает максимума при $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$. Максимумы амплитуды скорости (тока) ωa и амплитуды ускорения (напряжения $L\ddot{q}$) $\omega^2 a$ достигаются соответственно при $\omega = \omega_0$ и $\omega = \omega_0^2/\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

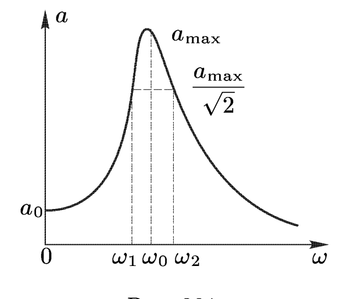


Рис. 281

Найдем еще частоту, при которой максимальна средняя мощность, развиваемая силой X. Мощность выражается произведением силы X на скорость $\dot{q}$, т. е. равна $P = X\dot{q}$. Так как произведение гармонически колеблющихся величин X и $\dot{q}$ — нелинейная операция, то надо пользоваться вещественной формой представления колебаний, т. е. формулами (127.2) и (127.8). Из них получаем

$$P = -\omega a X_0 \cos\omega t \sin(\omega t - \delta) = \frac{\omega a X_0}{2}[\sin\delta - \sin(2\omega t - \delta)].$$

Второе слагаемое в квадратных скобках синусоидально меняется во времени с частотой 2ω. Его среднее значение по времени равно нулю. На величину средней мощности оно не влияет. Последняя определяется только первым слагаемым и равна ${}^1/{}_2 X_0 \omega a \sin\delta$. Она достигает максимума при той же частоте, что и амплитуда скорости ωa, т. е. при частоте $\omega = \omega_0$.

В наиболее важном случае, когда *затухание невелико*, положения всех максимумов *почти не отличаются* друг от друга. Поэтому за максимум амплитуды смещения можно принять ее значение при $\omega = \omega_0$, т. е.

$$a_{\text{макс}} = \frac{X_0}{2\omega_0\gamma} = \frac{\omega_0}{2\gamma}\,a_0. \tag{127.11}$$

Отношение максимального значения амплитуды $a_{\text{макс}}$ к статическому отклонению a_0 называется *добротностью осциллятора* или *колебательного контура.* Обозначая добротность через Q, имеем

$$\frac{a_{\text{макс}}}{a_0} \equiv Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\pi}{d}, \tag{127.12}$$

где d — логарифмический декремент.

Кривая, изображающая зависимость амплитуды колебаний a от частоты внешней возбуждающей силы ω, называется *резонансной кривой* (см. рис. 281). Одной из характеристик резонансной кривой может служить значение амплитуды в максимуме $a_{\text{макс}}$. Другой важной характеристикой является *ширина резонансной кривой.* Пусть ω_1 и ω_2 — значения частоты ω, при которых энергия колебаний вдвое меньше энергии в максимуме. Тогда

$$(\omega_1^2 - \omega_0^2)^2 = 4\omega_1^2\gamma^2, \quad (\omega_2^2 - \omega_0^2)^2 = 4\omega_2^2\gamma^2.$$

Если $|\omega_1 - \omega_0| \ll \omega_0$, $|\omega_2 - \omega_0| \ll \omega_0$, то отсюда получаем приближенно

$$\Delta\omega \equiv \omega_2 - \omega_1 = 2\gamma = \omega_0/Q. \tag{127.13}$$

Величина $\Delta\omega$ и называется *шириной* (или *полушириной*) резонансной кривой. Мы видим, что чем больше добротность осциллятора, тем у́же резонансная кривая. Далее, из формул (127.11) и (127.13) получаем

$$\Delta\omega \cdot a_{\text{макс}} = \omega_0 a_0. \tag{127.14}$$

Чем больше максимум резонансной кривой, тем он острее, т. е. тем у́же резонансная кривая.

5. Итак, наиболее интенсивные колебания будут наблюдаться при частоте $\omega = \omega_0$. Явление возбуждения сильных колебаний при частоте внешней возбуждающей силы, равной или близкой собственной частоте колебательной системы, называется *резонансом.* Физическая причина этого явления предельно проста. Ее лучше всего пояснить не на примере синусоидально меняющейся силы, а на примере силы, состоящей из одинаковых кратковременных *толчков*, следующих друг за другом через одинаковые промежутки времени. Между двумя последовательными толчками система движется *свободно.* При каждом толчке скорость $\dot{q}$ скачкообразно получает приращение $\Delta\dot{q}$. Если толчки следуют друг за другом через промежутки времени, равные периоду собственных колебаний системы, то каждый новый толчок вызывает приращение скорости *того же знака и величины*, что и предыдущий толчок: *толчки усиливают друг друга.* В этом случае энергия, вкладываемая в систему, *максимальна.* Амплитуда колебаний будет нарастать

до тех пор, пока возросшие силы трения в среднем за период колебаний не компенсируют действие каждого нового толчка. Тогда установятся наиболее интенсивные колебания, характеризующиеся *максимумом амплитуды скорости* и *максимальной энергией.* Это и есть *резонанс.* Синусоидально меняющаяся сила также может рассматриваться как последовательность одинаковых толчков. Только теперь толчки *не мгновенные, а длительные* и непрерывно примыкают друг к другу. Но это обстоятельство в приведенном объяснении не играет принципиальной роли. Естественно, что в случае толчков конечной длительности появляется зависимость формы резонансной кривой от *формы толчка.* Толчки синусоидальной формы характеризуются тем, что для них на резонансной кривой имеется *только один максимум* при $\omega = \omega_0$. Для толчков другой формы может быть и не так. Например, в разобранном выше случае последовательности мгновенных толчков максимум амплитуды появляется не только при основной частоте $\omega = \omega_0$, но и при меньших частотах $\omega_0/2$, $\omega_0/3$, ... При таких частотах толчки следуют один за другим реже. Однако они по-прежнему усиливают друг друга, а это есть основное условие резонанса. На резонансной кривой появляются новые максимумы, хотя и менее интенсивные, чем максимум при основной частоте.

6. Явление резонанса удобно демонстрировать на камертонах, так как они отличаются высокими добротностями. Возьмем два камертона с одинаковыми собственными частотами и установим их на резонансных ящиках (рис. 282). Заставим звучать один камертон. Излучаемые им звуковые волны будут периодически воздействовать на второй камертон. Так как частоты совпадают, то наступает резонанс — второй камертон начинает колебаться и звучать. В этом можно убедиться, заглушив рукой колебания первого камертона. Тогда отчетливо слышен звук второго камертона. Для демонстрации в большой аудитории рядом с ножкой второго камертона можно подвесить на нити маленький шарик. Он отскакивает в сторону под действием ударов ножки камертона. Наденем теперь на ножку одного из камертонов небольшой грузик. Это поведет к «расстройке» камертонов — их собственные частоты перестанут совпадать. Если повторить опыт, то второй камертон уже не будет отзываться на звучание первого камертона. Этот опыт показывает, что уже ничтожная расстройка нарушает условие резонанса. Вместе с тем он позволяет судить, насколько велика добротность камертона как колебательной системы.

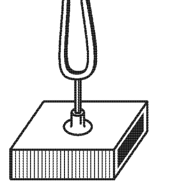
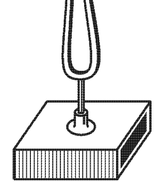



Рис. 282

7. Электрическим аналогом описанного опыта может служить опыт с высокочастотными колебательными контурами. Берется генератор высокочастотных колебаний с частотой в несколько мегагерц. Емкостью колебательного контура генератора служит конденсатор переменной емкости. Последнюю можно менять поворотом специальной ручки.

Возле генератора помещается второй такой же колебательный контур, в который включена электрическая лампочка от карманного фонарика. Роль резонансных ящиков выполняют металлические стержни, привинченные к пластинам конденсаторов и установленные параллельно друг другу. Этим между колебательными контурами устанавливается емкостная связь: электрические заряды одного стержня индуцируют заряды на другом стержне. Когда работает генератор, в его колебательном контуре текут токи высокой частоты, возбуждающие токи во втором колебательном контуре, содержащем лампочку накаливания. Если собственные частоты колебательных контуров различаются сильно, то лампочка не горит. Можно увеличить накал лампы генератора и тем самым увеличить амплитуду генерируемых им колебаний. Однако лампочка все равно не загорится. Но если плавно менять емкость конденсатора в одном из колебательных контуров, то в определенный момент лампочка накаливания ярко вспыхивает. Это происходит при резонансе, когда собственные частоты обоих контуров совпадают или почти совпадают между собой.

На этом примере видна польза явления резонанса. Вся техника радиоприема основана на резонансе. Для того чтобы радиоприемник «принимал радиостанцию», необходимо его «настроить», т. е. добиться совпадения собственной частоты колебательного контура радиоприемника с частотой электромагнитных волн, излучаемых работающей радиостанцией. Формула (127.12) показывает, что *чувствительность радиоприемника тем выше, чем выше добротность его колебательного контура. Чувствительность радиоприемника и полоса частот, которые он способен принимать, обратно пропорциональны друг другу и связаны между собой соотношением* (127.14). *При большой чувствительности радиоприемник способен принимать только очень узкую область частот. Чем выше чувствительность приемника, тем меньше мешают приему другие радиостанции, работающие на близких частотах.* Приемник бесконечно высокой чувствительности принимал бы только волны вполне определенной частоты, на которую он настроен. Все эти закономерности относятся не только к радиоприемнику. Они носят *общий характер* и справедливы для любых осцилляторов независимо от физической природы совершающихся колебаний.

8. Но явление резонанса может быть и вредным, и тогда с ним приходится бороться. Пятикратный и даже десятикратный запас прочности, предусматриваемый при статических расчетах механических систем, может оказаться недостаточным, если системы подвергаются действию периодических, хотя и относительно слабых сил. Так, во всех армиях мира принято правило подавать команду «вольно», когда отряд пехоты или кавалерии проходит по мосту. При прохождении «в ногу» с отбиванием шага периодические толчки, которым подвергается мост, могут попасть в такт с собственными колебаниями моста. Тогда наступает резонанс. Амплитуда колебаний моста может увеличиться настолько, что он рухнет. Такие случаи наблюдались неоднократно

в прошлом столетии, что и послужило поводом для введения в войсковые уставы упомянутого выше правила. Конечно, одного совпадения частот *недостаточно* для разрушения моста. Мальчик, стреляющий по мосту из рогатки, не может рассчитывать на его разрушение, как бы идеально он ни вошел в ритм стрельбы и как бы долго ни продолжалась последняя. Существуют силы трения и другие тормозящие силы, *ограничивающие возрастание амплитуды колебаний.* Помимо совпадения частот для разрушения необходимо еще, чтобы каждый толчок был *достаточно сильным.* Точно так же в случае электрических систем при расчетах предельно допустимых напряжений, подводимых к системе, *нельзя ограничиваться статическими полями.* Если система содержит емкости и индуктивности, то во избежание электрического пробоя при расчетах необходимо считаться с возможностью резонанса.

9. Резонансная кривая, приведенная на рис. 281 и представляемая формулой (127.9), называется *амплитудной резонансной кривой.* Обратимся теперь к рассмотрению *фазовой резонансной кривой* (127.10). Она определяет угол δ, на который отстает по фазе смещение (заряд) q относительно внешней силы X. Зависимость δ от ω изображена на рис. 283. Если $\omega \to 0$, то $\delta \to 0$: при низких частотах q и X колеблются

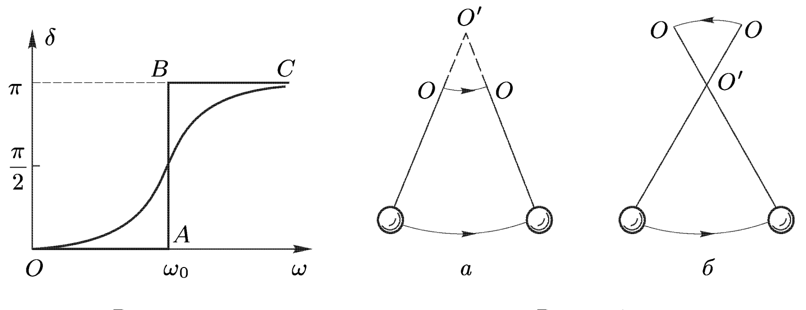


Рис. 283 Рис. 284

в *одинаковых фазах.* При $\omega \to \infty$ сдвиг фаз δ стремится к π — колебания совершаются в *противоположных фазах.* При резонансе $\operatorname{tg}\delta = \infty$, $\delta = \pi/2$. Если $\gamma \to 0$, то фазовая резонансная кривая претерпевает разрыв непрерывности при $\omega = \omega_0$ и переходит в ломаную $OABC$: при $\omega < \omega_0$ фазы колебаний q и X одинаковы, а при $\omega > \omega_0$ — противоположны. Ломаная $OABC$ представляет *предельное положение*, к которому стремятся резонансные кривые при $\gamma \to 0$.

Следующая механическая иллюстрация помогает уяснить фазовые соотношения при вынужденных колебаниях. Возьмем рукой маятник за точку O (рис. 284 *а*) и будем медленно двигать эту точку туда и обратно. Возникнут вынужденные колебания, как если бы маятник стал длиннее и был закреплен в неподвижной точке подвеса O'. В этом случае колебания руки (внешней силы) совершаются с частотой, меньшей собственной частоты ω_0 маятника. Направления движения руки и шарика маятника все время совпадают, их колебания происходят

в одинаковых фазах. Не то будет, когда точка O колеблется с частотой, превышающей собственную частоту колебаний маятника. Теперь маятник колеблется так, как если бы его точка подвеса была неподвижна и смещена вниз относительно точки O: точка O и шарик маятника движутся противоположно, т. е. колеблются в противоположных фазах (рис. 284 *б*).

§ 128. Вынужденные колебания под действием несинусоидальной силы. Теорема Фурье

1. Вынужденные колебания под действием несинусоидальной силы можно исследовать с помощью математической *теоремы Фурье* (1768–1830). Согласно этой теореме всякая периодическая функция достаточно общего вида может быть разложена в *ряд Фурье*, т. е. представлена в виде суммы конечного или бесконечного числа *синусоидальных функций.* Мы не будем доказывать эту теорему, но приведем выражение для *коэффициентов* ряда Фурье.

Периодической функцией $f(t)$ называется всякая функция, при любом t удовлетворяющая условию $f(t) = f(t+T)$, где T — положительная постоянная, не равная нулю. Она называется *периодом функции* f. Если T — период, то, очевидно, $2T$, $3T$ и т. д. также будут периодами. Действительно, $f(t+2T) = f(t+T+T) = f(t+T) = f(t)$. Среди всех этих периодов можно указать *наименьший*, который называется *основным периодом*, а частота $\Omega = 2\pi/T$ — *основной частотой.* В дальнейшем под T и Ω мы будем понимать основной период и основную частоту.

Теорема Фурье утверждает, что всякую периодическую функцию с основным периодом T можно представить в виде суперпозиции синусоид с периодами T, $T/2$, $T/3$, ... или с частотами $\omega_k = k\Omega$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$ Запишем этот ряд Фурье в комплексной форме:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k E^{i\omega_k t}, \tag{128.1}$$

подразумевая, что функция $f(t)$ равна *вещественной части* ряда, стоящего справа. Для вычисления коэффициентов c_k умножим обе части соотношения (128.1) на $e^{-i\omega_m t}$ и проинтегрируем от 0 до T. Получим

$$\int_0^T f(t)e^{-i\omega_m t}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_0^T e^{i(\omega_k - \omega_m)t}\,dt.$$

В силу периодичности показательной функции

$$e^{i(\omega_k-\omega_m)T} = e^{i(k-m)T\Omega} = e^{2\pi(k-m)i} = 1.$$

Отсюда следует, что интеграл в правой части равен нулю, если $k \neq m$. Если же $k = m$, то этот интеграл равен T. Таким образом,

$$c_m = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_m t}\,dt. \tag{128.2}$$

По этой формуле и можно вычислить коэффициенты ряда Фурье c_m. Интегрирование не обязательно проводить в пределах от 0 до T. Можно взять любые пределы, лишь бы длина промежутка интегрирования была равна T.

2. Применение теоремы Фурье к задаче о вынужденных колебаниях производится по следующей схеме. Если внешняя «сила» $X(t)$, действующая на затухающий осциллятор, периодична, то ее следует разложить в ряд Фурье и решить задачу о вынужденных колебаниях для каждого члена этого ряда в отдельности. Тогда сумма таких решений и даст решение задачи о вынужденных колебаниях осциллятора под действием силы X.

Рассмотрим, например, с изложенной точки зрения явление резонанса под действием периодической силы, имеющей характер толчков (рис. 285). Пусть T — основной период, через который толчки следуют друг за другом. В разложении силы $X(t)$ будут содержаться синусоидальные члены (гармоники) с периодами T, $T/2$, $T/3$, ..., T/m, ... Резонанс на m-й гармонике получится при условии $T/m = T_0$, или $T = mT_0$, где T_0 — собственный период колебательного контура. Отсюда видно, что резонанс возникает, когда толчки следуют друг за другом не только через время T_0, но и через время $2T_0$, $3T_0$, ..., т. е. вдвое реже, втрое реже и т. д. Этот результат понятен из простых физических соображений.

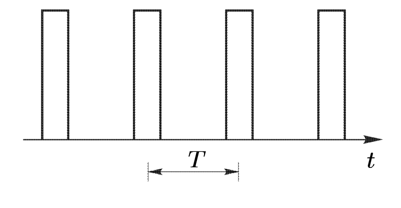


Рис. 285

3. Для всего изложенного не имеет значения, что сила $X(t)$ является *периодической* функцией. Существенно только, что она представляется *суммой синусоидальных членов.* Допустим, например, что

$$X(t) = A(t)\cos\omega t, \tag{128.3}$$

где функция $A(t)$ *медленно меняется во времени* (по сравнению с «быстро меняющейся» величиной $\cos\omega t$). Про колебание (128.3) говорят, что оно *модулировано по амплитуде.* Простейшей является *синусоидальная модуляция*, когда

$$A(t) = A_0(1 + \alpha\cos\Omega t) \tag{128.4}$$

с постоянными A_0, α, Ω. Величину ω называют *несущей частотой*, α — глубиной, а Ω — *частотой модуляции*. В этом случае

$$X = A_0 \cos \omega t + \frac{\alpha A_0}{2} [\cos (\omega + \Omega)t + \cos (\omega - \Omega)t], \tag{128.5}$$

т. е. *синусоидально модулированное колебание эквивалентно суперпозиции трех синусоидальных колебаний с частотами* ω, $\omega + \Omega$, $\omega - \Omega$. Если эти частоты соизмеримы, то сила X периодична. Если же они несоизмеримы, то она не периодична. Хорошей иллюстрацией может служить следующий акустический опыт. Два одинаковых камертона устанавливаются возле друг друга на резонансных ящиках (рис. 282). Мы видели (см. с. 533), что если возбудить один камертон, то начинает звучать и другой (резонанс). Если же на ножку второго камертона надеть небольшой грузик, то он вызовет «расстройку», и второй камертон перестанет «отзываться» на колебания первого. Введем теперь между камертонами диск с отверстием и приведем его во вращение. Когда вращающееся отверстие проходит мимо отверстий резонансных ящиков, звук, воздействующий на второй камертон, усиливается, звуковая волна становится модулированной по амплитуде. Меняя частоту вращения диска, можно подобрать ее такой, чтобы второй камертон снова начал звучать, когда колеблется первый.

Модулированное колебание (128.3) часто называют *гармоническим* или *синусоидальным колебанием с переменной амплитудой.* С формально логической точки зрения такой термин внутренне противоречив, так как по самому определению амплитуда A и частота синусоиды ω — *величины постоянные.* Однако в некоторых случаях этот термин может быть оправдан. Все зависит от того, *на какую систему* (приемник) воздействует модулированная сила (128.3). Если приемник остронастроенный (т. е. его коэффициент затухания γ мал), то он будет отвечать практически на одну частоту, совпадающую с его собственной частотой ω_0. С помощью такого приемника из суперпозиции (128.5) можно выделить одновременно только колебания с частотой либо ω, либо $\omega + \Omega$, либо $\omega - \Omega$. В этом случае недопустимо функцию (128.3) отождествлять с одной синусоидой, а следует рассматривать ее как суперпозицию (128.5) трех синусоид с различными частотами. Положение меняется, когда приемник не остронастроенный. Такой приемник воспринимает одновременно *все три колебания* с частотами ω, $\omega + \Omega$, $\omega - \Omega$, и притом практически с *одним и тем же усилением.* В результате суперпозиции таких колебаний в приемнике возникает вынужденное колебание $A(t) \cos \omega t$. Явление протекает так, *как если бы на приемник действовала синусоидальная сила, амплитуда которой $A(t)$ медленно менялась во времени.* То же самое можно сказать и про частотную модуляцию, когда медленно меняется не амплитуда A, а частота колебания ω. Все это справедливо только тогда, когда время установления колебаний приемника $\tau = 1/\gamma$ мало по сравнению с временем, в течение которого заметно меняются амплитуда и фаза действующей силы. За время τ вынужденные колебания в приемнике успевают установиться,

тогда как A и ω практически остаются постоянными. Поэтому в течение времени установления τ сила $X = A(t)\cos[\omega(t)t]$ и вызывает такой же эффект, как если бы она оставалась чисто синусоидальной с постоянными $A(t)$ и $\omega(t)$.

4. Допустим теперь, что сила $X(t)$ *непериодична*, но воздействует на колебательную систему в течение *конечного времени*, например изображается функцией, показанной на рис. 286 сплошной линией. Этот случай сводится к случаю периодической силы. Для этого возьмем

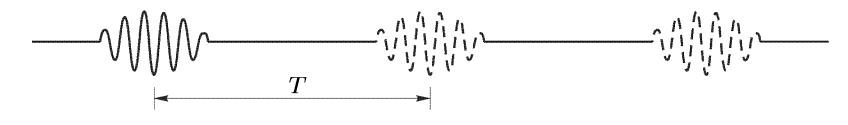


Рис. 286

промежуток времени T, очень большой по сравнению с временем затухания свободных колебаний системы, и «периодически продолжим» $X(t)$, чтобы получилась периодическая функция с периодом T, как это изображено на рис. 286. Поскольку время T ничем не ограничено, его можно выбрать настолько большим, чтобы замена исходной функции ее периодическим продолжением практически не отразилась на поведении колебательной системы в течение интересующего нас времени. А если выполнить предельный переход $T \to \infty$, то вспомогательная величина T вообще выпадет из результата, а самый результат сделается *вполне точным.* Разлагая периодически продолженную функцию в ряд Фурье и полагая $\Omega = 2\pi/T$, пишем

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}, \text{ где } c_n = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{+T/2} X(t)e^{-in\Omega t}\,dt.$$

Для выполнения предельного перехода введем новые обозначения: $\omega = n\Omega$, $\Delta\omega = \Omega$. Тогда

$$X(t) = \sum \frac{c_n}{\Omega}\,e^{i\omega t}\Delta\omega.$$

Поскольку при $T \to \infty$ величины $\Delta\omega$ стремятся к нулю, заменим сумму интегралом:

$$X(t) = \int\limits_0^{\infty} a(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega, \tag{128.6}$$

где

$$a(\omega) = \lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{\Omega} = \frac{1}{T\Omega}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{-i\omega t}\,dt,$$

или

$$a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-i\omega t}\, dt. \tag{128.7}$$

Формула (128.6) называется *интегралом Фурье.* Она представляет функцию $X(t)$ в виде *суперпозиции непрерывного множества синусоидальных колебаний*, частоты которых непрерывно заполняют определенный интервал. При этом подразумевается, что от правой части формулы (128.6) следует брать лишь *вещественную часть.* Разумеется, приведенные рассуждения не могут служить строгим доказательством формулы (128.6). Они устанавливают только связь между рядом и интегралом Фурье. Строгое доказательство дается в теории интеграла Фурье.

§ 129. Закон Ома для переменных токов (синусоидально меняющихся во времени)

1. Рассмотрим участок цепи, состоящий из последовательно соединенных *омического сопротивления* R, *катушки самоиндукции* L и *конденсатора* C, к концам которого приложена синусоидальная электродвижущая сила $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \cos\omega t$ (см. рис. 271). Найдем ток I, который установится в цепи под действием этой электродвижущей силы. С этой целью перейдем к комплексной форме $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 e^{i\omega t}$. Тогда заряд конденсатора в установившемся режиме представится выражением (127.5). Дифференцируя его по времени с учетом соотношений (122.7)–(122.9), находим

$$I = \mathscr{E}/Z, \quad \mathscr{E} = IZ, \tag{129.1}$$

где введено обозначение

$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \tag{129.2}$$

Формула (129.1) называется *законом Ома для переменных* (*точнее, синусоидальных*) *токов.* Роль сопротивления играет комплексная величина Z, называемая *комплексным сопротивлением*, или *импедансом.* Физическое содержание соотношения (129.1) раскроется полностью, если представить его в вещественной форме. Вопрос сводится к определению *амплитуды* и *фазы тока.* Начнем с рассмотрения частных случаев.

2. Случай 1. Цепь не содержит конденсатора и катушки самоиндукции. При отсутствии самоиндукции $L = 0$. Отсутствие конденсатора означает, что точки *3* и *4* на рис. 271 сливаются в одну точку, т. е. напряжение между этими точками все время равно нулю. Поэтому член q/C в уравнении (122.5) следует опустить, что можно сделать формально, полагая $C = \infty$, а не $C = 0$, как могло показаться на первый взгляд. В результате формула (129.1) переходит в обычный закон Ома $\mathscr{E} = RI$ — между током и напряжением *нет сдвига фаз.*

3. Случай 2. Цепь не содержит конденсатора и омического сопротивления ($R = 1/C = 0$). В этом случае

$$Z = i\omega L, \quad \mathscr{E} = i\omega L I. \tag{129.3}$$

Импеданс Z *чисто мнимый*. Это значит, что сдвиг фаз между током и напряжением равен 90°. Действительно,

$$\mathscr{E} = \omega L I e^{i\pi/2}, \text{ или } \mathscr{E} = \omega L I_0 e^{i(\omega t + \pi/2)}.$$

В вещественной форме

$$\mathscr{E} = \omega L I_0 \cos(\omega t + \pi/2), \quad I = I_0 \cos \omega t.$$

Отсюда видно, что *ток отстает от напряжения по фазе на* $\pi/2$.

Амплитуда тока связана с амплитудой напряжения соотношением $\mathscr{E}_0 = \omega L I_0$. Величина ωL (или $i\omega L$) называется *индуктивным сопротивлением*. Индуктивное сопротивление тем больше, чем больше частота ω и индуктивность катушки L. Для увеличения индуктивного сопротивления в катушку самоиндукции вводят железный сердечник, состоящий из железных полос или проволок, изолированных друг от друга, например, лаком. Такая катушка называется *дросселем*.

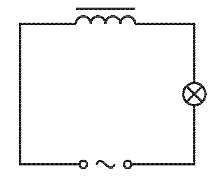


Рис. 287

Соберем схему, состоящую из последовательно соединенных лампового реостата и дросселя (рис. 287). Вынем из дросселя железный сердечник и подберем сопротивление лампового реостата таким, чтобы лампы горели нормальным накалом. Затем вдвинем железный сердечник. При этом увеличивается индуктивное сопротивление, а ток уменьшается. В результате лампы начинают гореть более тускло и даже могут совсем погаснуть. Если переключить цепь на постоянное напряжение, то вдвигание и выдвигание сердечника не будет влиять на силу тока и накал ламп.

При высоких частотах, даже когда величина L ничтожна, индуктивное сопротивление ωL может значительно превзойти омическое. Соединим концы толстого медного стержня (диаметром около 5 мм), согнутого в дугу, с источником тока высокой частоты (порядка мегагерца). Параллельно дуге включим обычную лампочку накаливания с сопротивлением около 100 Ом (рис. 288). По сравнению с ним омическое сопротивление дуги (для постоянного тока около 0,001 Ом) ничтожно. Несмотря на это, дуга не закорачивает лампочку. Последняя горит ярко, что объясняется большим индуктивным сопротивлением дуги.

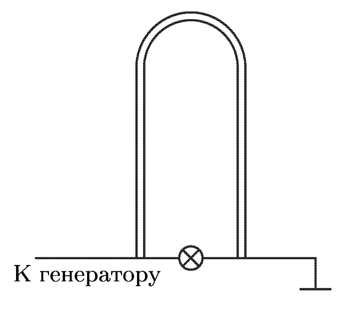


Рис. 288

4. Случай 3. Цепь не содержит катушки самоиндукции и омического сопротивления. В этом случае

$$Z = -\frac{i}{\omega C}, \quad \mathscr{E} = -\frac{i}{\omega C}\, I, \quad I = i\omega C\mathscr{E}. \tag{129.4}$$

Отсюда видно, что ток опережает по фазе напряжение на $\pi/2$. Амплитуда тока связана с амплитудой напряжения соотношением $I_0 = \omega C\mathscr{E}_0$. Величина $1/\omega C$ (или $-i/\omega C$) называется *емкостным сопротивлением.* Емкостное сопротивление тем меньше, чем больше емкость конденсатора. И без вычислений ясно, что конденсатор бесконечно большой емкости не будет оказывать никакого сопротивления переменному току. При прохождении переменного тока на обкладках конденсатора накапливались бы электрические заряды противоположных знаков. Однако при $C = \infty$ это не привело бы к возникновению напряжения между обкладками ($V = q/C = 0$). В этом отношении конденсатор бесконечно большой емкости ведет себя так же, как кусок проволоки, не обладающий омическим сопротивлением.

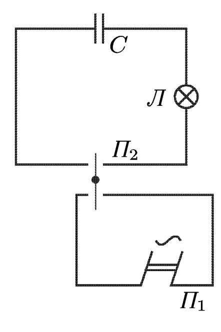


Рис. 289

Соберем схему, изображенную на рис. 289. Перекинем переключатель $П_1$ на постоянный ток. Лампа *Л* гореть не будет, так как конденсатор C оказывает ей бесконечно большое сопротивление. Будем изменять направление тока с помощью переключателя $П_2$. При каждом переключении через лампу проходит зарядный или разрядный ток конденсатора, и она вспыхивает. При достаточно частом переключении получается переменный ток, и лампа горит почти полным накалом. При перекидывании переключателя $П_1$ на переменный ток лампа *Л* горит ровно и ярко. Если увеличить емкость конденсатора C, то уменьшится емкостное сопротивление, и лампа будет гореть еще ярче. Уменьшение емкости конденсатора приводит к обратному эффекту.

5. Исследуем теперь общий случай, когда R, L, C произвольны. Импеданс Z представим в виде

$$Z = \rho e^{i\delta},$$

где ρ и δ — величины вещественные. Тогда

$$I = \frac{\mathscr{E}}{Z} = \frac{\mathscr{E}_0}{\rho}\, e^{i(\omega t - \delta)} = I_0 e^{i(\omega t - \delta)},$$

или в вещественной форме

$$I = \frac{\mathscr{E}_0}{\rho}\cos(\omega t - \delta).$$

Ток отстает по фазе от напряжения на δ. Для вычисления ρ и δ воспользуемся формулой (129.2). Она дает

$$\rho e^{i\delta} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Приравнивая вещественные и мнимые части, получим

$$\rho\cos\delta = R, \quad \rho\sin\delta = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

Отсюда

$$\rho^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2, \tag{129.5}$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}.$$

В результате получаем

$$I = \frac{\mathscr{E}_0\cos(\omega t - \delta)}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \tag{129.6}$$

Эта формула совместно с формулой (129.5) выражает закон Ома для переменных токов *в вещественной форме.* По сравнению с вещественной комплексная форма того же закона

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + i(\omega L - 1/\omega C)} \tag{129.7}$$

более компактна и лучше приспособлена для вычислений.

6. Закон Ома для переменных токов можно представить также на векторной диаграмме. С этой целью перепишем предыдущую формулу в виде

$$RI + i\omega LI - \frac{i}{\omega C}I = \mathscr{E}. \tag{129.8}$$

Она означает, что сумма падений напряжения на омическом сопротивлении, катушке самоиндукции и конденсаторе равна внешнему приложенному напряжению. В методе векторных диаграмм все эти напряжения должны рассматриваться не как числа, а как *векторы.* Падение напряжения на омическом сопротивлении RI откладывается вдоль оси X, падения напряжения на катушке самоиндукции $I\omega L$ и конденсаторе $I/\omega C$ — вдоль оси Y: первое в положительном, второе — в отрицательном направлениях (рис. 290). Векторная диаграмма позволяет

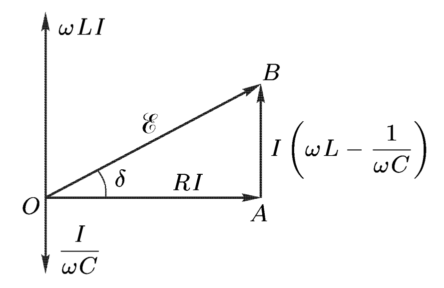


Рис. 290

определить амплитуду и фазу колебаний. Амплитуда колебаний тока найдется из прямоугольного треугольника OAB по теореме Пифагора:

$$(RI_0)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 I_0^2 = \mathscr{E}_0^2.$$

Из того же треугольника легко найти тангенс угла сдвига фаз δ. В результате получаются прежние формулы (129.5) и (129.6).

Квадратный корень, стоящий в знаменателе формулы (129.6), называется *полным сопротивлением цепи.* Омическое сопротивление R называют *активным сопротивлением*, а величину $\omega L - 1/\omega C$ — *реактивным сопротивлением.* Впрочем, реактивным сопротивлением иногда называют саму мнимую часть импеданса $i(\omega L - 1/\omega C)$.

7. Допустим, что при неизменном внешнем напряжении $\mathscr{E}_0 \cos(\omega t + \delta)$ меняются параметры L и C. Когда реактивное сопротивление $\omega L - 1/\omega C$ обратится в нуль, полное сопротивление достигнет минимума R. Это произойдет при резонансной частоте $\omega = \omega_0 \equiv 1/\sqrt{LC}$. Тогда амплитуда тока станет максимальной: $I_{0\text{макс}} = \mathscr{E}_0/R$. Общее падение напряжения в цепи будет равно падению напряжения на омическом сопротивлении $V_R = RI$. Суммарное падение напряжения на конденсаторе и катушке самоиндукции обратится в нуль: $V_L + V_C = 0$, т. е. напряжения V_L и V_C будут равны по величине и противоположны по фазе. Таким образом, при резонансе

$$\left|\frac{V_L}{V_R}\right| = \left|\frac{V_C}{V_R}\right| = \frac{\omega L}{R} = \frac{\omega}{2\gamma} = Q. \qquad (129.9)$$

При больших добротностях Q напряжения V_L и V_C могут во много раз превзойти напряжение на омическом сопротивлении, а следовательно, и общее напряжение в цепи $\mathscr{E}$. Это явление называется *резонансом напряжений.* При расчете изоляции электрических линий, содержащих емкости и самоиндукции, это явление необходимо учитывать. Иначе может получиться пробой линии.

Для демонстрации явления резонанса напряжений колебательный контур собирается из магазина емкостей C и катушки самоиндукции L с железным сердечником, который можно вдвигать в катушку и выдвигать и тем самым менять ее индуктивность L (рис. 291). В качестве сопротивления R служит электрическая лампочка или несколько лампочек, соединенных параллельно. С помощью четырех вольтметров, не показанных на рисунке, можно одновременно измерять напряжения V_L, V_C, V_R (точнее, их амплитуды), а также входное напряжение $\mathscr{E}$. Опыт показывает, что при включении переменного тока напряжение V_R на сопротивлении R меньше входного напряжения $\mathscr{E}$: часть напряжения падает на реактивном сопротивлении. Поэтому лампы горят сравнительно тускло, а амплитуды напряжений

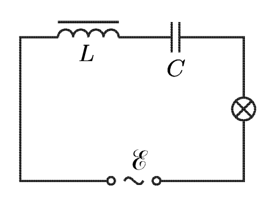


Рис. 291

V_L и V_C отличаются друг от друга. Изменяя самоиндукцию L или емкость C, можно добиться того, чтобы напряжения V_L и V_C сделались по амплитуде почти одинаковыми. Так как их фазы противоположны, то реактивное сопротивление обращается в нуль, сила тока достигает максимума, и лампа начинает гореть ярко. При этом напряжения V_L и V_C намного превосходят внешнее напряжение $\mathscr{E}$. Получился резонанс напряжений.

§ 130. Правила Кирхгофа для переменных токов

1. *К переменным токам без всяких изменений применимо первое правило Кирхгофа.* Действительно, точки схождения проводов обладают пренебрежимо малыми емкостями, в них не могут накапливаться электрические заряды. Поэтому в любой момент времени сумма сил токов, подходящих к точке разветвления, должна равняться сумме сил токов, отходящих от нее. *Второе правило Кирхгофа также применимо к синусоидальным переменным токам, если омические сопротивления R всюду заменить на соответствующие комплексные сопротивления (импедансы) Z.* Это правило непосредственно следует из уравнения Максвелла

$$\oint E_l\,dl = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Для доказательства выделим в разветвленной сети какой-либо замкнутый контур, например контур, изображенный на рис. 292. Предположим, что выполнено условие квазистационарности. Тогда предыдущее уравнение для выделенного контура запишется в виде

$$\sum_k \left(I_k R_k + \frac{q_k}{C_k} - \mathscr{E}_k\right) = -\sum L_k \frac{dI_k}{dt}.$$

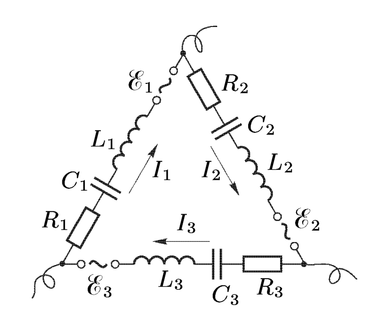


Рис. 292

Приложенные напряжения $\mathscr{E}_k$ считаются положительными, если при обходе контура источник тока проходится от отрицательного полюса к положительному. Написанное уравнение справедливо и для неустановившихся процессов, причем электродвижущие силы $\mathscr{E}_k$ могут меняться во времени как угодно. Допустим теперь, что все электродвижущие силы $\mathscr{E}_k$ меняются во времени синусоидально, т. е. в комплексной форме $\mathscr{E}_k \sim e^{i\omega t}$. Тогда в случае установившихся процессов заряды q_k и токи $I_k = \dot{q}_k$ будут меняться во времени так же, а предыдущее уравнение перейдет в

$$\sum_k I_k \left(R_k + i\omega L_k - \frac{i}{\omega C_k}\right) = \sum_k \mathscr{E}_k,$$

или

$$\sum Z_k I_k = \sum \mathscr{E}_k, \tag{130.1}$$

а это и есть второе правило Кирхгофа.

2. Все результаты, полученные формальным применением правил Кирхгофа к постоянным токам, в комплексной форме сохраняют силу и для установившихся синусоидальных токов. В частности, при параллельном соединении нескольких комплексных сопротивлений результирующее комплексное сопротивление определяется формулой

$$\frac{1}{Z} = \sum \frac{1}{Z_k}. \tag{130.2}$$

Рассмотрим частный случай, когда соединены параллельно катушка самоиндукции и конденсатор (рис. 293). По первому правилу Кирхгофа

$$I + I_2 = I_1.$$

По второму правилу

$$i\omega L I_1 - \frac{iI_2}{\omega C} = 0.$$

Исключим из этих уравнений, например, ток I_2. Получим

$$I = I_1(1 - \omega^2 LC),$$

или

$$I = I_1\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right). \tag{130.3}$$

Если $\omega = \omega_0$, то $I = 0$, и, следовательно, $I_1 = I_2$. Токи I_1 и I_2 могут быть отличны от нуля. Однако колебания в контуре становятся совершенно независимыми от внешнего тока. Причина всего этого в том, что при $\omega = \omega_0$ (т. е. при $\omega L = 1/\omega C$) комплексное сопротивление Z контура обращается в бесконечность, как в этом легко убедиться с помощью формулы (130.2). Контур ведет себя как непроницаемая пробка, через которую внешний ток пройти не может, а в катушке могут совершаться только свободные колебания. Амплитуды этих колебаний легко найти из условия, что напряжение на конденсаторе или на катушке самоиндукции в любой момент времени должно равняться внешнему приложенному напряжению $\mathscr{E}$. Это дает

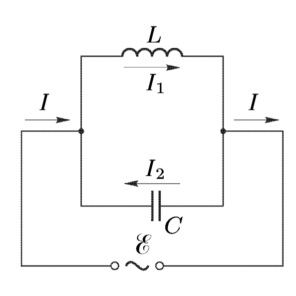


Рис. 293

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{i\omega L}, \quad I_2 = -\frac{\mathscr{E}}{-i/\omega C} = \frac{\mathscr{E}}{i\omega L}.$$

Возникает вопрос, как в колебательном контуре могли появиться токи I_1 и I_2, если его сопротивление переменному току бесконечно велико. На этот вопрос законы и соотношения, которыми мы пользовались,

ответа дать не могут, так как они относятся *только к установившимся состояниям.* Последние устанавливаются в результате *переходных процессов.* Во время переходных процессов ток во внешней цепи не равен нулю, в колебательный контур поступают токи и заряды, идет накопление электромагнитной энергии. Это происходит до тех пор, пока в любой момент времени напряжения на конденсаторе и катушке самоиндукции не уравновесят внешнее приложенное напряжение. Когда это произойдет, дальнейшее поступление новых зарядов и токов в колебательный контур прекратится. Начнут совершаться свободные колебания, как если бы контур был *автономной колебательной системой.* Однако эта автономия сохраняется только до тех пор, пока внешняя электродвижущая сила $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \cos \omega t$ остается неизменной. Если изменить амплитуду $\mathscr{E}_0$, то $\mathscr{E}$ перестанет уравновешивать напряжения на конденсаторе и катушке самоиндукции. Появится ток во внешней цепи, и начнется новый процесс установления колебаний.

Разумеется, без поступления энергии извне незатухающие колебания возможны только тогда, когда омическое сопротивление контура равно нулю. Учтем теперь омическое сопротивление. Обозначим буквой R омическое сопротивление катушки самоиндукции. Омическим сопротивлением всех остальных проводов пренебрежем. Тогда

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{R + i\omega L}, \quad I_2 = -i\omega C\mathscr{E},$$

$$I = I_1 - I_2 = \frac{R - i\omega L + i\omega^2 L^2 \omega C + i\omega C R^2}{R^2 + \omega^2 L^2}\,\mathscr{E}.$$

При резонансе $\omega = \omega_0$ и, следовательно, $\omega C = 1/\omega L$. В этом случае

$$I = \frac{R + iR \cdot R/\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\,\mathscr{E}.$$

Пусть сопротивление R пренебрежимо мало по сравнению с индуктивным сопротивлением ωL. Тогда

$$I \approx \frac{R}{\omega^2 L^2}\,\mathscr{E} = i\frac{2\gamma}{\omega}\,I_1 = i\frac{I_1}{Q}.$$

Следовательно,

$$|I_1/I| = Q.$$

Чем больше добротность колебательного контура, тем меньше ток I в общей цепи. Таким образом, при $\omega = \omega_0$ малым током I в колебательном контуре большой добротности можно возбудить и поддерживать большие токи. Это явление называется *резонансом токов.* Его можно наблюдать, если в схему рис. 313 ввести амперметры для измерения токов I, I_1 и I_2. Вдали от резонанса токи I, I_1 и I_2 не очень сильно отличаются по величине. Изменением индуктивности катушки или емкости конденсатора настроим колебательный контур в резонанс. Токи I_1 и I_2 при этом сделаются почти одинаковыми, а ток I — близким к нулю.

§ 131. Эффективные напряжение и ток

1. Сдвиг фаз между током и напряжением влияет на *работу и мощность переменного тока.* Работа δA, совершаемая электродвижущей силой $\mathscr{E}$ за время dt, определяется выражением $\delta A = \mathscr{E}\,dq$, где dq — заряд, прошедший через поперечное сечение провода за это время. Мгновенная мощность будет

$$P = \mathscr{E}\frac{dq}{dt} = \mathscr{E}I. \tag{131.1}$$

Поскольку операция умножения нелинейна, пользоваться комплексными выражениями так, как это делалось до сих пор, нельзя. Надо перейти к вещественной форме, т. е. в случае синусоидальных токов положить

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \cos\omega t, \quad I = I_0 \cos(\omega t - \delta). \tag{131.2}$$

Но обычно проще проводить вычисления в комплексной форме, применяя следующий прием. Обозначим через $\mathscr{E}^*$ и I^* величины, комплексно сопряженные с $\mathscr{E}$ и I. Тогда

$$\operatorname{Re}\mathscr{E} = \frac{1}{2}(\mathscr{E} + \mathscr{E}^*), \quad \operatorname{Re} I = \frac{1}{2}(I + I^*).$$

Подставляя эти вещественные величины в формулу (131.1), получим

$$P = \frac{1}{4}(\mathscr{E}I^* + \mathscr{E}^*I) + \frac{1}{4}(\mathscr{E}I + \mathscr{E}^*I^*). \tag{131.3}$$

Здесь уже можно положить $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 e^{i\omega t}$, $I = I_0 e^{i(\omega t - \delta)}$ и воспользоваться формулой $\cos\alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$. В результате получится

$$P = \frac{1}{2}\mathscr{E}_0 I_0 \cos\delta + \frac{1}{2}\mathscr{E}_0 I_0 \cos(2\omega t - \delta).$$

Это выражение, конечно, легко получить и без использования комплексных выражений. Второе слагаемое в последней формуле быстро колеблется во времени с удвоенной частотой 2ω. Среднее значение его по времени равно нулю. Первое слагаемое от времени не зависит и дает *среднюю мощность переменного тока*:

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\mathscr{E}_0 I_0 \cos\delta. \tag{131.4}$$

Величины $\mathscr{E}_0$ и I_0 называются *амплитудными значениями напряжения и тока.* Вместо них в электротехнике чаще употребляют *эффективные значения*, определяемые выражениями

$$\mathscr{E}^2_{\text{эфф}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathscr{E}^2\,dt, \quad I^2_{\text{эфф}} = \frac{1}{T}\int_0^T I^2\,dt. \tag{131.5}$$

Для синусоидальных токов

$$\mathscr{E}_{\text{эфф}} = \mathscr{E}_0/\sqrt{2}, \quad I_{\text{эфф}} = I_0/\sqrt{2}. \tag{131.6}$$

С введением этих величин формула для средней мощности переменного тока принимает вид

$$\overline{P} = \mathscr{E}_{\text{эфф}} I_{\text{эфф}} \cos\delta. \tag{131.7}$$

2. Аналогичным образом разность фаз δ сказывается на *взаимодействии переменных токов.* Рассмотрим, например, переменные токи I_1 и I_2, текущие вдоль бесконечно длинных прямолинейных проводов, находящихся на расстоянии r друг от друга. Мгновенная сила, действующая на единицу длины каждого провода, определяется выражением

$$F = \frac{2I_1I_2}{cr}\,\mu.$$

(Здесь применяется гауссова система единиц.) Если токи I_1 и I_2 синусоидальны, а сдвиг фаз между ними равен δ, то для средней силы отсюда находим

$$\overline{F} = \frac{2\mu}{cr}\, I_{1\,\text{эфф}} I_{2\,\text{эфф}} \cos\delta. \tag{131.8}$$

В зависимости от разности фаз δ средняя сила $\overline{F}$ может быть либо силой притяжения, либо силой отталкивания. Если $\delta = \pi/2$, то $\overline{F} = 0$.

Примером может служить опыт Элиу Томсона, описанный в § 65. Если I — ток в обмотке электромагнита, то магнитный поток, пронизывающий алюминиевое кольцо, будет $\Phi = L_{12}I$. Допустим, что $I = I_0e^{i\omega t}$. Тогда электродвижущая сила индукции в кольце $\mathscr{E}^{\text{инд}} = -d\Phi/dt = -i\omega L_{12}I$, а ток

$$I' = -\frac{i\omega L_{12}I}{R + i\omega L}.$$

Здесь L — индуктивность, а R — омическое сопротивление кольца. Если R пренебрежимо мало по сравнению с индуктивным сопротивлением ωL, то

$$I' = -\frac{L_{12}}{L}\, I.$$

Так как коэффициенты L_{12} и L положительны, то фазы токов I и I' противоположны: $\delta = \pi$. Средняя сила взаимодействия кольца и электромагнита будет *отталкивательной.*

§ 132. Процессы установления колебаний

В общем случае колебания под действием внешней силы слагаются из вынужденных и свободных (см. § 127). Собственные колебания затухают, если время t, прошедшее с момента начала действия силы, велико по сравнению с временем затухания $\tau = 1/\gamma$. Исследуем теперь этот вопрос более подробно. Для простоты проведем вычисления в предположении, что коэффициент затухания γ равен нулю. Понятно, что в этом случае процесс установления колебаний никогда не закончится, так как $\tau = 1/\gamma = \infty$. Однако, получив решение для $\gamma = 0$, легко понять качественно, что будет при $\gamma \neq 0$.

Предположим, что на гармонический осциллятор в момент времени $t = 0$ начинает действовать периодическая «сила» $f = f_0 \cos \omega t$. Тогда при $t > 0$ колебания будут описываться уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t.$$

Если $\omega \neq \omega_0$, то общее решение этого уравнения имеет вид

$$x = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t + a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t.$$

Постоянные a и b определяются начальными условиями. Допустим, что в начальный момент $t = 0$ координата x и скорость $\dot{x}$ равны нулю. Чтобы удовлетворить первому условию, необходимо положить $a = -f_0/(\omega_0^2 - \omega^2)$. После этого второе условие будет удовлетворено, если $b = 0$. Решение, удовлетворяющее обоим условиям, запишется в виде

$$x = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t). \tag{132.1}$$

Получилась суперпозиция двух гармонических колебаний: собственного с частотой ω_0 и вынужденного с частотой ω. С суперпозицией гармонических колебаний разных частот приходится встречаться в самых разнообразных явлениях. Примером могут служить два звучащих камертона с разными собственными частотами. Особое значение имеет случай, когда частоты ω и ω_0 отличаются друг от друга мало. В этом случае выражение (132.1) целесообразно преобразовать к виду

$$x = A(t) \sin \overline{\omega} t, \tag{132.2}$$

где

$$A(t) = \frac{\pm 2 f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega_{\text{м}} t, \tag{132.3}$$

$$\overline{\omega} = (\omega + \omega_0)/2, \quad \omega_{\text{м}} = |\omega - \omega_0|/2. \tag{132.4}$$

Колебание, представляемое выражением (132.2), есть *амплитудно-модулированное колебание* с несущей частотой, равной *средней частоте* ω, и *частотой модуляции* $\omega_{\text{м}}$. Общий вид его представлен на рис. 294. В случае гармонических колебаний воздуха, возбуждаемых двумя камертонами, ухо обычно воспринимает результирующее колебание как

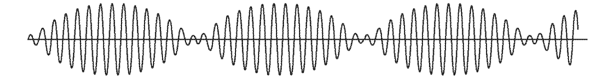


Рис. 294

гармоническое колебание с «переменной амплитудой» (см. § 126) Ухо слышит музыкальный тон, интенсивность которого периодически меняется с периодом $T_{\text{б}} = \pi/\omega_{\text{м}}$ и частотой $\omega_{\text{б}} = 2\pi/T_{\text{б}} = 2\omega_{\text{м}} = |\omega - \omega_0|$. Это явление называется *биениями*, а величины $T_{\text{б}}$ и $\omega_{\text{б}}$ — *периодом* и *частотой биений* соответственно. То обстоятельство, что ухо

воспринимает биения как музыкальный тон периодически меняющейся громкости, связано, конечно, с тем, что ухо как колебательная система обладает относительно малой добротностью; время установления колебаний этой системы мало по сравнению с периодом биений $T_б$.

В действительности собственные колебания затухают. Результирующее колебание представляется суперпозицией незатухающей и затухающей синусоид. Когда собственные колебания затухнут, останется только колебание, представляемое незатухающей синусоидой, т. е. процесс установления колебаний закончится. В зависимости от величины коэффициента затухания γ характер установления колебаний может быть разным, как это видно из рис. 295.

Рассмотрим теперь случай, когда $\omega = \omega_0$ (резонанс). В этом случае выражение (132.1) принимает неопределенный вид $x = 0/0$. Неопреде-

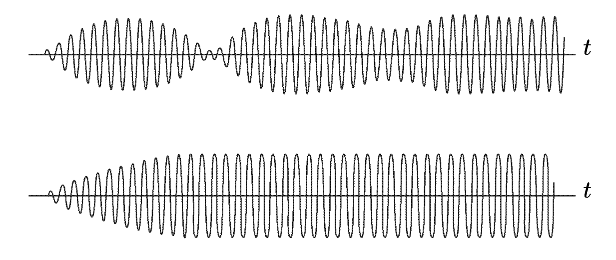


Рис. 295

ленность можно раскрыть, перейдя к пределу $\omega \to \omega_0$. Дифференцируя по ω, с помощью известного правила Лопиталя находим

$$\lim_{\omega\to\omega_0} \frac{\cos\omega t - \cos\omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega^2} = \lim_{\omega\to\omega_0} \frac{-\,t\sin\omega t}{-2\omega} = \frac{t}{2\omega_0}\,\sin\omega_0 t.$$

Следовательно,

$$x = \frac{f_0 t}{2\omega_0}\sin\omega_0 t. \tag{132.5}$$

На это выражение можно смотреть как на колебание с частотой ω_0, амплитуда которого $A(t) = f_0 t/2\omega_0$ линейно растет во времени. Если бы не было трения и других тормозящих сил, то процесс нарастания амплитуды колебаний никогда не закончился бы (рис. 296). В действительности тормозящие силы всегда есть. Пока колебания малы, они не играют большой роли. Но по мере нарастания амплитуды колебаний роль тормозящих сил становится все более и более существенной. Они в конце концов приостанавливают дальнейший рост амплитуды колебаний, и последние переходят в колебания постоянной амплитуды.

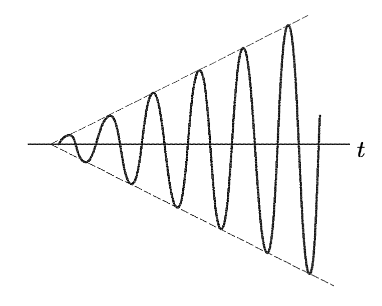


Рис. 296

ЗАДАЧИ

1. При рассмотрении квазистационарных процессов в колебательном контуре пренебрегают магнитной энергией, локализованной в катушке самоиндукции. На примере следующей задачи (и задачи 2) убедиться в допустимости такого приближения. Обкладки плоского конденсатора имеют форму дисков радиуса R. Толщина конденсатора d. Пространство между обкладками заполнено однородным диэлектриком с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε и μ. Конденсатор включен в цепь переменного тока $I = I_0 \cos \omega t$. Пренебрегая краевыми эффектами, вычислить электрическую и магнитную энергии, локализованные в конденсаторе. Найти отношение максимальной магнитной к максимальной электрической энергии. Провести численный расчет для $R = 10$ см и частоты $\nu = 100$ Гц, $\varepsilon = \mu = 1$.

Решение. Электрическая энергия (в гауссовой системе)

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{2d}{\varepsilon\omega^2 R^2}\, I_0^2 \sin^2 \omega t.$$

Магнитное поле внутри конденсатора создается током смещения. На расстоянии r от оси конденсатора оно найдется из соотношения

$$H \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c}\, I_{\text{см}} = \frac{4\pi}{c} \left(\frac{r}{R}\right)^2 I,$$

откуда

$$H = \frac{2r}{cR^2}\, I = \frac{2r}{cR^2}\, I_0 \cos \omega t.$$

Магнитная энергия, локализованная в конденсаторе:

$$W_m = \frac{\mu}{8\pi} \int H^2\, dV = \frac{\mu\, d}{4c^2}\, I_0^2 \cos^2 \omega t.$$

Отношение максимальных энергий:

$$\frac{W_m^{\text{макс}}}{W_e^{\text{макс}}} = \frac{\varepsilon\mu}{2} \left(\frac{\omega R}{2c}\right)^2 \approx 0{,}5 \cdot 10^{-14}.$$

2. Пространство внутри длинного соленоида, состоящего из N витков проволоки, заполнено однородным веществом с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ. Длина соленоида равна l, радиус R. По обмотке соленоида течет переменный ток $I = I_0 \cos \omega t$. Пренебрегая краевыми эффектами, вычислить магнитную и электрическую энергии, локализованные внутри соленоида, и найти отношение максимальных значений этих энергий. Провести численный расчет для $R = 5$ см, $\varepsilon = \mu = 1$ и частоты $\nu = 100$ Гц.

Ответ.

$$W_m = \frac{2\pi^2 \mu R^2 H^2}{c^2 l}\, I_0 \cos^2 \omega t, \quad W_e = \frac{\varepsilon\mu^2\pi^2\omega^2 R^4 N^2}{4c^4 l}\, I_0^2 \sin^2 \omega t,$$

$$\frac{W_e^{\text{макс}}}{W_m^{\text{макс}}} = \frac{\varepsilon\mu}{2} \left(\frac{\omega R}{2c}\right)^2 \approx 1{,}3 \cdot 10^{-15}.$$

3. Прямой однослойный соленоид с индуктивностью L совершает вынужденные крутильные гармонические колебания вокруг своей оси: $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$. Соленоид гибкими проводами подсоединен к конденсатору емкости C (опыт Мандельштама и Папалекси). Найти напряжение на конденсаторе при резонансе, когда частота ω равна собственной частоте колебательного

контура $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Радиус соленоида a, длина проволоки, из которой он изготовлен, l, сопротивление соленоида R (см. § 97).

Ответ. $V = \frac{m}{e}\,\frac{lLa\omega^3}{R}\,\varphi_0 \sin\omega t$, где m — масса, e — заряд электрона.

4. В § 78 был описан опыт Эйнштейна и де Гааза, в котором для определения гидромагнитного отношения атомов было использовано явление резонанса. Предполагая, что магнитное поле, в котором совершаются крутильные колебания железного цилиндрика, очень сильное, так что цилиндрик почти всегда намагничен до насыщения, а при прохождении магнитного поля через нуль перемагничивание происходит практически мгновенно, определить амплитуду φ_0 установившихся крутильных колебаний цилиндрика при резонансе.

Решение. Уравнение вынужденных крутильных колебаний цилиндрика записывается в виде (78.2). Во время перемагничивания можно пренебречь всеми вращающими моментами, действующими на цилиндрик, за исключением момента — $VI/\Theta\Gamma$. За это время цилиндрик не успеет повернуться на заметный угол, но его угловая скорость получит приращение

$$\Delta\dot{\varphi}_0 = -\frac{V}{\Theta\Gamma}\int \dot{I}\,dt = -2\frac{V}{\Theta\Gamma}\,I_{\text{нас}}.$$

Получив такую начальную угловую скорость, цилиндрик начнет совершать свободные затухающие колебания

$$\varphi = (\Delta\dot{\varphi}_0/\omega)e^{-\gamma t}\sin\omega t.$$

Через половину периода амплитуда колебаний уменьшится в $e^{\gamma T/2}$ раз. Но в это время произойдет новое перемагничивание, в результате которого амплитуда угловой скорости получит новое приращение $\Delta\dot{\varphi}_0$. Новая амплитуда отклонения станет равной $(\Delta\dot{\varphi}_0/\omega)(1+e^{-\gamma T/2})$ и т. д. Амплитуда установившихся колебаний представится геометрической прогрессией

$$\varphi_0 = \frac{\Delta\dot{\varphi}_0}{\omega}\,(1 + e^{-\gamma T/2} + e^{-2\gamma T/2} + \ldots) = \frac{\Delta\dot{\varphi}_0/\omega}{1 - e^{-\gamma T/2}}$$

или при малых значениях коэффициента затухания

$$\varphi_0 = \frac{2\Delta\dot{\varphi}_0}{\omega T\gamma} = \frac{\Delta\dot{\varphi}_0}{\pi\gamma} = -2\frac{V}{\pi\gamma\Theta\Gamma}\,I_{\text{нас}}.$$

5. Через баллистический гальванометр с баллистической постоянной B пропускается кратковременный импульс тока, в течение которого через него проходит количество электричества q. Спустя половину периода, когда рамка гальванометра вернется в исходное положение, через гальванометр пропускается такой же импульс тока, но в противоположном направлении; через следующую половину периода пропускается снова такой же импульс, но в первоначальном направлении и т. д. Таким образом, всякий раз, когда рамка гальванометра проходит через положение равновесия, она испытывает одинаковые толчки в направлении своего движения. Найти максимальный угол отклонения рамки при установившихся колебаниях. Период (затухающих) колебаний гальванометра T, логарифмический декремент d.

Ответ. $\varphi_{\text{макс}} = \frac{1}{1 - e^{-Td/2}}\,\frac{q}{B}$.

6. Катушка колебательного контура с параметрами L, C, $R = 0$ помещена в постоянное магнитное поле, создающее в ней постоянный магнитный поток

Φ_0. В момент времени $t = 0$ магнитное поле выключается. Время выключения τ пренебрежимо мало по сравнению с периодом собственных колебаний контура. Найти ток I в контуре в зависимости от времени после выключения поля.

Ответ. $I = \dfrac{\Phi_0}{L} \cos\omega_0 t$, $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

7. Вблизи катушки колебательного контура с параметрами L_1, C, $R = 0$ расположена вторая катушка с индуктивностью L_2. Коэффициент взаимной индукции между катушками равен L_{12}. Какой будет резонансная частота контура, если выводы второй катушки замкнуты накоротко? Считать, что индуктивное сопротивление второй катушки на рассматриваемой частоте значительно больше ее активного сопротивления. При каком условии резонанс недостижим?

Ответ. $\omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{(L_1 - L_{12}^2/L_2)C}$. Резонанс недостижим, если $L_{l2}^2 = L_1 L_2$.

8. В колебательном контуре с индуктивностью L и емкостью C совершаются незатухающие колебания силы тока

$$I = I_0 \cos\omega t, \quad \omega^2 = 1/(LC).$$

Катушкой самоиндукции служит прямая длинная проволочная спираль. Как изменится частота, амплитуда и энергия колебаний, если в момент времени $t = 0$ очень быстро (т. е. в течение времени, малого по сравнению с периодом колебаний $T = 2\pi/\omega$) растянуть спираль до удвоенной длины? Объяснить, почему при этом меняется энергия колебаний.

Ответ. Частота увеличится в $\sqrt{2}$ раз. Амплитуда колебаний и энергия возрастут вдвое.

9. Две одинаковые катушки, намотанные на общий каркас, включены последовательно в колебательный контур с емкостью C двумя способами, изображенными на рис. 297. Резонансные частоты колебательных контуров оказались равными ω_1 и ω_2 соответственно. Найти индуктивность L каждой из катушек и коэффициент их взаимной индукции L_{12}.

Ответ. $L = \dfrac{1}{4C}\left(\dfrac{1}{\omega_1^2} + \dfrac{1}{\omega_2^2}\right)$, $L_{12} = \dfrac{1}{4C}\left(\dfrac{1}{\omega_1^2} - \dfrac{1}{\omega_2^2}\right)$.

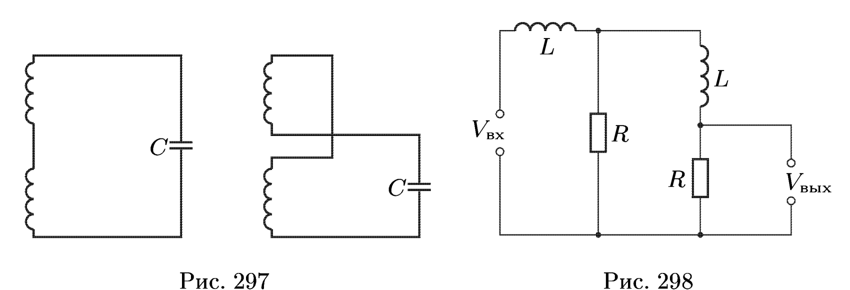


Рис. 297 Рис. 298

10. С помощью схемы, показанной на рис. 298, требуется получить фазовый сдвиг на угол 90° между напряжением на входе $V_{\text{вх}}$ и напряжением на выходе $V_{\text{вых}}$. Какому условию должны удовлетворять параметры схемы R и L, если круговая частота входного напряжения равна ω? Чему при этом будет равно отношение амплитуд входного и выходного напряжений?

Ответ. $\omega L = R$, $|V_{\text{вх}}/V_{\text{вых}}| = 3$.

11. Найти ток I (в установившемся режиме) в цепи, изображенной на рис. 299. При какой частоте ω амплитуда установившихся колебаний будет максимальна и при какой минимальна? Чему равен максимум и минимум тока?

Ответ. $I = \dfrac{V\omega C(1-\omega^2 LC)}{2\omega^2 LC - 1}\sin\omega t$, $I_{\text{мин}} = 0$ при $\omega^2 = 1/LC$, $I_{\text{макс}} = \infty$ при $\omega^2 = 1/(2LC)$.

12. Генератор синусоидальной ЭДС замкнут на активное сопротивление R и реактивное X, соединенные параллельно. Убрав R и X, тот же генератор замыкают на активное сопротивление r и реактивное x, соединенные после-

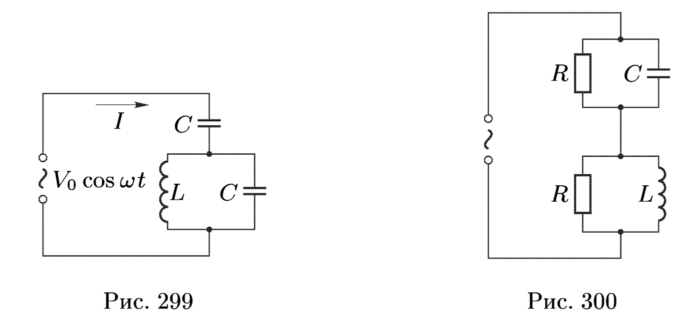


Рис. 299 Рис. 300

довательно. При каком условии амплитуда и фаза тока при этом останутся неизменными, если X и x — величины вещественные?

Ответ. $r = \dfrac{X^2}{R^2+X^2}R$, $x = \dfrac{R^2}{R^2+X^2}X$.

13. При каком условии амплитуда тока I в цепи, изображенной на рис. 300, зависит только от амплитуды приложенного напряжения $V = V_0\cos\omega t$, но не от частоты? Найти при этом условии разность фаз между приложенными напряжениями на концах RC-пары.

Ответ. $L = R^2 C$, $\operatorname{tg}\varphi = -\omega RC$.

14. Найти комплексный импеданс Z бесконечной цепочки, изображенной на рис. 301.

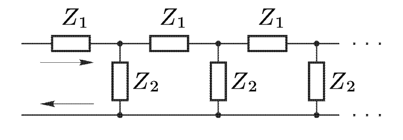


Рис. 301

Решение. Пусть параметры цепочки таковы, что при наложении синусоидального напряжения в ней устанавливается синусоидальный ток. В этом случае можно пользоваться понятием импеданса. Если удалить первые два звена цепочки Z_1 и Z_2, то останется такая же бесконечная цепочка. Ее можно заменить одним звеном с импедансом Z. Тогда получится схема, изображенная на рис. 302. Импедансы Z и Z_2 соединены параллельно, их

результирующий импеданс $ZZ_2/(Z+Z_2)$ соединен последовательно с импедансом Z_1. В результате должен получиться импеданс Z, т. е.

$$Z = Z_1 + \frac{ZZ_2}{Z+Z_2}, \text{ откуда } Z = \frac{Z_1}{2} + \sqrt{Z_1^2/4 + Z_1Z_2}.$$

Знак плюс перед квадратным корнем означает, что из двух значений корня следует брать то, которое имеет положительную вещественную часть. Действительно, квадратный корень есть не что иное, как импеданс Z' бесконечной цепочки, изображенной на рис. 303, а во всякой реальной системе активная часть комплексного сопротивления должна быть положительной.

15. Решить предыдущую задачу в предположении, что все импедансы, из которых составлена цепь, чисто мнимые (состоят из катушек самоиндукции и конденсаторов).

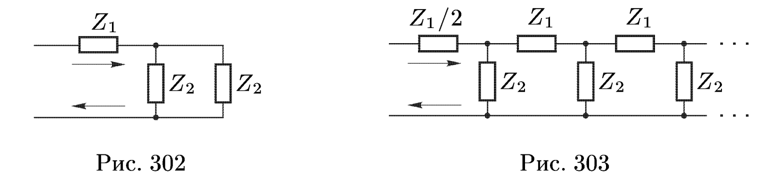


Рис. 302 Рис. 303

Решение. Полагая в предыдущей задаче $Z_1 = iX_1$, $Z_2 = iX_2$, получим

$$Z = \frac{1}{2}(iX_1 \pm \sqrt{-(4X_1X_2 + X_1^2)}).$$

Если $4X_1X_2 + X_1^2 < 0$, т. е. подкоренное выражение положительно, то импеданс Z будет содержать вещественную часть, а потому цепь будет потреблять или отдавать энергию, в зависимости от знака этой вещественной части. Стационарное состояние в этом случае невозможно, а решение, полученное в предыдущей задаче, неприменимо. Для решения необходимо использовать начальные условия.

Синусоидальный ток в цепочке возможен только при выполнении условия $4X_1X_2 + X_1^2 \geqslant 0$. Только тогда можно пользоваться понятием импеданса и решением предыдущей задачи. Вопрос сводится к выбору знака перед квадратным корнем. Для этого предположим, что импеданс Z_1 содержит малое омическое сопротивление R_1 и перейдем к пределу $R_1 \to 0$. Полагая $Z_1 = iX_1 + R_1$, $Z_2 = iX_2$, из решения предыдущей задачи получим

$$Z' = \frac{1}{2}\sqrt{-(4X_1X_2 + X_1^2) + 2iR_1(X_1 + 2X_2)},$$

где $Z' = Z - Z_1/2$ — импеданс бесконечной цепочки, изображенной на рис. 303. При извлечении квадратного корня пренебрежем квадратами R_1. В этом приближении

$$Z' = \frac{i}{2}\left[\sqrt{4X_1X_2 + X_1^2} - i\frac{R_1(X_1 + 2X_2)}{\sqrt{4X_1X_2 + X_1^2}}\right].$$

Знак надо выбрать так, чтобы вещественная часть этого выражения была положительна. Так как $R_1 > 0$, то в случае $X_1 + 2X_2 > 0$ надо взять знак плюс, а в случае $X_1 + 2X_2 < 0$ — минус. Полагая $R_1 = 0$, окончательно

находим

$$Z = \begin{cases} \dfrac{i}{2}\,[X_1 + \sqrt{4X_1X_2 + X_1^2}], & \text{если } X_1 + 2X_2 > 0, \\ \dfrac{i}{2}\,[X_1 - \sqrt{4X_1X_2 + X_1^2}], & \text{если } X_1 + 2X_2 < 0. \end{cases}$$

Например, если цепочка составлена только из катушек самоиндукции, то $X_1 > 0$, $X_2 > 0$, и перед корнем надо взять знак плюс. В этом случае ток отстает по фазе от напряжения на $\pi/2$. Если же цепочка состоит только из конденсаторов, то $X_1 < 0$, $X_2 < 0$, так что годится только знак минус. В этом случае фаза тока опережает фазу напряжения на $\pi/2$.

16. Найти импеданс бесконечной цепочки, изображенной на рис. 304.

Ответ. $Z = Z_1 + \sqrt{Z_1^2 + Z_1Z_2}$.

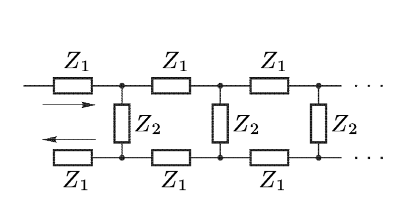


Рис. 304

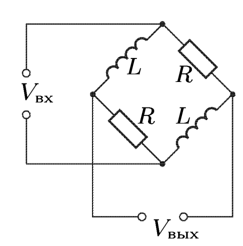


Рис. 305

17. На вход схемы, изображенной на рис. 305, подается синусоидальное напряжение частоты ω. Исследовать зависимость амплитуды и фазы выходного напряжения от величины сопротивления R.

Ответ. Амплитуды на входе и выходе одинаковы. Сдвиг фазы выходного напряжения относительно входного определяется формулой

$$\mathrm{tg}\delta = \frac{2\omega RL}{\omega^2L^2 - R^2}.$$

18. По длинному прямому проводу течет синусоидальный ток I высокой частоты $\nu = 10^8$ Гц. К проводу подносится квадратный проволочный контур со стороной $a = 17{,}2$ см, в который включена лампочка (рис. 306 *а*). Когда контур поднесен на расстояние $b = 10$ см, лампочка горит нормальным накалом. Определить эффективное значение силы тока в проводе $I_{эфф}$, если для нормального накала лампочки требуется постоянное напряжение $V = 6$ В. Уменьшится или увеличится напряжение на лампочке и во сколько раз, если квадрат заменить двойным квадратом, изображенным на рис. 306 *б*? Сопротивлением контуров пренебречь.

Ответ. $I_{эфф} = \dfrac{V}{4\pi\nu a\ln(a/b + 1)} = 0{,}028$ СГСМ-ед.$= 0{,}28$ А. Напряжение на лампочке уменьшится в

$$\ln\left(\frac{a}{b} + 1\right) \Big/ \ln\frac{(a+b)^2}{b(b+2a)} \approx 2 \text{ раза.}$$

19. Цепь, состоящая из последовательно соединенных сопротивления R и большой индуктивности L, присоединена к источнику постоянного тока,

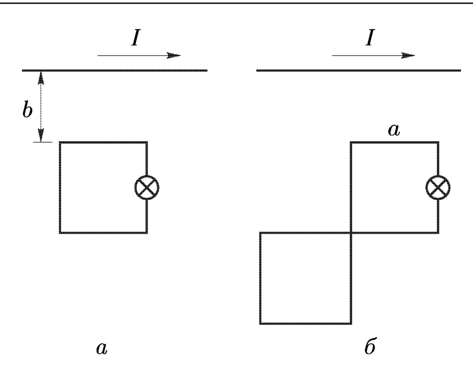


Рис. 306

поддерживающего на зажимах постоянное напряжение V_0. Для ограничения перенапряжений во время отключения источника параллельно с цепью включен конденсатор емкости C (рис. 307). Определить напряжение на конденсаторе $V(t)$ после отключения источника постоянного напряжения. Параметры контура удовлетворяют условию $4L > CR^2$.

Ответ. $V(t) = V_0 e^{-\gamma t}\left[\cos\omega t + \left(\frac{1}{\omega RC} + \frac{\gamma}{\omega}\right)\sin\omega t\right]$, где $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$, $\omega_0^2 = 1/LC$, $\gamma = R/2L$.

20. К контуру L, C, R (рис. 308) с малым затуханием в момент $t = 0$ подключают источник постоянной ЭДС с ничтожно малым внутренним сопротивлением. Определить напряжение V на конденсаторе C в зависимости от времени t. На какое минимальное напряжение должен быть рассчитан конденсатор?

Ответ. $V = \mathscr{E}[1 - e^{-\gamma t}(\cos\omega t + (\gamma/\omega)\sin\omega t)]$. Минимальное напряжение, на которое должен быть рассчитан конденсатор, не меньше $2\mathscr{E}$.

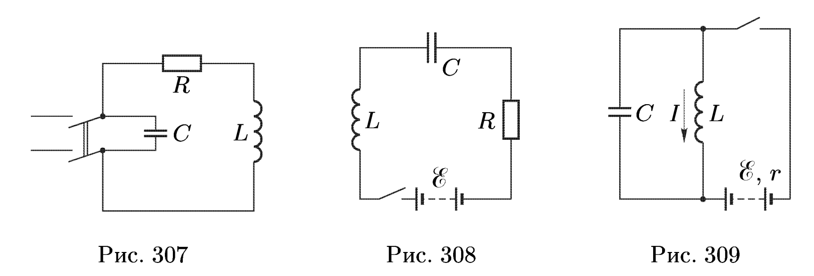


Рис. 307 Рис. 308 Рис. 309

21. Катушка с индуктивностью L, конденсатор с емкостью C и батарея с электродвижущей силой $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением R соединены параллельно (рис. 309). Найти силу тока $I(t)$ в катушке после включения батареи. Параметры L, C, R удовлетворяют условию $L < 4CR^2$.

Ответ. $I = \frac{\mathscr{E}}{R}\left[1 - e^{-\gamma t}\left(\cos\omega t + \frac{\gamma}{\omega}\sin\omega t\right)\right]$.

22. К синусоидальному напряжению $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \cos(\omega t + \delta)$ в момент времени $t = 0$ подключаются последовательно соединенные сопротивление R и индуктивность L. Найти силу тока I в цепи в зависимости от времени. При

каком условии после замыкания цепи в ней сразу установятся синусоидальные колебания?

Ответ.

$$I = \frac{\mathscr{E}_0}{R^2 + \omega^2 L^2}\left[R\cos(\omega t + \delta) + \omega L \sin(\omega t + \delta) - e^{-Rt/L}(R\cos\delta + \omega L \sin\delta)\right].$$

При условии $\operatorname{tg}\delta = -R/\omega L$ установятся синусоидальные колебания.

23. В цепь переменного тока с напряжением $\mathscr{E} = 440$ В и частотой $\nu = 50$ Гц включены последовательно нормально горящая лампочка накаливания и конденсатор. Чему равна емкость конденсатора C, если лампочка рассчитана на напряжение 220 В и силу тока 1 А? Чему равен сдвиг фаз между током и полным напряжением в цепи?

Ответ. $C = 1/(2\sqrt{3}\pi\nu R) = 8{,}4$ мкФ. Ток опережает напряжение по фазе на 60°.

24. В цепь переменного тока с напряжением $\mathscr{E}_{\text{эфф}} = 440$ В и частотой $\nu = 50$ Гц включены последовательно нормально горящая лампочка накаливания и катушка самоиндукции. Лампочка рассчитана на 110 В и 1 А. При замене лампочки другой, рассчитанной на 220 В и 0,8 А, оказалось, что новая лампочка горит также нормальным накалом. Найти сопротивление R и самоиндукцию L катушки.

Ответ. $R = \dfrac{3}{2}\dfrac{R_2^2 - 5R_1^2}{R_2 - R_1} = 137$ Ом, $L = \dfrac{1}{2\pi\nu}\sqrt{16R_1^2 - (R_1 + R_2)^2} = 1{,}16$ Г, где $R_1 = 110$ Ом и $R_2 = 275$ Ом — сопротивления первой и второй лампочек соответственно.

25. Два одинаковых проволочных кольца радиуса r каждое расположены так, как указано на рис. 310. Расстояние l между центрами колец велико по сравнению с r. В кольце *1* поддерживается переменный ток $I = I_0\cos\omega t$. Найти величину и направление средней силы $\overline{F}$ взаимодействия между кольцами. Индуктивность одного кольца равна L, омическое сопротивление R. Исследовать два предельных случая: 1) $\omega L \gg R$; 2) $\omega L \ll R$.

Ответ. $\overline{F} = \dfrac{6\pi^4\omega^2 L r^8 I_0^2}{R^2 + \omega^2 L^2}\dfrac{1}{l^7}$. Сила $\overline{F}$ — отталкивательная. Если $\omega L \gg R$, то

$$\overline{F} = \frac{6\pi^4 r^8 I_0^2}{L}\frac{1}{l^7}.$$

В другом предельном случае $\omega L \ll R$

$$\overline{F} = \frac{6\pi^4\omega^2 L r^8 I_0^2}{R^2}\frac{1}{l^7}.$$

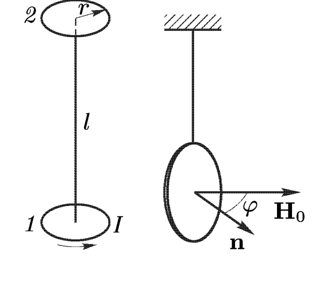


Рис. 310 Рис. 311

26. Металлическое проволочное кольцо площади S с омическим сопротивлением R и индуктивностью L подвешено в горизонтальном однородном магнитном поле $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0\cos\omega t$ и удерживается в нем таким образом, что угол между вектором $\mathbf{H}_0$ и нормалью $\mathbf{n}$ к плоскости кольца равен φ (рис. 311). Определить средний момент сил $\overline{\mathbf{M}}$, действующий на кольцо со стороны магнитного поля. Найти положения равновесия кольца и исследовать их устойчивость. Рассмотреть два предельных случая: 1) $\omega L \gg R$; 2) $\omega L \ll R$. В каком случае при одинаковых L вращающий момент меньше?

Ответ. $\overline{\mathbf{M}} = \dfrac{\omega^2 S^2 L H_0 \cos\varphi}{2(R^2 + \omega^2 L^2)}\,[\mathbf{H}_0 \mathbf{n}]$. Возможны два положения равновесия: а) плоскость кольца перпендикулярна к магнитному полю (неустойчивое равновесие); б) плоскость кольца параллельна магнитному полю (устойчивое равновесие): при $\omega L \gg R$

$$\overline{M} \equiv \overline{M}_1 = \frac{H_0^2 S^2}{2L}\,\sin\varphi\cos\varphi;$$

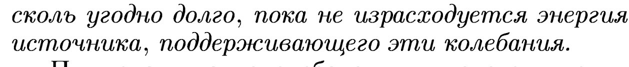
при $\omega L \ll R$,

$$\overline{M} \equiv \overline{M}_2 = \frac{\omega^2 H_0^2 S^2 L}{2R^2}\,\sin\varphi\cos\varphi = \overline{M}_1 \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2.$$

Во втором случае вращающий момент меньше.

§ 133. Автоколебания. Ламповый генератор

1. *Автоколебаниями называются вынужденные незатухающие колебания в реальных системах, период и амплитуда которых не зависят от характера внешнего воздействия, а определяются свойствами самой автоколебательной системы.* Автоколебания поддерживаются за счет поступления энергии из внешнего источника, причем количество поступающей энергии регулируется самой системой. В отличие от незатухающих собственных колебаний гармонического осциллятора и аналогичных систем, амплитуды которых определяются начальными условиями, *амплитуды автоколебаний от начальных условий не зависят.* Собственные незатухающие колебания относятся к идеализированному типу колебаний, который в реальных системах никогда не реализуется точно, — реальные собственные колебания всегда затухают. Напротив, *автоколебания в реальных системах могут продолжаться*



сколь угодно долго, пока не израсходуется энергия источника, поддерживающего эти колебания.

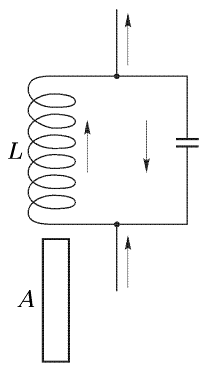


Рис. 312

Примерами автоколебательных систем могут служить часы, духовые и смычковые музыкальные инструменты и пр. В часах автоколебания возбуждаются и поддерживаются силой закрученной пружины или весом гири, в духовых музыкальных инструментах — воздушной струей, в скрипке — силами трения, возникающими при равномерном движении смычка, и т. д. Гудение телеграфных проводов под действием ветра, «пение» водопроводных труб, звучание человеческого голоса или трель соловья — все это примеры автоколебаний, вызываемых непериодическими силами.

Автоколебания могут возбуждаться и поддерживаться также и периодическими силами. Однако период последних не имеет никакого отношения к периоду возбуждаемых автоколебаний. Хорошим примером может служить демонстрационный опыт, предложенный и осуществленный М. И. Маклаковым,

лекционным ассистентом Московского физико-технического института. Катушка L колебательного контура помещается над столом в вертикальном положении (рис. 312). Снизу в нее входит железная трубка A, нижний конец которой стоит на столе. В трубке сделана вертикальная прорезь для уменьшения токов Фуко. Параметры колебательного контура подбираются так, чтобы его собственная частота совпадала с частотой переменного городского тока (50 герц). После включения тока через некоторое время наступает резонанс токов, и железная трубка втягивается в катушку. Индуктивность катушки увеличивается, колебательный контур выходит из резонанса, а амплитуда колебаний тока в катушке уменьшается. Благодаря этому трубка возвращается в исходное положение под действием силы тяжести. После этого колебания тока в колебательном контуре начинают нарастать, и снова наступает резонанс. Трубка опять втягивается в катушку. Трубка совершает автоколебания, т. е. периодические движения вверх и вниз, и при этом громко стучит по столу, подобно молотку. Период этих механических автоколебаний в десятки раз превосходит период переменного тока, поддерживающего их. Прибор получил название *молотка Маклакова.* Вместо параллельного включения катушку самоиндукции и конденсатор можно включить также последовательно.

Строгая теория автоколебаний весьма сложна. Это связано с тем, что автоколебания *нелинейны*, т. е. описываются нелинейными уравнениями. *Принцип суперпозиции в этих случаях не имеет места*, что затрудняет получение и исследование решений самих уравнений.

2. Важнейшей автоколебательной системой является *ламповый генератор*, нашедший широкое применение в радиотехнике. Простейшая схема такого генератора представлена на рис. 313. В цепь сетки лампы включен колебательный контур, в котором возбуждаются автоколебания. В цепь анода введена катушка, индуктивно связанная с катушкой колебательного контура. Она называется *катушкой обратной связи.* В использовании такой катушки заключена основная идея генератора. При наличии катушки обратной связи ток в колебательном контуре может индукционно воздействовать на ток в анодной цепи, и обратно. В реальных генераторах применяются *многосеточные лампы.* Однако для выяснения принципа действия генератора мы ограничимся простейшим случаем, когда в качестве лампы взят *триод*, имеющий всего одну сетку.

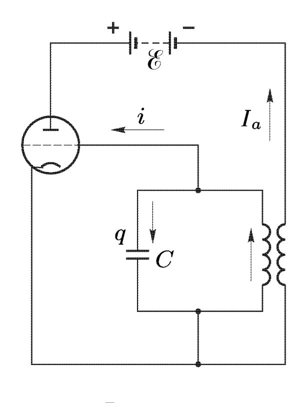


Рис. 313

В реальных условиях в колебательном контуре всегда совершаются колебания, возникающие в результате внешних влияний или тепловых флуктуаций. Обозначим через I ток в колебательном контуре, а через I_a — в анодной цепи. Некоторая часть тока i из колебательного контура ответвляется и идет на сетку.

Однако ток i мал и им можно пренебречь. Дело в том, что емкость конденсатора C очень велика по сравнению с емкостью между нитью и сеткой лампы. Поэтому емкостное сопротивление конденсатора много меньше сопротивления, оказываемого лампой, присоединенной параллельно конденсатору. В этих условиях основной ток устремляется через конденсатор. Однако, несмотря на свою малость, сеточный ток i играет принципиальную роль, так как он меняет заряд и потенциал сетки. Анодный ток I_a можно представить в виде функции сеточного V_g и анодного V_a напряжений. Так как сетка расположена значительно ближе к катоду, то изменение потенциала сетки значительно сильнее сказывается на силе анодного тока, чем равное изменение потенциала анода. Влиянием изменений анодного напряжения на анодный ток I_a можно пренебречь. В этом приближении

$$\frac{dI_a}{dt} = \left(\frac{dI_a}{dV_g}\right)_{V_a} \frac{dV_g}{dt} = S\frac{dV_g}{dt},$$

где S — крутизна сеточной характеристики. При изменении анодного тока в колебательном контуре индуцируется ЭДС

$$\mathscr{E}^{\text{инд}} = -M\frac{dI_a}{dt} = -MS\frac{dV_g}{dt}, \tag{133.1}$$

где M — коэффициент взаимной индукции между катушкой колебательного контура и катушкой обратной связи. Напряжение на сетке равно напряжению на конденсаторе, т. е. $V_g = q/C$, где q — заряд на верхней пластине конденсатора (при положительном обходе по контуру конденсатор проходится сверху вниз). Таким образом, $dV_g/dt = \dot{q}/C = I/C$, и, следовательно,

$$\mathscr{E}^{\text{инд}} = -\frac{MS}{C}\,I. \tag{133.2}$$

Если $M < 0$, то $\mathscr{E}^{\text{инд}}$ и I имеют одинаковые знаки. В этом случае при отсутствии сопротивления колебания в контуре будут нарастать — произойдет *самовозбуждение колебаний. Если же $M > 0$, то под действием электродвижущей силы $\mathscr{E}^{\text{инд}}$ колебания в контуре прекратятся.* Пересоединив концы катушки обратной связи или повернув на 180° саму катушку, можно изменить знак M и таким образом перейти от одного случая к другому.

Для получения более точного условия самовозбуждения колебательного контура надо учесть его омическое сопротивление R. При наличии электродвижущей силы $\mathscr{E}^{\text{инд}}$ уравнение колебаний в колебательном контуре имеет вид

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = -\frac{MS}{C}\,\dot{q},$$

где L — индуктивность колебательного контура. Разделив на L и введя обозначения

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2\delta = \frac{R}{L} + \frac{MS}{LC}, \tag{133.3}$$

получим

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \tag{133.4}$$

Допустим, что лампа работает на прямолинейном участке сеточной характеристики. Тогда S и δ можно считать величинами постоянными. В этом случае формально уравнение (133.4) описывает свободные колебания в контуре:

$$q = q_0 e^{-\delta t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t), \tag{133.5}$$

где A и B — постоянные, а $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$. Однако эти колебания могут не только затухать ($\delta > 0$), но и нарастать ($\delta < 0$). Условие нарастания колебаний $\delta < 0$ можно привести к виду

$$M < -CR/S. \tag{133.6}$$

Это и есть *условие самовозбуждения колебаний.* Из него видно, что *для самовозбуждения колебаний необходимо выполнение неравенства* $M < 0$, которое было получено выше для частного случая $R = 0$.

3. Изложенная теория «линейна», т. е. она основана на линейных дифференциальных уравнениях. *Она не полна и годится только на начальной стадии процесса*, когда колебания малы и поэтому с достаточным приближением крутизна характеристики S может считаться постоянной. Линейная теория приводит к правильному условию самовозбуждения колебаний (133.6), но она неприменима на более поздних стадиях процесса, когда амплитуда колебаний сделается достаточно большой. В частности, она не может ответить на вопрос, каковы будут установившиеся колебания. Если $\delta < 0$, то по линейной теории амплитуда колебаний должна возрастать неограниченно, а при $\delta = 0$ колебания должны быть незатухающими с амплитудой и фазой, *определяемыми начальными условиями.* Эти выводы не согласуются с опытом. Причина расхождения состоит в том, что при сильных колебаниях крутизна характеристики S даже приближенно перестает быть постоянной, а потому уравнения, описывающие колебания, становятся *нелинейными. Полная теория автоколебаний вообще и колебаний в ламповом генераторе в частности должна исходить из нелинейных уравнений, справедливых на всех стадиях процесса.*

Запишем уравнение колебаний в колебательном контуре в виде

$$L\dot{I} + RI + \frac{q}{C} = -M\frac{dI_a}{dt}. \tag{133.7}$$

Для упрощения предположим, что анодный ток I_a зависит только от знака сеточного напряжения V_g. Когда $V_g > 0$, через лампу идет *максимально возможный ток*, равный *току насыщения* I_s. Когда $V_g < 0$, анодный ток I_a равен нулю. Соответствующая идеализированная сеточная характеристика представлена на рис. 314 жирной ломаной линией (ср. с рис. 227). В этом случае уравнение (133.7) становится нелинейным. Введенная схематизация, конечно, не годится в точных расчетах. Но она достаточна, чтобы *качественно передать* основные особенности автоколебаний. На рис. 315 изображена кривая сеточного

напряжения V_g. Под ней приведена ступенчатая кривая $I_a(t)$ для анодного тока I_a. Производная $\dot{I}_a$ всюду равна нулю, за исключением отдельных точек, в которых ток I_a испытывает скачки. Формально

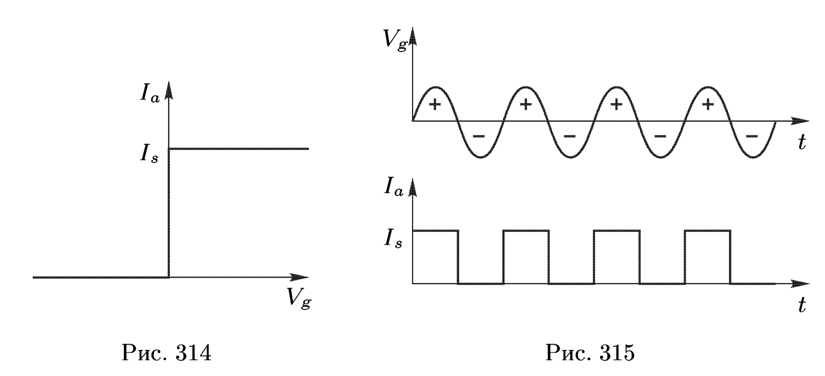


Рис. 314 Рис. 315

в этих точках производная $\dot{I}_a$ обращается в бесконечность. В действительности функция $I_a(t)$ всюду непрерывна и дифференцируема. Точки разрыва должны быть заменены малыми интервалами времени τ, в течение которых происходят резкие изменения анодного тока на величину $\Delta I_a = \pm I_s$, а производная $\dot{I}_a$ по абсолютной величине очень велика. Такие изменения вызывают скачки тока ΔI и в колебательном контуре. Для нахождения ΔI проинтегрируем выражение (133.7) по одному из интервалов времени τ. Поскольку величины I и q остаются конечными, при таком интегрировании они в пределе не вносят никакого вклада, и мы получаем

$$L\Delta I = -M\Delta I_a. \tag{133.8}$$

Скачки ΔI аналогичны кратковременным толчкам, действующим на колебательную систему. Если $M < 0$, то такие толчки усиливают колебания; если $M > 0$, то ослабляют. Между двумя последовательными толчками система совершает затухающие свободные колебания. Допустим, что $M < 0$. Пусть перед некоторым толчком амплитуда колебаний тока в колебательном контуре равна I_0. После толчка она получает приращение $|\Delta I| = |M\Delta I_a/L| = |MI_s/L|$ и становится равной $I_1 = I_0 + |MI_s/L|$. К следующему толчку колебания приходят с амплитудой

$$I_2 = I_1 e^{-\gamma T/2} = \left(I_0 + \left|\frac{MI_s}{L}\right|\right) e^{-\gamma T/2},$$

где $\gamma = R/(2L)$, а T — период колебания. Колебания будут нарастать, если $I_2 > I_0$. Амплитуда колебаний установится, когда $I_2 = I_0$. Таким образом, амплитуда установившихся колебаний будет

$$I_0 = \frac{|MI_s/L|}{e^{\gamma T/2} - 1}. \tag{133.9}$$

Характер установившихся колебаний (т. е. автоколебаний) представлен на рис. 316. Благодаря наличию скачков и затуханию колебания *не*

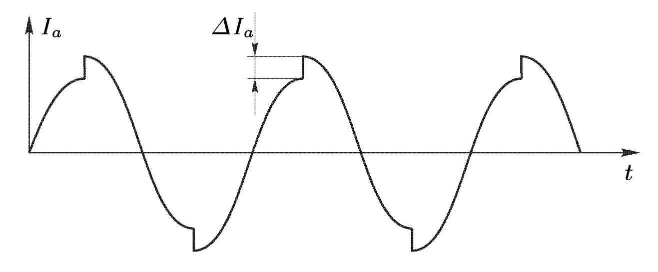


Рис. 316

гармонические. Допустим, однако, что добротность Q колебательного контура очень велика, т. е. $\gamma T \ll 1$. Тогда скачки тока I станут малозаметными, а автоколебания — *практически гармоническими* с амплитудой

$$I_0 = \frac{2|MI_s/L|}{\gamma T} = \frac{2Q}{\pi}\left|\frac{M}{L}I_s\right|. \tag{133.10}$$

Конечно, в реальных ламповых генераторах, характеристики которых — плавные кривые, никаких резких скачков не возникает, *колебания непрерывны, хотя и не совсем синусоидальны.*

4. В настоящее время для генерации синусоидальных и несинусоидальных колебаний и их усиления, наряду с электронными лампами, успешно применяются *полупроводниковые приборы*, обладающие рядом преимуществ по сравнению с электронными лампами. Полупроводниковые приборы не имеют накаливаемого катода и потому потребляют относительно меньшую мощность. Они не требуют вакуума, который может портиться при работе лампы. По этой причине они более долговечны и надежны в работе, чем электронные лампы. Благодаря своим малым габаритам полупроводниковые приборы незаменимы во многих радиотехнических схемах, например в счетно-решающих устройствах. Однако полупроводниковые приборы обладают и рядом недостатков (изменение свойств полупроводников с температурой, усложнения схем из-за малости входных сопротивлений, шумы, вызываемые случайными изменениями путей токов внутри сопротивлений). По этой причине, когда габариты и вес не являются определяющими, в технике эксперимента пока отдается предпочтение схемам на электровакуумных и газонаполненных приборах. Не останавливаясь на всех этих вопросах, относящихся к области радиотехники, ограничимся краткими замечаниями.

Для усиления и генерации колебаний применяются полупроводниковые приборы не с двумя (как в выпрямителях), а *с тремя и более электродами.* Рассмотрим *полупроводниковый триод* (*транзистор*), содержащий три электрода. Он представляет собой кристалл германия или кремния, в котором введением донорной и акцепторной примесей созданы три области с чередующимися типами проводимости: элек-

тронной и дырочной. Существуют два типа транзисторов. В транзисторах n–p–n-типа (рис. 317 *а*) крайние области обладают *электронной*, а средняя (*база*, или *основание*) — *дырочной проводимостью.* В транзи-

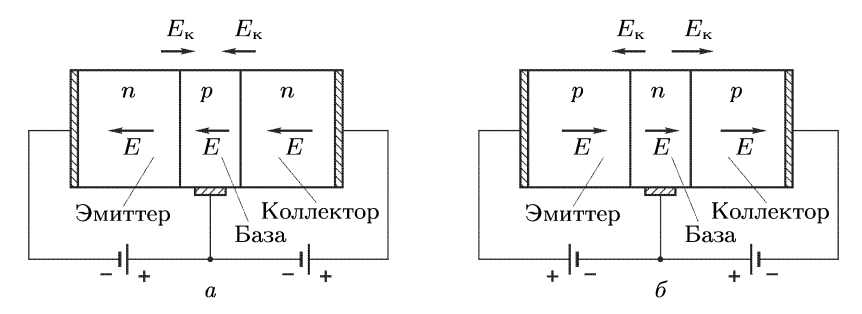


Рис. 317

сторах p–n–p-типа (рис. 317 *б*), наоборот, электронной проводимостью обладает *база*, а дырочной — *крайние области.* Кристалл снабжен соответствующими металлическими электродами, с помощью которых транзистор включается в цепь.

Контактное поле $\mathbf{E}_к$ в обоих n–p-переходах направлено *от электронного к дырочному полупроводнику* (см. § 108). Направление $\mathbf{E}_к$ — *запорное*, противоположное направление — *пропускное.* Включим транзистор в схему согласно рис. 317 *а*. Половина, включенная в проходном направлении, называется *эмиттером*, а включенная в запорном направлении — *коллектором.* Ширина базы, разделяющей эти половины, всегда мала и измеряется десятками (или даже единицами) микрометров. Электрический ток внутри эмиттера (рис. 317 *а*) создается главным образом движением *электронов*, являющихся *основными носителями заряда.* Эти электроны проходят через левый n–p-переход в область базы и там под действием электрического поля $\mathbf{E}$ движутся по направлению к коллектору. Толщина базы должна быть такова, чтобы значительная часть электронов прошла через нее. Пройдя через правый p–n-переход, электроны попадают в коллектор уже в качестве *основных носителей заряда.* Тем самым они меняют ток в коллекторе. Те же рассуждения относятся и к рис. 317 *б* (только роль электронов будут выполнять положительные дырки). Таким образом, всякое изменение тока в цепи эмиттера будет вызывать изменение тока и в цепи коллектора. В этом отношении транзистор действует аналогично электронной лампе. Роль катода играет эмиттер, анода — коллектор, сетки — база.

§ 134. Релаксационные колебания

На рис. 318 *а* представлена характеристика неоновой лампы (см. § 117). Это — *нелинейная характеристика.* Если повышать напряжение на лампе V, то при $V = V_2$ она вспыхивает и начинает светиться красным светом. При дальнейшем повышении напряжения ток в лампе возрастает вдоль кривой

AB. Если уменьшать напряжение на лампе в обратном порядке, то она гаснет при другом напряжении $V_1 < V_2$. Величины V_2 и V_1 называются *потенциалами зажигания* и *погасания* соответственно.

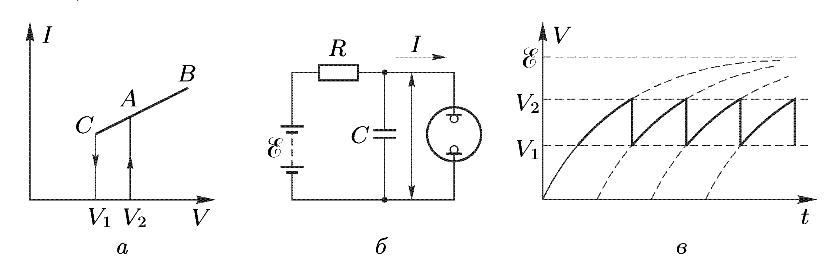


Рис. 318

Включим неоновую лампу в цепь, изображенную на рис. 318 *б*. Сопротивление R должно быть очень велико, а электродвижущая сила батареи $\mathscr{E}$ — больше V_2. Если замкнуть цепь, то конденсатор C начнет заряжаться. Напряжение на нем (равное напряжению на неоновой лампе V) будет возрастать по закону

$$V = \mathscr{E}(1 - e^{-t/\tau}),$$

где $\tau = RC$ (см. § 48). Когда напряжение V достигнет значения V_2, лампа загорится и начнет пропускать ток. Ее сопротивление практически обратится в нуль. Поэтому конденсатор очень быстро (почти мгновенно) начнет разряжаться через лампу. Однако когда напряжение на конденсаторе упадет до V_1, лампа погаснет и перестанет пропускать ток. С этого момента снова начнется зарядка конденсатора, пока потенциал V не достигнет значения V_2. Тогда лампа опять загорится и начнется новая разрядка конденсатора. И этот процесс будет продолжаться периодически с периодом

$$T = \tau \ln \frac{\mathscr{E} - V_1}{\mathscr{E} - V_2}.$$

Зависимость напряжения V от времени представлена на рис. 318 *в* жирной пилообразной кривой. Если период колебаний T порядка секунды или больше, то будут видны кратковременные вспышки света, разделенные более продолжительными паузами. Уменьшая R или C, можно получить период T гораздо меньше, и глаз уже не будет различать отдельных вспышек. В рассматриваемом случае автоколебания возникают потому, что существует

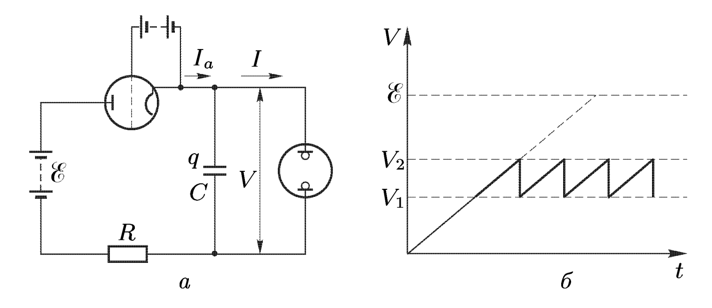


Рис. 319

определенное *время успокоения* (или *время релаксации*) контура $\tau = RC$. По этой причине колебания рассматриваемого типа получили название *релаксационных колебаний.*

Зубцы на пилообразной кривой рис. 318 *в* не прямые. Для многих целей, в особенности в электронных осциллографах, требуются пилообразные напряжения с *прямолинейными зубцами* — напряжение в пределах каждого зубца должно меняться во времени по линейному закону. Этого можно достигнуть, если ввести в цепь, помимо неоновой лампы, *второй нелинейный элемент* — электронную лампу (триод или лучше пентод), как указано на рис. 319 *а*. Через лампу потечет анодный ток $\dot{I}_a = \dot{q}$, практически не зависящий от анодного напряжения. Поэтому во время зарядки заряд на конденсаторе будет меняться во времени по линейному закону: $q = I_a t + \text{const}$. По линейному закону будет меняться и напряжение на конденсаторе C (равное напряжению на неоновой лампе). Поэтому вместо кривой рис. 318 *в* получится такая же кривая, но с прямыми зубцами (рис. 319 *б*).

§ 135. Параметрическое возбуждение колебаний

1. Допустим, что с помощью надлежащего приспособления (например, электрического мотора) индуктивность L или емкость C колебательного контура (или то и другое) периодически меняются во времени. Свободные колебания такой системы описываются уравнением

$$\frac{d\Phi}{dt} + RI + \frac{q}{C} = 0, \tag{135.1}$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(L\frac{dq}{dt}\right) + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \tag{135.2}$$

(см. § 122). При постоянном R это — *линейное дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами*, переходящее в нелинейное, когда сопротивление R зависит от тока I. Аналогичным уравнением описывается и движение механической системы — *качелей.* Качающийся на качелях, приседая и распрямляясь, периодически поднимает и опускает центр масс своего тела и тем самым меняет параметры системы. При определенных условиях все рассмотренные системы становятся *неустойчивыми* — случайно возникшее отклонение от состояния равновесия приводит в них к возникновению и нарастанию колебаний. Это явление, поскольку оно вызывается изменениями параметров системы, называется *параметрическим возбуждением колебаний*, а сами колебания — *параметрическими.*

Нахождение условий возбуждения параметрических колебаний сводится к исследованию решений линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Решение таких уравнений представляет, вообще говоря, очень трудную математическую задачу. Найти решение в конечной аналитической форме обычно не удается. К тому же линейные уравнения позволяют получить *только условие возбуждения колебаний*, но не позволяют решить вопрос об *установлении их стационарной амплитуды*, так как при достаточно больших амплитудах дифференциальные уравнения, описывающие колебания,

становятся *существенно нелинейными.* Мы рассмотрим только возбуждение параметрических колебаний и ограничимся при этом простейшим случаем, когда параметры системы изменяются *скачкообразно*, а в промежутках между этими скачками остаются постоянными. Можно, например, через равные промежутки времени очень быстро раздвигать и сближать пластины плоского конденсатора или растягивать и сжимать спираль, служащую «катушкой самоиндукции» колебательного контура, меняя тем самым скачкообразно величины C и L. «Очень быстро» или «скачкообразно» означает, что за время изменения параметров Δt заряд конденсатора q практически не успевает измениться. Отсюда следует, что за то же время Δt практически не изменится и магнитный поток Φ через катушку самоиндукции. В самом деле, проинтегрировав почленно уравнение (135.1) по промежутку времени Δt, получим

$$\int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{d\Phi}{dt}\, dt + \int\limits_t^{t+\Delta t} RI\, dt + \int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{q}{C}\, dt = 0,$$

или при постоянном сопротивлении R

$$\Delta\Phi + R\Delta q + \int \frac{q}{C}\, dt = 0.$$

Так как по предположению изменение заряда Δq за время Δt пренебрежимо мало, а заряд q во время изменения остается конечным, то при $\Delta t \to 0$ из последнего соотношения следует $\Delta\Phi = \mathrm{const}$. Результат остается верным и в том случае, когда R зависит от силы тока.

2. После этих замечаний возьмем колебательный контур и будем через определенные промежутки времени скачкообразно изменять его индуктивность L, оставляя емкость C неизменной. Таким образом, индуктивность будет принимать два значения, большее из которых обозначим через L_1, а меньшее через L_2. Соответствующие значения собственной частоты колебательного контура обозначим через $\omega_1 = 1/\sqrt{L_1 C}$, $\omega_2 = 1/\sqrt{L_2 C}$, а периоды собственных колебаний — через T_1 и T_2. Для простоты будем считать, что омическое сопротивление контура равно нулю. В контуре всегда текут токи, вызванные случайными внешними наводками или тепловыми флуктуациями. Пусть сначала $L = L_1$. В момент, когда ток в катушке максимален и равен I_{10}, а заряд конденсатора обращается в нуль, скачкообразно уменьшим индуктивность от L_1 до L_2. Так как магнитный поток при этом останется неизменным, то ток возрастет до $I_{20} = (L_1/L_2)I_{10}$. С этого момента начнутся свободные колебания тока $I = I_{20}\cos\omega_2 t$. Через время $t = T_2/4$, когда I обратится в нуль, увеличим L до прежнего значения L_1. Так как во время изменения индуктивности ток через катушку не течет, то амплитуда колебаний не изменится, а изменится только их частота. Колебания тока будут описываться уравнением $I = I_{20}\sin\omega_1 t$. (Условимся время t отсчитывать всякий раз от момента последнего скачкообразного изменения индуктивности.) В момент $t = T_1/4$, когда

ток достигнет максимального значения I_{10}, снова уменьшим индуктивность от L_1 до L_2. В результате амплитуда колебаний сделается равной $I_{30} = (L_1/L_2)I_{20} = (L_1/L_2)^2 I_{10}$. И так будем поступать дальше, уменьшая L всякий раз, когда ток максимален, и увеличивая, когда он проходит через нуль. В результате амплитуда колебаний тока будет неограниченно возрастать в геометрической прогрессии

$$A_0 = A_{10}\left[1 + \frac{L_1}{L_2} + \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 + \ldots\right],$$

несмотря на то, что в системе отсутствуют какие бы то ни было источники тока или напряжения. Такая раскачка колебаний называется *параметрическим резонансом.* Мы видим, что параметрический резонанс возникает, когда параметры системы меняются с частотой, *вдвое большей* собственной частоты этой системы. Но легко видеть, что параметрический резонанс можно получить также, если частоту изменения параметров уменьшить в 2, 3, ... раз. Однако в этом случае он будет выражен слабее.

Совершенно аналогичное явление получится и в том случае, когда с теми же периодами скачкообразно изменять *емкость конденсатора.* При таких изменениях остается постоянным *заряд конденсатора* q, а меняется напряжение на его обкладках $V = q/C$. В момент прохождения заряда через максимум надо уменьшить емкость C, повысив тем самым напряжение V. В момент же, когда q обращается в нуль, надо возвратить емкость C к ее исходному значению. В результате снова возникнет усиление колебаний напряжения V с амплитудой, возрастающей в геометрической прогрессии.

3. Все это легко понять и *с энергетической точки зрения.* Энергия конденсатора $W_e = q^2/(2C)$, а катушки самоиндукции $W_m = \Phi^2/(2L)$. Для возбуждения параметрических колебаний надо уменьшить C, когда заряд конденсатора максимален, и уменьшить L, когда в контуре максимален ток. При таких изменениях электрическая и магнитная энергии увеличиваются соответственно на $\Delta W_e = q^2\Delta(1/2C)$ и $\Delta W_m = \Phi^2\Delta(1/2L)$. Возвращать же C и L к их исходным значениям надо в те моменты, когда обращаются в нуль q и L, так как в этом случае электрическая и магнитная энергии остаются неизменными. Таким образом, в колебательную систему будет периодически вкладываться энергия, что и приводит к раскачке колебаний. Увеличение электрической энергии конденсатора при уменьшении его емкости легко понять на примере плоского конденсатора. Между пластинами конденсатора действуют силы кулоновского притяжения. При раздвижении пластин емкость конденсатора уменьшается и одновременно совершается работа против этих сил. Она-то и идет на увеличение энергии конденсатора. Аналогичное явление имеет место и в случае проволочной спирали, по

которой течет ток. Растягивая спираль, мы уменьшаем ее индуктивность L и одновременно совершаем работу против амперовых сил притяжения между ее витками. В результате совершается положительная внешняя работа, и магнитная энергия тока увеличивается.

Аналогичные рассуждения применимы и к раскачке качелей. Для пояснения возьмем математический маятник, колеблющийся на нити, верхний конец которой пропущен через малое отверстие. Будем втягивать нить, когда маятник проходит через нижнее положение, и настолько же выпускать ее, когда он проходит через крайние положения. В первом случае мы совершаем над маятником положительную работу, сообщая маятнику энергию, а во втором — отрицательную работу, отбирая от него энергию обратно. Однако положительная работа по абсолютной величине превосходит отрицательную. Действительно, натяжение нити максимально, когда колеблющийся маятник проходит через среднее положение, так как это натяжение должно не только уравновесить вес маятника, но и сообщить ему ускорение. Напротив, в крайних положениях натяжение нити минимально, так как здесь оно должно уравновесить только составляющую силы веса вдоль направления нити. Поэтому при равных перемещениях вдоль нити сила натяжения в среднем положении совершит большую работу, чем в крайнем положении. В результате в среднем положении маятник будет получать больше энергии, чем возвращать в крайнем. Поэтому произойдет параметрическая раскачка колебаний. Человек, качающийся на качелях, подобен маятнику: он приседает в крайних положениях и выпрямляется в среднем.

4. Наличие омического сопротивления, пока оно остается постоянным, не вносит никаких затруднений. Надо только учесть, что теперь свободные колебания системы между моментами изменения ее параметров происходят с затуханием. Если выполнено условие, что потери энергии, связанные с этим затуханием, меньше энергии, вкладываемой в систему за тот же промежуток времени, то опять будет происходить раскачка колебаний с амплитудой, возрастающей в геометрической прогрессии. Таким образом, если бы система все время подчинялась линейному дифференциальному уравнению, то при соблюдении указанного условия амплитуда колебаний непрерывно возрастала бы до тех пор, пока не произошел бы «пробой» конденсатора или изоляции подводящих проводов. *Возникновение параметрических колебаний с установившейся амплитудой теория, основанная на линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами, объяснить не может.* Для получения колебаний со стационарной амплитудой в систему приходится вводить проводники с *нелинейной характеристикой*, например катушку с железным сердечником, лампы накаливания и пр. Но тогда дифференциальные уравнения, описывающие систему, становятся *нелинейными.* Из этих уравнений можно получить не только условие возникновения стационарных установившихся колебаний, но и найти их амплитуду.

5. Все изложенное подтверждается опытом. На рис. 320 изображена *емкостная параметрическая машина Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси.* Конденсатор машины состоял из двух систем обкладок — неподвижной (статор) и подвижной (ротор). Статор был изготовлен из 26 квадратных алюминиевых пластин с симметрично расположенными радиальными вырезами, а ротор — из 25 таких же пластин круглой формы с аналогичными вырезами. С помощью мотора ротор можно было приводить во вращение со скоростью до 4000 оборотов в минуту. При этом периодически менялась емкость конденсатора и возбуждались параметрические колебания тока. Для того чтобы сделать систему нелинейной, параллельно конденсатору включалась цепочка из 6 неоновых ламп. При наличии последних на конденсаторе получалось устойчивое напряжение, достигавшее 600–700 В. В отсутствие неоновых ламп напряжение не устанавливалось, а продолжало нарастать до 2000–3000 В, пока не проскакивали искры между обкладками конденсатора. Аналогичные опыты можно произвести и с «индукционной машиной», в которой периодически меняется индуктивность контура.

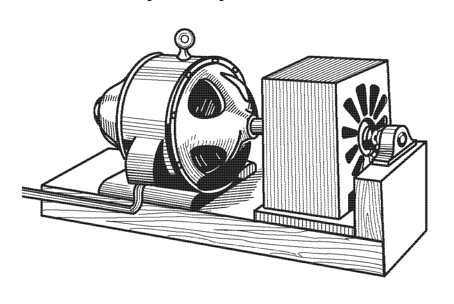


Рис. 320

§ 136. Трансформатор

1. Трансформатор состоит из двух обмоток — *первичной* и *вторичной*, навитых на общий железный сердечник (рис. 321). Уравнения колебаний в такой системе записываются в виде

$$R_1 I_1 = \mathscr{E} - \dot{\Phi}_1, \quad R_2 I_2 = -\dot{\Phi}_2, \tag{136.1}$$

где индексом 1 обозначены величины, относящиеся к первичной, а индексом 2 — к вторичной обмоткам. Для простоты пренебрежем рассеянием магнитного потока, проходящего через железный сердечник трансформатора. В этом предположении

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{n_1}{n_2}, \tag{136.2}$$

где n_1 и n_2 — числа витков в первичной и вторичной обмотках. Записав это соотношение в виде $n_1\Phi_2 = n_2\Phi_1$ и продифференцировав по времени, убеждаемся, что для производных магнитного потока справедливо такое же соотношение:

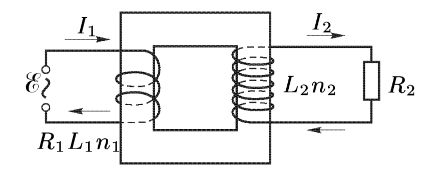


Рис. 321

$$\dot{\Phi}_1/\dot{\Phi}_2 = n_1/n_2.$$

Оно позволяет исключить из уравнений (136.1) магнитные потоки. Таким путем получаем

$$R_1 I_1 - \frac{n_1}{n_2} R_2 I_2 = \mathscr{E}. \tag{136.3}$$

Отсюда видно, что наличие вторичной обмотки меняет ток в первичной цепи. Однако уравнения (136.3) недостаточно для определения двух неизвестных

I_1 и I_2. Для получения недостающего уравнения введем упрощающее предположение, что трансформатор *идеальный*, т. е. не обладает ферромагнетизмом. (В реальных трансформаторах, конечно, это не так.) Тогда связь между магнитными потоками и токами будет линейной:

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + L_{12} I_2, \quad \Phi_2 = L_{21} I_1 + L_2 I_2,$$

где L_1 — индуктивность первичной обмотки, L_2 — вторичной, а $L_{12} = L_{21}$ — коэффициент взаимной индукции этих обмоток. Ввиду (136.2) *при любых токах* I_1 и I_2 соблюдается соотношение

$$n_2(L_1 I_1 + L_{12} I_2) = n_1(L_{21} I_1 + L_2 I_2).$$

Приравнивая коэффициенты при I_1 и I_2, из него находим

$$n_1 L_{21} = n_2 L_1, \quad n_2 L_{12} = n_1 L_2, \tag{136.4}$$

а потому

$$L_{12} L_{21} = L_1 L_2. \tag{136.5}$$

Если воспользоваться еще теоремой взаимности ($L_{12} = L_{2l}$), то получится

$$L_{12} = L_{21} = \sqrt{L_1 L_2}. \tag{136.6}$$

Теперь система уравнений (136.1) принимает вид

$$\begin{aligned} R_1 I_1 &= \mathcal{E} - L_1 \dot{I}_1 - \sqrt{L_1 L_2}\, \dot{I}_2, \\ R_2 I_2 &= -\sqrt{L_1 L_2}\, \dot{I}_1 - L_2 \dot{I}_2. \end{aligned} \tag{136.7}$$

Предположим, далее, что электродвижущая сила $\mathcal{E}$ меняется во времени синусоидально: $\mathcal{E} \sim e^{i\omega t}$. Тогда для установившихся колебаний получится

$$\begin{aligned} &(R_1 + i\omega L_1) I_1 + i\omega\sqrt{L_1 L_2}\, I_2 = \mathcal{E}, \\ &i\omega\sqrt{L_1 L_2}\, I_1 + (R_2 + i\omega L_2) I_2 = 0. \end{aligned} \tag{136.8}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{R_2 + i\omega L_2}{R_1 R_2 + i\omega(L_1 R_2 + L_2 R_1)}\, \mathcal{E}, \\ I_2 &= \frac{-\, i\omega\sqrt{L_1 L_2}}{R_1 R_2 + i\omega(L_1 R_2 + L_2 R_1)}\, \mathcal{E}. \end{aligned} \tag{136.9}$$

Эти формулы и решают задачу о трансформаторе. В практически важном случае омическое сопротивление первичной цепи R_1 мало по сравнению с индуктивным ωL_1. Пренебрегая им, получим

$$I_1 = \frac{R_2 + i\omega L_2}{i\omega L_1 R_2}\, \mathcal{E}, \quad I_2 = -\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\, \frac{\mathcal{E}}{R_2} = -\frac{n_2}{n_1}\, \frac{\mathcal{E}}{R_2}. \tag{136.10}$$

При выводе последнего соотношения было учтено, что индуктивность обмотки пропорциональна квадрату числа витков. Формула делает понятной основную идею трансформатора. Если бы сопротивление R_2 было непосредственно присоединено к источнику электродвижущей силы $\mathcal{E}$, то получился бы ток $\mathcal{E}/R_2$. Трансформатор увеличивает этот ток в n_2/n_1 раз или уменьшает в n_1/n_2 раз. Этот факт обычно выражают несколько иначе. Величина $V_2 = R_2 I_2$ дает падение напряжения на сопротивлении R_2. Ее называют напряжением во вторичной цепи. Из второй формулы (136.10) получаем

$$V_2 = -\frac{n_2}{n_1}\, \mathcal{E}. \tag{136.11}$$

Трансформатор повышает напряжение в n_2/n_1 раз или понижает в n_1/n_2 раз. С этим и связано соответствующее увеличение (или уменьшение) тока в сопротивлении R_2.

2. Что касается тока I_1, то при его рассмотрении удобнее обратиться к векторной диаграмме. Ограничимся случаем $R_1 = 0$. Тогда первое уравнение (136.8) запишется в виде

$$L_1 I_1 + \sqrt{L_1 L_2}\, I_2 = \mathcal{E}/i\omega.$$

Если $R_2 = \infty$, то $I_2 = 0$. В этом случае ток в первичной цепи называется *током холостого хода трансформатора.* Обозначим его через I_0. В нашем случае ($R_1 = 0$) $I_0 = \mathcal{E}/(i\omega L_1)$ и, следовательно,

$$L_1 I_1 + \sqrt{L_1 L_2}\, I_2 = L_1 I_0, \quad \text{или} \quad n_1 I_1 + n_2 I_2 = n_1 I_0. \tag{136.12}$$

Ток холостого хода $I_0 = -i\mathcal{E}/\omega L_1$ отстает по фазе от напряжения на $\pi/2$. Если на векторной диаграмме напряжение изобразить горизонтальным отрезком, направленным вправо, то ток холостого хода I_0 изобразится отрезком, направленным вниз (рис. 322). Ток I_2, как видно из (136.10), изобразится горизонтальным отрезком, направленным влево. Вместо самого тока удобнее откладывать ток, умноженный на соответствующее число витков (так называемые *ампер-витки*). Согласно (136.12) величина $n_1 I_1$ изобразится вектором, равным геометрической разности векторов $n_1 I_0$ и $n_2 I_2$. При увеличении нагрузки (т. е. уменьшении сопротивления R_2) ток I_2, как показывают формулы (136.10), растет. Вместе с ним растет и ток I_1. А так как ток холостого хода остается неизменным, то из рис. 322 следует, что должен уменьшаться сдвиг фаз φ между током I_1 и напряжением $\mathcal{E}$. Оба эти обстоятельства ведут к увеличению потребляемой мощности.

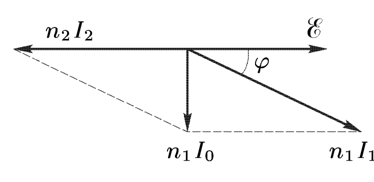


Рис. 322

3. Вычислим среднюю мощность электрической энергии P_0 в первичной цепи. Считая для общности сопротивление R_1 каким угодно, запишем ток I_1 в виде

$$I_1 = \frac{a + ib}{c + id}\,\mathcal{E}.$$

Значения постоянных a, b, c, d легко установить, сравнивая это выражение с первой формулой (136.9). Умножая числитель и знаменатель на $c - id$, получим

$$I_1 = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}\,\mathcal{E}.$$

Отсюда для косинуса сдвига фаз между током I_1 и напряжением $\mathcal{E}$ получим

$$\cos\varphi = \frac{ac + bd}{|(ac + bd) + i(bc + ad)|},$$

а для средней мощности

$$P_0 = \frac{1}{2}\,|\mathcal{E} I_1| \cos\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\,|\mathcal{E}|^2.$$

Подставим сюда значения коэффициентов a, b, c, d. Кроме того, введем отношение индуктивного сопротивления цепи к соответствующему омическому сопротивлению:

$$\alpha_{\text{к}} = \omega L_{\text{к}}/R_{\text{к}}. \tag{136.13}$$

В результате найдем

$$P_0 = \frac{1}{2}\,\frac{1+\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)}{1+(\alpha_1+\alpha_2)^2}\,\frac{|\mathcal{E}|^2}{R_1}, \tag{136.14}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\alpha_1}{1+\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)}. \tag{136.15}$$

Ток отстает по фазе от напряжения на угол $|\varphi|$.

Средняя мощность, *потребляемая в первичной цепи*, будет $P_1 = R_1|I_1|^2/2$, а во вторичной $P_2 = R_2|I_2|^2/2$. Вычисляя их, получим

$$P_1 = \frac{1+\alpha_2^2}{1+(\alpha_1+\alpha_2)^2}\,\frac{|\mathcal{E}|^2}{R_1}, \quad P_2 = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha_1\alpha_2}{1+(\alpha_1+\alpha_2)^2}\,\frac{|\mathcal{E}|^2}{R_1}. \tag{136.16}$$

Таким образом, $P_0 = P_1 + P_2$, как это и должно быть. При неизменных параметрах первичной цепи ($\mathcal{E}$, R_1, α_1) мощность P_2, потребляемая во вторичной цепи, максимальна, когда $\alpha_2 = \sqrt{\alpha_1^2+1}$, или приближенно, когда $\alpha_2 = \alpha_1$, так как в практически важных случаях всегда $\alpha_1 \gg 1$. Максимальное значение P_2 дается приближенным выражением

$$P_{2\,\text{макс}} \approx \frac{1}{8}\,\frac{|\mathcal{E}|^2}{R_1}. \tag{136.17}$$

Мощность тока в первичной цепи при этом будет $P_0 = |\mathcal{E}|^2/(4R_1)$, т. е. вдвое больше. Таким образом, КПД трансформатора составляет всего 50 %. В общем случае КПД дается выражением

$$\eta = \frac{P_2}{P_0} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{1+\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)}. \tag{136.18}$$

При заданном α_1 КПД максимален, когда $\alpha_2 = 1$, т. е. когда омическое сопротивление вторичной цепи равно ее индуктивному сопротивлению. Максимальное значение КПД будет $\eta_{\text{макс}} = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_1+2}$. Если $\alpha_1 \gg 1$, то $\eta_{\text{макс}} \approx 1$. При этом для мощности, потребляемой во вторичной цепи, получаем

$$P_2 \approx \frac{1}{2}\,\frac{|\mathcal{E}|^2}{\alpha_1 R_1} = \frac{1}{2}\,\frac{|\mathcal{E}|^2}{\omega L_1} \approx P_0. \tag{136.19}$$

Мощность холостого хода трансформатора $P_0^{(0)}$ найдется из формулы (136.14), если в ней положить $\alpha_2 = 0$. Это дает

$$P_0^{(0)} = \frac{1}{2(\alpha_1^2+1)}\,\frac{|\mathcal{E}|^2}{R_1} \approx \frac{|\mathcal{E}|^2}{2\alpha_1^2 R_1}, \tag{136.20}$$

$$\frac{P_0}{P_0^{(0)}} = \frac{1+\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)}{1+(\alpha_1+\alpha_2)^2}\,(1+\alpha_1^2) \approx \alpha_1\alpha_2. \tag{136.21}$$

Приближенные выражения, как всегда, получены в предположении $\alpha_1 \gg 1$. Кроме того, последнее выражение предполагает также, что $\alpha_1 \gg \alpha_2$ (чтобы КПД был большим). При максимальной мощности $P_2\alpha_1 = \alpha_2$ и из (136.21) получаем

$$P_0/P_0^{(0)} \approx \alpha_1^2/2. \tag{136.22}$$

Таким образом, при нагрузке трансформатора до максимальной мощности мощность тока в первичной цепи возрастает в $\alpha_1^2/2$ раз по сравнению с мощностью холостого хода, а при нагрузке с максимальным КПД ($\alpha_2 = 1$) — в α_1 раз.

4. Трансформатор применяется не только для повышения или понижения напряжения переменного тока, но и для *передачи электрической энергии на расстояние.* Для исследования этого вопроса рассмотрим два связанных трансформатора, параметры которых обозначены на рис. 323. Запишем урав-

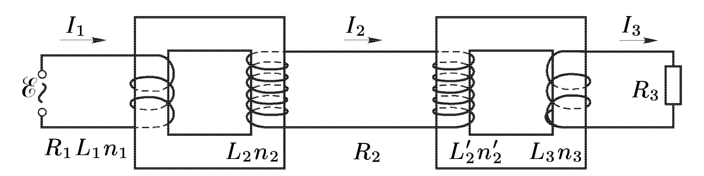


Рис. 323

нения колебаний в них:

$$\begin{aligned} R_1 I_1 &= \mathscr{E} - L_1 \dot{I}_1 - \sqrt{L_1 L_2}\, \dot{I}_2, \\ R_2 I_2 &= -\sqrt{L_1 L_2}\, \dot{I}_1 - L_2 \dot{I}_2 - L_2' \dot{I}_2 - \sqrt{L_2' L_3}\, \dot{I}_3, \\ R_3 I_3 &= -\sqrt{L_2' L_3}\, \dot{I}_2 - L_3 \dot{I}_3. \end{aligned} \tag{136.23}$$

Для уменьшения громоздкости формул предположим, что омическое сопротивление R_1 пренебрежимо мало, и положим $R_1 = 0$. Если, кроме того, электродвижущая сила $\mathscr{E}$ меняется синусоидально, то для установившегося режима получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{(\alpha_2\alpha_3 - 1) - i(\alpha_2 + \alpha_2' + \alpha_3)}{\alpha_2' + \alpha_3 - i}\,\frac{\mathscr{E}}{\omega L_1}, \\ I_2 &= -\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\,\frac{\alpha_3 - i}{\alpha_2' + \alpha_3 - i}\,\frac{\mathscr{E}}{R_2}, \\ I_3 &= \sqrt{\frac{L_2}{L_1}\,\frac{L_3}{L_2'}}\,\frac{\alpha_2'}{\alpha_2' + \alpha_3 - i}\,\frac{\mathscr{E}}{R_3}, \end{aligned} \tag{136.24}$$

где использованы следующие обозначения:

$$\alpha_2 = \frac{\omega L_2}{R_2}, \quad \alpha_2' = \frac{\omega L_2'}{R_2}, \quad \alpha_3 = \frac{\omega L_3}{R_3}. \tag{136.25}$$

Здесь R_2 означает сумму сопротивлений вторичной обмотки первого трансформатора, первичной обмотки второго и соединяющих их проводов. Если $R_2 = 0$, то $\alpha_2' = \infty$ и из последней формулы (136.24) получаем

$$I_3 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}\,\frac{L_3}{L_2'}}\,\frac{\mathscr{E}}{R_3} = \frac{n_2}{n_1}\,\frac{n_3}{n_2'}\,\frac{\mathscr{E}}{R_3}. \tag{136.26}$$

Смысл этой формулы ясен. Первый трансформатор повышает напряжение в n_2/n_1 раз, второй — в n_3/n_2' раз, так что напряжение на выходе второго трансформатора становится равным $\dfrac{n_2}{n_1}\dfrac{n_3}{n_2'}\mathscr{E}$. Если оба трансформатора одинаковы ($n_1 = n_3$, $n_2 = n_2'$), то $I_3 = \mathscr{E}/R_3$. Ток на выходе I_3 получается таким же, как если бы источник напряжения $\mathscr{E}$ был непосредственно замкнут на сопротивление R_3.

Мощность тока в первичной цепи

$$P_0 = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha_2\alpha_3(\alpha_2' + \alpha_3) + \alpha_2}{(\alpha_2' + \alpha_3)^2 + 1}\,\frac{|\mathscr{E}|^2}{\omega L_1}. \tag{136.27}$$

Потребляемые мощности равны соответственно

$$P_1 = 0, \quad P_2 = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha_2(\alpha_3^2 + 1)}{(\alpha_2' + \alpha_3)^2 + 1}\,\frac{|\mathscr{E}|^2}{\omega L_1}, \quad P_3 = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha_2\alpha_2'\alpha_3}{(\alpha_2' + \alpha_3)^2 + 1}\,\frac{|\mathscr{E}|^2}{\omega L_1}. \tag{136.28}$$

Если $R_2 = 0$, то $\alpha_2 = \infty$, $\alpha_2' = \infty$, причем $\alpha_2/\alpha_2' = L_2/L_2'$, т. е. α_2 и α_2' — бесконечно большие одного порядка. Используя это, находим $P_2 = 0$, $P_3 = P_0$. Вся энергия, вырабатываемая в первичной цепи, передается без потерь потребителю.

При неизменных параметрах всех обмоток, за исключением последней, потребляемая мощность P_3 максимальна при $\alpha_3 = \sqrt{1 + \alpha'^2_2}$, или приблизительно при $\alpha_3 = \alpha_2'$. Таким образом,

$$P_{3\,\text{макс}} \approx \frac{\alpha_2|\mathscr{E}|^2}{8\omega L_1}. \tag{136.29}$$

Такова же мощность, теряемая в линии передачи, так что КПД в этом случае составляет всего около 50 %. В общем случае КПД

$$\eta = \frac{P_3}{P_0} = \frac{\alpha_2'\alpha_3}{1 + \alpha_3(\alpha_2' + \alpha_3)} \tag{136.30}$$

достигает максимума при $\alpha_3 = 1$. Если учесть, что $\alpha_2' \gg 1$, то максимальный КПД приблизительно равен $\eta_{\text{макс}} \approx 1$. При этом

$$P_0 = \frac{\alpha_2}{2}\,\frac{\alpha_2' + \alpha_3 + 1}{(\alpha_2' + \alpha_3)^2 + 1}\,\frac{|\mathscr{E}|^2}{\omega L_1} \approx \frac{\alpha_2}{2\alpha_2'}\,\frac{|\mathscr{E}|^2}{\omega L_1},$$
$$P_3 = \frac{\alpha_2}{2}\,\frac{\alpha_2'}{(\alpha_2' + \alpha_3)^2 + 1}\,\frac{|\mathscr{E}|^2}{\omega L_1} \approx \frac{\alpha_2}{2\alpha_2'}\,\frac{|\mathscr{E}|^2}{\omega L_1} \approx P_0. \tag{136.31}$$

Наконец, мощность холостого хода трансформатора ($\alpha_3 = 0$) равна

$$P_0^{(0)} = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha_2}{1 + \alpha'^2_2}\,\frac{|\mathscr{E}|^2}{\omega L_1} \approx \frac{1}{2}\,\frac{\alpha_2}{\alpha'^2_2}\,\frac{|\mathscr{E}|^2}{\omega L_1}. \tag{136.32}$$

Таким образом, при максимальном КПД

$$P_3/P_0^{(0)} \approx \alpha_2'. \tag{136.33}$$

§ 137. Колебания с двумя степенями свободы

1. Рассмотрим электрические колебания в двух колебательных контурах, индуктивно связанных между собой (рис. 324). Будем считать, что нет омических сопротивлений и внешних сил, действующих на систему (свободные колебания). Поскольку колебания в одном контуре влияют на колебания в другом, они называются *связанными колебаниями.* Такие колебания описываются дифференциальными уравнениями

$$\frac{Q_1}{C_1} + L_1\dot{I}_1 + L_{12}\dot{I}_2 = 0, \qquad \frac{Q_2}{C_2} + L_2\dot{I}_2 + L_{21}\dot{I}_1 = 0, \tag{137.1}$$

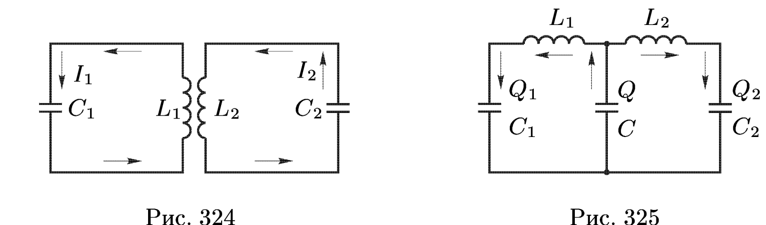


Рис. 324

Рис. 325

или

$$L_1\ddot{Q}_1 + L_{12}\ddot{Q}_2 + \frac{Q_1}{C_1} = 0, \quad L_{21}\ddot{Q}_1 + L_2\ddot{Q}_2 + \frac{Q_2}{C_2} = 0. \tag{137.2}$$

Разрешив эти уравнения относительно производных, приведем их к виду

$$\ddot{Q}_1 + a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 = 0, \quad \ddot{Q}_2 + a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2 = 0, \tag{137.3}$$

где введены обозначения:

$$\begin{gathered} a_{11} = \frac{L_2}{C_1(L_1L_2 - L_{12}L_{21})}, \quad a_{12} = \frac{L_{12}}{C_2(L_1L_2 - L_{12}L_{21})}, \\ a_{21} = -\frac{L_{21}}{C_1(L_1L_2 - L_{12}L_{21})}, \quad a_{22} = \frac{L_1}{C_2(L_1L_2 - L_{12}L_{21})}. \end{gathered} \tag{137.4}$$

Прежде чем идти дальше, рассмотрим такие же колебательные контуры, но с емкостной связью (рис. 325). В этом случае

$$\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q}{C} + L_1\dot{I}_1 = 0, \quad \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q}{C} + L_2\dot{I}_2 = 0. \tag{137.5}$$

Продифференцировав эти уравнения по времени и приняв во внимание, что $I = I_1 + I_2$, или $\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2$, получим

$$\ddot{I}_1 + a_{11}I_1 + a_{12}I_2 = 0, \quad \ddot{I}_2 + a_{21}I_1 + a_{22}I_2 = 0, \tag{137.6}$$

где введены обозначения:

$$\begin{gathered} a_{11} = \frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C}\right), \quad a_{12} = \frac{1}{L_1C}, \\ a_{21} = \frac{1}{L_2C}, \quad a_{22} = \frac{1}{L_2}\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C}\right). \end{gathered} \tag{137.7}$$

Мы видим, что в обоих случаях колебания описываются *однотипными системами* линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. К уравнениям такого же типа приводит задача о малых колебаниях механических систем с двумя степенями свободы, например двух *связанных маятников.* Целесообразно рассмотреть все эти колебания совместно. Поэтому мы не будем конкретизировать колебательную систему, а предположим только, что

ее конфигурация определяется какими-то координатами x_1 и x_2 подчиняющимися системе дифференциальных уравнений

$$\ddot{x}_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0, \quad \ddot{x}_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0, \tag{137.8}$$

где a_{ik} — постоянные коэффициенты. Значения этих коэффициентов, как и смысл координат x_1 и x_2, устанавливаются в каждом конкретном случае в отдельности.

2. Попытаемся сначала найти частное решение системы уравнений (137.8):

$$x_1 = A_1 e^{i\omega t}, \quad x_2 = A_2 e^{i\omega t}, \tag{137.9}$$

где A_1 и A_2 — постоянные. После подстановки в (137.8) получаем

$$(a_{11} - \omega^2)A_1 + a_{12}A_2 = 0, \quad a_{21}A_1 + (a_{22} - \omega^2)A_2 = 0. \tag{137.10}$$

Такая система линейных однородных уравнений имеет отличное от нуля решение только при выполнении условия

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{137.11}$$

Это — квадратное уравнение относительно ω^2. Обозначим его корни через ω_1^2 и ω_2^2. Не представляет труда показать, что в обоих примерах, приведенных выше, оба эти корня вещественны и притом положительны. В общем случае, когда система не конкретизирована, условие вещественности и положительности корней должно быть введено в качестве независимого требования, которому должны удовлетворять коэффициенты a_{ik}. Для ω получаются четыре значения: $\pm\omega_1$ и $\pm\omega_2$. Однако введение отрицательных ω не дает ничего нового. Действительно, коэффициенты уравнений (137.8) *вещественны* и нас должны интересовать лишь *вещественные решения* этих уравнений. Но вещественные части выражений $Ae^{i\omega t}$ и $Ae^{-i\omega t}$ имеют один и тот же вид, а именно $C\cos(\omega t + \delta)$, где C и δ — произвольные постоянные. Поэтому, не теряя общности, можно ограничиться лишь положительными корнями ω_1 и ω_2.

Как видно из (137.10), коэффициенты A_1 и A_2 не независимы. Их отношение однозначно определяется значениями коэффициентов a_{ik} и частоты ω:

$$h \equiv \frac{A_2}{A_1} = \frac{\omega^2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\omega^2 - a_{22}}. \tag{137.12}$$

Соответственно двум значениям частоты ω получаются и два значения отношения h, обозначаемые в дальнейшем через h_1 и h_2. Таким образом, мы нашли два частных решения уравнений (137.8).

Первое решение: $x_1 = e^{i\omega_1 t}$, $x_2 = h_1 e^{i\omega_1 t}$.

Второе решение: $x_1 = e^{i\omega_2 t}$, $x_2 = h_2 e^{i\omega_2 t}$.

Общее решение выражается *линейной комбинацией* этих двух частных решений с постоянными коэффициентами, т. е.

$$x_1 = C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{i\omega_2 t}, \quad x_2 = h_1 C_1 e^{i\omega_1 t} + h_2 C_2 e^{i\omega_2 t}, \tag{137.13}$$

где C_1 и C_2 — произвольные комплексные постоянные. Они определяют *амплитуды* и *фазы колебаний* и могут быть найдены из *начальных условий*: по двум значениям x_1 и x_2 и их производных в момент времени $t = 0$.

Введем обозначения:

$$\xi_1 = C_1 e^{i\omega_1 t}, \quad \xi_2 = C_2 e^{i\omega_2 t}. \tag{137.14}$$

Тогда

$$x_1 = \xi_1 + \xi_2, \quad x_2 = h_1\xi_1 + h_2\xi_2, \tag{137.15}$$

$$\xi_1 = \frac{h_2 x_1 - x_2}{h_2 - h_1}, \quad \xi_2 = \frac{-h_1 x_1 + x_2}{h_2 - h_1}. \tag{137.16}$$

Отсюда видно, что ξ_1 и ξ_2 могут быть приняты за *новые координаты*, определяющие *конфигурацию системы.* Координата ξ_1 совершает гармонические колебания с частотой ω_1 а координата ξ_2 — с частотой ω_2. Эти координаты называются *нормальными координатами*, а совершаемые ими колебания — *нормальными колебаниями* или *модами.* Таким образом, в общем случае *колебание системы представляет собой суперпозицию двух нормальных колебаний с частотами* ω_1 и ω_2.

3. Рассмотрим симметричный случай, когда $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = a_{21}$. В примерах, приведенных выше (см. рис. 324 и 325), такой случай реализуется, когда параметры обоих колебательных контуров одинаковы. Уравнение (137.11) в этом случае переходит в $(\omega^2 - a_{11})^2 = a_{12}^2$, и, следовательно,

$$\omega_1^2 = a_{11} + a_{12}, \quad \omega_2^2 = a_{11} - a_{12}, \quad h_1 = 1, \quad h_2 = -1,$$

$$x_1 = \xi_1 + \xi_2, \quad x_2 = \xi_1 - \xi_2, \quad \xi_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \xi_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}.$$

Например, в случае рис. 325 получаем

$$\omega_1^2 = \frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{2}{C}\right), \quad \omega_2^2 = \frac{1}{L_1 C_1}.$$

Последнюю формулу легко понять. Действительно, пусть в системе совершается только нормальное колебание с частотой ω_2, а колебание с частотой ω_1 не возбуждено. Это значит, что $2\xi_1 = I_1 + I_2 = I = 0$, т. е ток через конденсатор C не течет. Поэтому на колебания с частотой ω_2 конденсатор C не оказывает никакого влияния. Система ведет себя как один колебательный контур, в котором катушки самоиндукции и конденсаторы соединены последовательно. Результирующая индуктивность такого контура $2L_1$, емкость $C_1/2$, а собственная частота $\omega = 1/\sqrt{L_1 C_1} = \omega_2$.

4. Интересное явление наблюдается в симметричном случае, когда связь между обеими подсистемами, из которых состоит сложная система, *слабая.* В этом случае, ввиду малости коэффициента a_{12}, частоты нормальных колебаний ω_1 и ω_2 мало отличаются друг от друга. Одна из них немного больше, а другая немного меньше собственной частоты подсистемы $\omega_0 = \sqrt{a_{11}}$. Колебания координат x_1 и x_2 представляются

суперпозицией нормальных колебаний с мало отличающимися частотами. На протяжении нескольких колебаний обе координаты x_1 и x_2 колеблются почти так, как если бы связи не было. Наличие слабой связи приводит к возникновению *биений*, схематически изображенных на рис. 294. Когда амплитуда координаты x_1 проходит через максимум, амплитуда координаты x_2 обращается в нуль, и наоборот. Явление легко демонстрируется с помощью двух одинаковых математических маятников, между которыми установлена слабая связь. Отклонив первый маятник, наблюдают, что амплитуда его колебаний медленно убывает и второй маятник также начинает колебаться. На протяжении нескольких десятков периодов колебания первого маятника полностью затухнут, а колебания второго станут максимальными. После этого начнется затухание колебаний второго маятника. Первый маятник, наоборот, начнет раскачиваться, и по истечении такого же числа десятков периодов его амплитуда вернется к исходному значению. Затем процесс передачи колебаний от одного маятника к другому будет повторяться, пока в результате действия сил трения колебания не прекратятся.

5. Затухающие собственные колебания в связанных системах рассматриваются так же, как и незатухающие. Надо только ввести в уравнения (137.6) линейные члены, содержащие первые производные $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$. Можно также рассмотреть вынужденные колебания, введя внешние силы, действующие на систему. Это делается так же, как и в случае системы с одной степенью свободы. Наконец, когда число степеней свободы системы n больше двух, то для задания ее конфигурации требуется n координат. Если эти координаты описываются линейными уравнениями типа (137.8), то всякое колебание системы также представится суперпозицией *нормальных колебаний с n частотами*. Некоторые из этих частот могут совпадать. Тогда говорят о *вырождении*. Вырожденный случай можно свести к невырожденному. Для этого надо «снять вырождение», т. е. слегка изменить коэффициенты уравнений, а затем совершить предельный переход к первоначальным значениям этих коэффициентов.

§ 138. Волновое уравнение

1. Об *электромагнитных возмущениях*, или *волнах*, уже говорилось в § 83. Там на примере плоского возмущения было выяснено, как возбуждаются электромагнитные волны, и вычислена скорость их распространения. Вернемся снова к этому вопросу, чтобы придать изложению математически более простой и систематический характер. Кроме того, мы рассмотрим некоторые новые вопросы. Многие вопросы, относящиеся к учению о волнах (отражение, преломление, интерференция, дифракция, дисперсия и пр.), мы сознательно опускаем, так как они будут подробно рассмотрены в следующем томе.

Начнем с простой механической аналогии. Если ударить по какому-либо месту натянутого шнура, то от места удара в противоположных направлениях побегут два поперечных возмущения. Рассмотрим одно

из них, например возмущение, распространяющееся вправо. Положение невозмущенного натянутого шнура примем за ось X. Тогда каждую материальную точку шнура можно характеризовать абсциссой x, которую она имела на невозмущенном шнуре, а само возмущение — смещением s этой точки из положения равновесия, как функции координаты x и времени t: $s = s(x, t)$. Однако эта функция зависит не от x и t в отдельности, а от определенной комбинации их, которая будет найдена ниже. На рис. 326 вверху изображено положение возмущенного шнура в момент времени $t = 0$. Эта начальная форма шнура может быть представлена уравнением $s(\xi, 0) = f(\xi)$, где ξ — абсцисса какой-то произвольной материальной точки шнура $A(\xi)$. Через время t возмущение на шнуре переместится вправо на расстояние $OO' = vt$, где v — *скорость распространения возмущения.* Это значит, что смещение $s(x, t)$ точки $A(x)$ с координатой x в момент t будет таким же, каким было смещение точки $A(\xi)$ с координатой ξ в момент $t = 0$, если только $x - \xi = vt$, т. е. $s(x, t) = s(\xi, 0) = f(\xi) = f(x - vt)$. Таким образом, опуская аргументы x и t в функции $s(x, t)$, находим для смещения s следующее выражение:

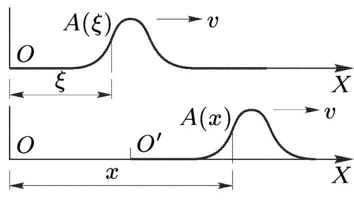


Рис. 326

$$s = f(x - vt). \tag{138.1}$$

Следовательно, если возмущение распространяется вправо, то величина смещения s зависит только от комбинации аргументов $x - vt$. Если эта комбинация остается постоянной, то будет оставаться постоянным и смещение s. Это значит, что уравнение $x - vt = \text{const}$ есть *уравнение фронта распространяющегося возмущения.* Дифференцируя его по t, находим $dx/dt = +v$, т. е. v, как и должно быть, есть скорость распространения волнового фронта.

Таким же путем убеждаемся, что возмущение, распространяющееся влево, описывается уравнением

$$s = f(x + vt). \tag{138.2}$$

Если же возмущение идет и вправо, и влево, то

$$s = f_1(x - vt) + f_2(x + vt). \tag{138.3}$$

Вид функций f_1 и f_2 определяется *начальными условиями*, т. е. заданием начальной формы шнура и начального распределения скоростей, а потому может быть весьма разнообразным.

2. Можно получить уравнение, *совсем не содержащее начальных условий*, а потому пригодное для описания распространения любых волновых возмущений в шнуре. В этом отношении оно аналогично уравнениям Ньютона в механике, которые также не содержат начальных условий. Независимость от начальных условий связана с тем, что это уравнение (как и уравнение, выражающее второй закон Ньютона) *дифференциальное.* Для его получения дифференцируем выражение

(138.1) сначала по x, а затем по t и находим

$$\frac{\partial s}{\partial x} = f', \quad \frac{\partial s}{\partial t} = f'\frac{\partial(x-vt)}{\partial t} = -vf',$$

где f' означает производную по аргументу $x - vt$, от которого зависит функция f. Исключая f', находим

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{1}{v}\,\frac{\partial s}{\partial t}.$$

Это уравнение не содержит начальных условий. Однако оно описывает не все возмущения, а только *возмущения, распространяющиеся вправо.* Возмущения, распространяющиеся влево, описываются таким же уравнением, но со знаком плюс в правой части. Для нахождения уравнения, справедливого для обоих возмущений, а также их суперпозиции (138.3), дифференцируем вторично и находим

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = f'', \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -vf''\frac{\partial(x-vt)}{\partial t} = v^2 f'',$$

или после исключения f''

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0. \qquad (138.4)$$

Легко убедиться, что такому же уравнению удовлетворяет и возмущение (138.2), а также более общее возмущение (138.3). Дифференциальное уравнение (138.4) называется *волновым уравнением.* Оно справедливо для любых возмущений, распространяющихся в шнуре.

Выражение (138.3), в котором f_1 и f_2 — произвольные функции, есть *общее решение* волнового уравнения (138.4). Чтобы убедиться в этом, введем новые независимые переменные $\xi = x - vt$ и $\eta = x + vt$. В этих переменных уравнение (138.4) принимает вид

$$\frac{\partial^2 s}{\partial\xi\partial\eta} = 0.$$

Общее решение его $s = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, и наше утверждение доказано. Следовательно, всякий процесс, описываемый волновым уравнением (138.4), в общем случае представляет собой два возмущения, распространяющихся со скоростью v в противоположных направлениях оси X.

3. Приведем два примера на применение уравнения (138.4). Выведем уравнение малых поперечных колебаний гибкого натянутого шнура, исходя из уравнений механики. Будем считать, что вся упругость шнура вызвана его *натяжением* T, упругостью формы пренебрегаем. На элемент AB шнура (рис. 327) слева действует сила натяжения $T(x)$. Ее вертикальная составляющая будет $-T(x)\,\mathrm{tg}\,\alpha = T(x)\partial s/\partial x$ (положительное направление выбрано вверх). Аналогичная сила действует на правый конец элемента AB. Результирующая

Рис. 327

этих двух сил будет

$$\left(T\frac{\partial s}{\partial x}\right)_B - \left(T\frac{\partial s}{\partial x}\right)_A = \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial s}{\partial x}\right)dx.$$

Для малых колебаний угол α будет мал, и можно пренебречь изменением натяжения T вдоль шнура. В этом приближении предыдущее выражение переходит в $T\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2}\,dx$. Кроме того, можно также пренебречь изменениями линейной плоскости шнура δ при его удлинениях и сжатиях. Приравняв массу элемента $\delta\,dx$, умноженную на его ускорение $\partial^2 s/\partial t^2$, действующей силе, находим

$$\delta\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}.$$

Это уравнение совпадает с (138.4), а потому для скорости распространения v в шнуре получаем

$$v = \sqrt{T/\delta}. \qquad (138.5)$$

Такая формула уже была выведена нами другим способом (см. т. I, § 84). Совершенно так же могут быть выведены формулы для скорости распространения упругих возмущений в стержнях, в неограниченных упругих средах, а также в жидкостях и газах (см. т. I, § 81, 83, 85).

В качестве второго примера рассмотрим плазму в постоянном магнитном поле B, обладающую достаточно высокой проводимостью. Выделим в ней какую-либо тонкую силовую трубку. Если плазма сместится поперек магнитного поля, то благодаря высокой проводимости ее магнитный поток через поперечное сечение трубки сохранится (см. § 71). Магнитные силовые линии как бы *вморожены в вещество* и движутся вместе с ним. Но вдоль магнитной трубки действует максвелловское натяжение $\tau = B^2/8\pi$. Поэтому в плазме вдоль магнитных силовых линий могут распространяться *поперечные возмущения*, аналогичные возмущениям в натянутом шнуре. Такие возмущения называются *магнитогидродинамическими* или *альфвеновскими волнами.* Они были теоретически предсказаны Альфвеном (р. 1908). Есть, однако, отличие гидродинамических волн от волн в натянутом шнуре. Оно состоит в том, что магнитная силовая трубка подвергается не только продольному натяжению, но и равному ему боковому давлению (рис. 328 *а*). Однако боковое давление легко исключить. Для этого к основаниям элемента трубки надо приложить натяжение τ и равное ему давление. Эти напряжения ничего не меняют, так как они взаимно компенсируют друг друга. Но тогда система максвелловских натяжений сведется к продольному натяжению $2\tau = B^2/4\pi$ и всестороннему давлению τ (рис. 328 *б*). Всесторон-

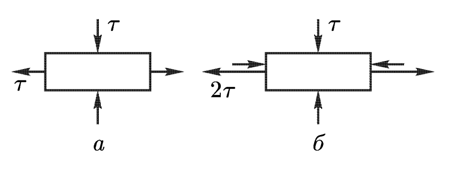


Рис. 328

нее давление на распространение поперечных возмущений не влияет. Поэтому можно воспользоваться формулой (138.5), полагая в ней $T = 2S\tau$, $\delta = S\rho$, где S — площадь поперечного сечения магнитной трубки, а ρ — плотность плазмы. Таким путем для скорости распространения магнитогидродинамических волн найдем

$$v = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}}. \tag{138.6}$$

4. Уравнение (138.4) есть «одномерное» волновое уравнение, поскольку оно относится к распространению процессов только *вдоль одного направления*, а величина s, характеризующая описываемый процесс, зависит только от одной пространственной координаты x и времени t. Волновые процессы, распространяющиеся в пространстве, описываются *«трехмерным»* волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0. \tag{138.7}$$

Однако, как правило, мы этим уравнением пользоваться не будем.

§ 139. Плоские электромагнитные волны

1. Пусть в неограниченной однородной среде распространяется *без поглощения* какое-то электромагнитное возмущение. Отсутствие поглощения означает, что при любом возмущении в среде не выделяется джоулево тепло. Следовательно, величина $\mathbf{jE} = \lambda \mathbf{E}^2$ должна обращаться в нуль, каково бы ни было поле $\mathbf{E}$. Это возможно тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$, т. е. когда среда является диэлектриком. Допустим, кроме того, что объемных электрических зарядов в среде нет. Тогда уравнения Максвелла примут вид

$$\begin{gathered} \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\dot{\mathbf{D}}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}}, \\ \operatorname{div}\mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \end{gathered} \tag{139.1}$$

Рассмотрим частное решение их, когда все величины зависят только от x и t. Переходя к координатной форме, получим в этом случае

$$\begin{gathered} \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial D_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial D_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial D_x}{\partial x} = \frac{\partial D_x}{\partial t} = \frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0. \end{gathered} \tag{139.2}$$

Из последних четырех уравнений следует, что D_x и B_x не зависят от x и t, т. е. величины постоянные. Это — *статические поля*, накладывающиеся на переменное поле электромагнитного возмущения. Они

не влияют на распространение возмущения и могут быть отброшены без ущерба для общности. Оставшиеся четыре уравнения распадаются на две группы *независимых уравнений.* В одну из них входят y-составляющие электрического поля и z-составляющие магнитного поля, в другую — z-составляющие электрического и y-составляющие магнитного поля. Обе эти группы *однотипны*, а потому можно ограничиться рассмотрением одной из них. В качестве таковой возьмем систему уравнений, содержащую E_y и H_z. С помощью соотношений $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ преобразуем ее к виду

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\varepsilon}{c}\,\frac{\partial E}{\partial t}, \quad \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\mu}{c}\,\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{139.3}$$

причем мы опустили у полей индексы y и z, предполагая, что вектор $\mathbf{E}$ направлен параллельно оси Y, а вектор $\mathbf{H}$ — параллельно оси Z. Дифференцируя первое уравнение по t, а второе по x, исключаем H и находим

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \tag{139.4}$$

Аналогично,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0, \tag{139.5}$$

где введено обозначение

$$v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{139.6}$$

Таким образом, векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ удовлетворяют *одному и тому же волновому уравнению.* Это доказывает, что рассматриваемое возмущение состоит из плоских волн, распространяющихся со скоростью v параллельно оси X. Возмущение поперечно, т. е. векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ перпендикулярны к оси X, вдоль которой происходит распространение. Возьмем волну, распространяющуюся в положительном направлении оси X:

$$E = f(x - vt), \quad H = g(x - vt). \tag{139.7}$$

Тогда $\partial E/\partial t = -vf'$, $\partial H/\partial x = g'$ и после подстановки в первое уравнение (139.3) получится $g' = (\varepsilon v/c)f'$. Интегрируя это соотношение и опуская постоянные интегрирования (имеющие смысл статических полей, не представляющих интереса в рассматриваемом вопросе), придем к соотношению $g = (\varepsilon v/c)f$, или $H = (v/c)D$. Аналогично поступаем со вторым уравнением (139.3). Таким образом,

$$H = \frac{v}{c}\,D, \quad E = \frac{v}{c}\,B, \tag{139.8}$$

или в векторной форме

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\,[\mathbf{vD}], \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\,[\mathbf{vB}], \tag{139.9}$$

где $\mathbf{v}$ — вектор скорости, с которой распространяется электромагнитное возмущение.

Векторы **E**, **B**, **v** (а также векторы **D**, **H**, **v**) *взаимно перпендикулярны и образуют правовинтовую систему.* Взаимное расположение их показано на рис. 329 *а*. Это правовинтовое соотношение указанных векторов есть *внутреннее свойство* бегущей электромагнитной волны,

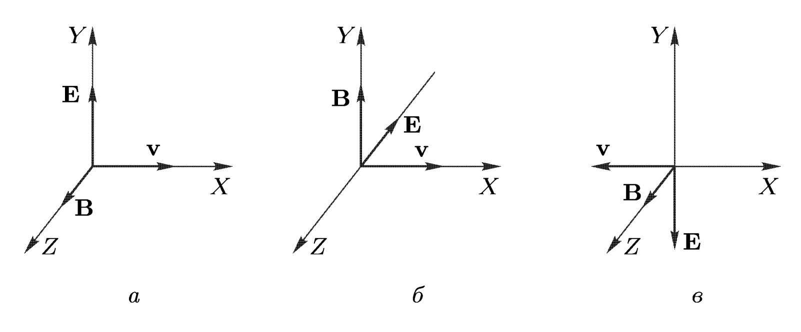


Рис. 329

не зависящее ни от какой координатной системы. Повернем на рис. 329 *а* тройку векторов **E**, **B**, **v** вокруг оси X на 90°. Получится расположение, представленное на рис. 329 *б*. Теперь электрический вектор будет направлен по оси Z, а магнитный — по оси Y. Такому расположению соответствует вторая группа уравнений, входящая в систему (139.2). Мы видим, что действительно нет необходимости в особом исследовании этой группы. Повернем, далее, тройку векторов **E**, **B**, **v** на рис. 329 *а* вокруг оси Z на 180°. Получится расположение, приведенное на рис. 329 *в*, которому соответствует волна, распространяющаяся влево. Таким образом, нет необходимости особо рассматривать и эту волну.

2. Вид функции f (или g) в плоской бегущей электромагнитной волне зависит от *начальных условий* и может быть каким угодно. Особо важное значение имеют *синусоидальные*, или *монохроматические*, *волны.* Они могут быть представлены в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega(t - x/v), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos \omega(t - x/v), \tag{139.10}$$

где $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ — постоянные, называемые *амплитудами волны.* Если ввести обозначение

$$k = \omega/v, \tag{139.11}$$

то

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kx), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t - kx). \tag{139.12}$$

Величина k называется *волновым числом.* Если фиксировать координату x, то получатся синусоидальные функции времени, описывающие гармонические колебания с круговой частотой ω. Напротив, если фиксировать время t, то получится синусоидальное распределение поля **E**,

$\mathbf{H}$ в пространстве в рассматриваемый момент времени. Пространственный период поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ называется *длиной волны*. Он равен

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{\nu}. \tag{139.13}$$

Можно записать бегущую монохроматическую электромагнитную волну *в векторной форме*, не содержащей никаких координат. Для этого введем единичный вектор $\mathbf{N}$ нормали к фронту волны AB, т. е. к плоскости постоянной фазы $\omega t - kx = \text{const}$. Тогда, как видно из рис. 330, $x = (\mathbf{Nr})$ и, следовательно, $kx = (\mathbf{kr})$, где $\mathbf{k} = k\mathbf{N}$ — так

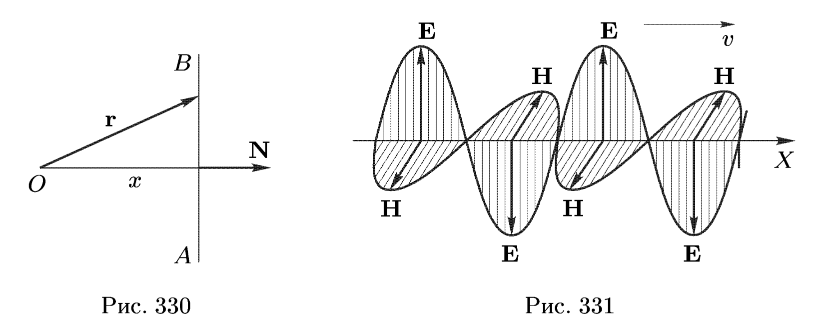


Рис. 330 Рис. 331

называемый *волновой вектор*. В результате получится

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr}), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr}), \tag{139.14}$$

или в комплексной форме

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}. \tag{139.15}$$

Здесь $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ уже могут быть *комплексными*, что означает введение начальных фаз. Однако, ввиду соотношений (139.8) или (139.9), в бегущей монохроматической волне электрический и магнитный векторы всегда колеблются *в одинаковых фазах*. Вид такой волны в пространстве в какой-либо момент времени изображен на рис. 331. Чтобы составить представление об изменении поля во времени, надо вообразить, что весь рисунок равномерно движется вправо со скоростью v. Чтобы получить волну, распространяющуюся влево, надо изменить на противоположное направление одного из векторов: $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$.

§ 140. Стоячие волны

1. Пусть в натянутом шнуре слева направо распространяется поперечная синусоидальная волна $s_1 = a\cos(\omega t - kx)$. Если изменить знак у kx, то получится волна $s_2 = a\cos(\omega t + kx)$, распространяющаяся справа налево. Такую волну можно получить, если отразить от конца шнура первую волну. Поэтому волну s_1 можно назвать *падающей*, а волну s_2 — *отраженной*. Никакой добавочной фазы в выражение для отраженной волны можно не вводить, если условиться помещать начало координат в точке шнура, в которой падающая и отраженная

волны находятся в одинаковых фазах. Это и предполагается в дальнейшем. Предположим, что отражение полное, т. е. амплитуды падающей и отраженной волн одинаковы. От наложения таких волн возникает возмущение

$$s = s_1 + s_2 = 2a \cos kx \cos \omega t, \tag{140.1}$$

называемое *стоячей волной.* В этом возмущении каждая точка шнура, характеризуемая координатой x, совершает гармоническое колебание с частотой ω и амплитудой $2a \cos kx$. Амплитуда таких колебаний обращается в нуль в тех точках, где $\cos kx = 0$. Такие точки называются *узлами смещения.* Посередине между двумя соседними узлами амплитуда колебаний $2a \cos kx$ максимальна, соответствующие точки называются *пучностями смещения.* Расстояние Δx между двумя соседними узлами или пучностями определится из условия $k\Delta x = \pi$, откуда $\Delta x = \pi/k = \lambda/2$. Все точки между двумя соседними узлами колеблются в одинаковых фазах. Они одновременно проходят через положение равновесия и одновременно достигают максимума. При переходе через узел знак s меняется на противоположный. Это значит, что при этом фаза колебания скачкообразно изменяется на π. Однако такой скачок не ведет к нарушению непрерывности колебательного процесса, так как он совершается при нулевой амплитуде. Картина колебаний в стоячей волне представлена на рис. 332. Две синусоиды на этом рисунке изображают крайние положения, которых достигает шнур при своих колебаниях, стрелками указано направление движения, которое возникает из этих крайних положений. Узлы смещения как бы разделяют шнур на автономные области, в которых совершаются *независимые гармонические колебания.* Никакой передачи движения от одной области к другой, а следовательно, и перетекания энергии через узлы не происходит. Иначе говоря, нет никакого распространения возмущения вдоль шнура. Вот почему возмущение, представляемое выражением (140.1), называется *стоячей волной.* Заметим еще, что в узлах смещения максимальны производные $\partial s/\partial x$, т. е. *деформации шнура*, а в пучностях смещения $\partial s/\partial x = 0$. Поэтому узлы смещения являются *пучностями деформации*, а пучности смещения — *узлами деформации.*

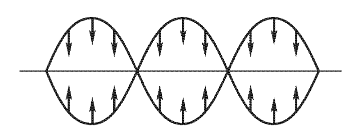


Рис. 332

2. Выше мы рассуждали так, как если бы длина шнура была не ограничена. В этом случае частота ω, а следовательно, и длина волны $\lambda = vT$ могут быть какими угодно. Не то будет, когда оба конца шнура закреплены. Если в шнуре с закрепленными концами возбудить какое-то произвольное возмущение и затем предоставить его самому себе, то это возмущение побежит в обе стороны и начнет отражаться от концов шнура. В шнуре возникнет довольно сложное *нестационарное движение. Стационарное движение в виде стоячей волны возможно лишь при вполне определенных частотах.* Дело в том, что на закрепленных концах шнура должны выполняться определенные *граничные*

условия: в них смещение s все время должно равняться нулю. Значит, если в шнуре возбуждена стоячая волна, то концы шнура должны быть ее узлами. Отсюда следует, что на длине шнура l должно укладываться целое число полуволн: $l = n\lambda/2$, откуда

$$\lambda = \frac{2l}{n}, \quad \omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{\partial v}{l}\, n. \tag{140.2}$$

Целое число n может быть каким угодно. Получается бесконечный набор возможных типов стационарных колебаний, которым соответствует дискретный ряд частот. Эти колебания называются *собственными* или *нормальными* колебаниями шнура. Они имеют такой же смысл, что и нормальные колебания, или моды, введенные в § 137 для дискретных систем. В шнуре возможных типов нормальных колебаний получилось бесконечно много. Это связано с тем, что шнур рассматривается как непрерывная система, обладающая *бесконечным числом степеней свободы.* Собственное колебание с наинизшей частотой $\omega = \pi v/l$ называется *основным колебанием*, все остальные собственные колебания — *обертонами* или *гармониками.*

Все изложенное справедливо и для колебаний упругих стержней, как продольных, так и поперечных. Только здесь спектр возможных собственных колебаний богаче. Дело в том, что концы стержня могут быть либо *закреплены*, либо *свободны.* В первом случае не получается ничего нового по сравнению с натянутым шнуром. Во втором случае на концах стержня должны быть *пучности смещения*, а все остальное остается по-старому. Наконец, возможен случай, когда один конец стержня закреплен, а второй свободен. В этом случае основному колебанию соответствует длина волны, равная четверти длины стержня. Длины волн прочих собственных колебаний определяются формулой

$$l = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2}\, n, \tag{140.3}$$

где n — целое число. На рис. 333 *а*, *б* приведены первые два собственных колебания для стержня с закрепленными и свободными концами, а на рис. 333 *в* — для стержня, один конец которого закреплен, а другой свободен. Различные типы собственных колебаний в натянутом шнуре можно наблюдать, если конец M длинного резинового жгута закрепить в стене, а другой конец N взять в руку и привести в колебание (рис. 334). При надлежащей частоте колебаний руки и натяжении жгута удается возбудить основное колебание и несколько

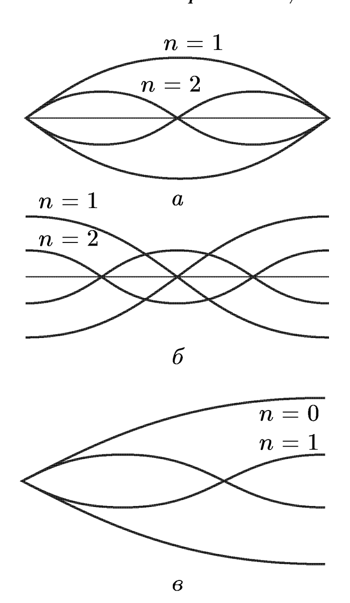


Рис. 333

его первых гармоник. При этом рука не находится в узле M', а несколько смещена относительно него. Из рис. 334 видно, что отношение OA/NP тем больше, чем меньше это смещение. Это значит, что при неизменной амплитуде колебаний руки колебания в жгуте возбудятся тем сильнее, чем ближе точка приложения силы руки к узлу стоячей волны. Бесконечно малой силой можно возбудить колебания конечной амплитуды, если силу приложить бесконечно близко к узлу. Но в этом случае на длине шнура укладывается целое число полуволн, а частота приложенной силы совпадает с одной из собственных частот шнура. Поэтому указанное сильное возбуждение колебаний есть не что иное, как явление резонанса.

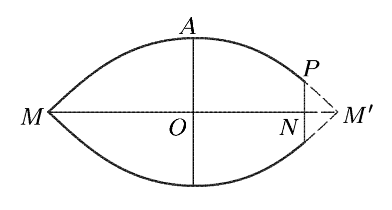


Рис. 334

3. Все сказанное о стоячих волнах в шнуре и стержнях относится и к *электромагнитным волнам.* В этом случае, однако, волна характеризуется не одним вектором, а двумя взаимно перпендикулярными векторами **E** и **H**. Пусть волна распространяется в положительном направлении оси X и представляется уравнениями

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx),$$
$$H_z = H_0 \cos(\omega t - kx).$$

Волну, распространяющуюся в обратном направлении, можно получить отсюда, если изменить знаки у k и одного из векторов **E** или **H**, например магнитного. Это дает

$$E_y = E_0 \cos(\omega t + kx), \quad H_z = -H_0 \cos(\omega t + kx).$$

В результате суперпозиции с предыдущей волной получится

$$E_y = 2E_0 \cos kx \cos \omega t, \quad H_z = 2H_0 \sin kx \sin \omega t. \qquad (140.4)$$

Это и есть *стоячая электромагнитная волна.* Она состоит из двух стоячих волн: *электрической* и *магнитной.* Мы видим, что колебания электрического поля сдвинуты по фазе относительно колебаний

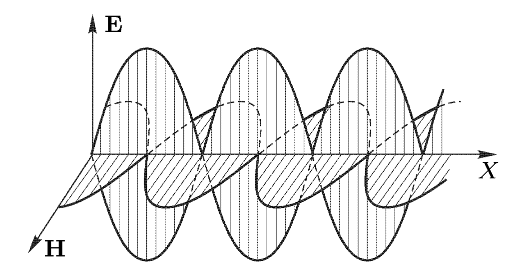


Рис. 335

магнитного поля на $\pi/2$. Кроме того, пучности электрического поля совпадают с узлами магнитного поля, а узлы — с пучностями (рис. 335). Вектор Пойнтинга обращается в нуль в узлах (а следовательно, и в пучностях) как электрического, так и магнитного поля. Поэтому электромагнитная энергия не переходит ни через один из этих узлов. Ее движение ограничено колебаниями между узлом (пучностью) электрического поля и пучностью (узлом) магнитного поля.

§ 141. Поле излучения диполя Герца

1. Простейшей системой, излучающей электромагнитные волны, является точечный диполь, дипольный момент которого быстро меняется (колеблется) во времени. Такой диполь называется *диполем Герца*, по имени ученого, впервые рассчитавшего его электромагнитное поле. Задача об излучении диполя Герца в теории излучающих систем имеет особое значение. Дело в том, что всякую реальную излучающую систему — антенну, по которой течет переменный ток, — можно мысленно разложить на элементы тока, каждый из которых излучает, как диполь Герца. Путем суперпозиции электромагнитных полей таких элементов можно получить электромагнитное поле всей излучающей системы. Предпошлем решению задачи о поле излучения диполя Герца несколько вспомогательных математических формул.

2. Рассмотрим функцию $f = f(\mathbf{r}, t - r/v)$, где r — расстояние от начала координат, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из того же начала, v — некоторая постоянная скорость. Введем обозначение $t' = t - r/v$. Частные производные функции f по x при постоянных t и t' связаны соотношением

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_t = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{t'} + \left(\frac{\partial f}{\partial t'}\right)_r \left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right)_t .$$

Отсюда с учетом соотношения $(\partial r/\partial x) = x/r$ получаем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_t = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{t'} - \frac{x}{rv}\frac{\partial f}{\partial t},$$

так как по смыслу производных

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t'}\right)_r = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

В дальнейшем для сокращения значок t будем опускать, а вместо значка t' будем ставить штрих над знаком производной по координате, если дифференцирование производится при постоянном t'. При таком соглашении

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial' f}{\partial x} - \frac{x}{rv}\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Таким образом, операторы $\partial/\partial x$ и $\partial'/\partial x$ связаны соотношением

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial'}{\partial x} - \frac{x}{vr}\frac{\partial}{\partial t}, \tag{141.1}$$

а операторы ∇ и ∇' — соотношением

$$\nabla = \nabla' - \frac{\mathbf{r}}{vr}\frac{\partial}{\partial t}. \tag{141.2}$$

Умножая оператор ∇ сначала скалярно, а затем векторно на векторную функцию $\mathbf{A}\left(\mathbf{r}, t - \frac{r}{v}\right)$, получим

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \operatorname{div}'\mathbf{A} - \frac{(\mathbf{r}\dot{\mathbf{A}})}{vr}, \tag{141.3}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{rot}'\mathbf{A} - \frac{[\mathbf{r}\dot{\mathbf{A}}]}{vr}. \tag{141.4}$$

Используя соотношения

$$\operatorname{div}\mathbf{r} = 3, \quad \operatorname{div}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi\operatorname{div}\mathbf{A} + (\mathbf{A}\operatorname{grad}\varphi),$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{r} = 0, \quad \operatorname{rot}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi\operatorname{rot}\mathbf{A} + [\operatorname{grad}\varphi\cdot\mathbf{A}]$$

и предполагая, что вектор $\mathbf{g}$ зависит только от аргумента t', из формул (141.3) и (141.4) найдем

$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{g}}{r^n} = -n\frac{(\mathbf{gr})}{r^{n+2}} - \frac{(\dot{\mathbf{g}}\mathbf{r})}{vr^{n+1}}, \quad \operatorname{div}\frac{(\mathbf{gr})\mathbf{r}}{r^{n+2}} = -(n+2)\frac{(\mathbf{gr})}{r^{n+2}} - \frac{(\dot{\mathbf{g}}\mathbf{r})}{vr^{n+1}}, \tag{141.5}$$

$$\operatorname{rot}\frac{\mathbf{g}}{r^n} = n\frac{[\mathbf{gr}]}{r^{n+2}} + \frac{[\dot{\mathbf{g}}\mathbf{r}]}{vr^{n+1}}, \quad \operatorname{rot}\frac{(\mathbf{gr})\mathbf{r}}{r^{n+2}} = \frac{[\mathbf{gr}]}{r^{n+2}}.$$

3. После этих математических отступлений обратимся к задаче о поле излучения диполя Герца. Будем предполагать, что диполь неподвижен и помещен в однородную среду с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε и μ. Начало координат поместим в точке нахождения диполя. Если бы дипольный момент $\mathbf{p}$ был постоянным, то вектор индукции $\mathbf{D}$ определялся бы формулой электростатики

$$\mathbf{D} = \frac{3(\mathbf{pr})}{r^5}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}.$$

На малых расстояниях от диполя эта формула верна и в тех случаях, когда дипольный момент $\mathbf{p}$ меняется во времени. Но на больших расстояниях r формула не может быть верной, так как на прохождение таких расстояний электромагнитному возмущению, распространяющемуся со скоростью v, требуется конечное время r/v, в течение которого дипольный момент $\mathbf{p}$ может заметно измениться. Конечная скорость распространения электромагнитных возмущений, очевидно, будет учтена, если в предыдущей формуле значение дипольного момента $\mathbf{p}$ брать не в момент наблюдения t, а в более ранний момент $t' = t - r/v$, когда произошло излучение сигнала, дошедшего от диполя до точки наблюдения. Однако выражение, полученное таким путем, не будет удовлетворять уравнениям Максвелла. В самом деле, если вектор $\mathbf{D}$ меняется во времени, то это означает наличие тока смещения, пронизывающего контур окружности MN (рис. 336) и всякий другой контур, лежащий в плоскости этой окружности. Ток смещения возбудит магнитное поле с силовыми линиями, обвивающимися вокруг вектора $\mathbf{p}$. Возникнет

переменный магнитный поток через всякий контур, расположенный в меридиональной плоскости OPQ, а следовательно, и электрическое поле, лежащее в той же плоскости. Это поле в свою очередь даст ток смещения через всякую окружность, обвивающуюся вокруг оси вектора $\mathbf{p}$. В результате этого возникнет добавочное магнитное поле. Последнее в свою очередь возбудит добавочное электрическое поле и т. д. Из соображений симметрии ясно, что вектор $\mathbf{D}$ полного поля будет лежать в меридиональных плоскостях, а силовые линии вектора $\mathbf{H}$ будут иметь форму коаксиальных окружностей, центры которых лежат на оси вектора $\mathbf{p}$.

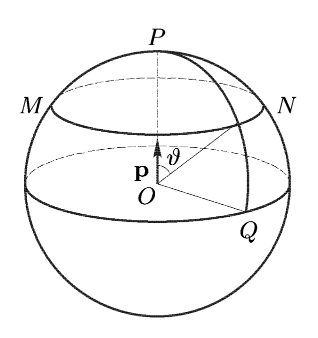


Рис. 336

4. Начнем с вычисления вектора $\mathbf{D}$. На малых расстояниях от диполя выражение для $\mathbf{D}$ должно переходить в соответствующую формулу электростатики и, следовательно, убывать обратно пропорционально кубу расстояния r. К электростатическому выражению надо добавить слагаемые, зависящие от производных вектора $\mathbf{p}$ по времени и убывающие более медленно. Разложив все слагаемые вдоль $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$, будем искать $\mathbf{D}$ в виде

$$\mathbf{D} = \left[\frac{3(\mathbf{pr})}{r^5}\,\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}\right] + \left[a\frac{(\dot{\mathbf{p}}\mathbf{r})}{vr^4}\,\mathbf{r} + b\frac{\dot{\mathbf{p}}}{vr^2}\right] + \left[f\frac{(\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{r})}{v^2r^3}\,\mathbf{r} + h\frac{\ddot{\mathbf{p}}}{v^2r}\right], \quad (141.6)$$

где a, b, f, h — постоянные коэффициенты. Они безразмерны благодаря введению в знаменатели множителей v и v^2. Члены нулевой и положительных степеней по r входить не могут, так как они не удовлетворяют условию на бесконечности, где электромагнитное поле должно обращаться в нуль. Точно так же не могут входить члены с более высокими отрицательными степенями по r, так как в противном случае не получилось бы предельное статическое поле при $r \to 0$. Предполагается, что значения $\mathbf{p}$ и его производных по времени берутся не в момент времени t, а в более ранний момент $t' = t - r/v$. Этим учтено, что электромагнитное поле распространяется со скоростью v. Конечно, возможность представления $\mathbf{D}$ в форме, приведенной выше, еще не доказана этими рассуждениями. Доказательство получится лишь после того, как будет показано, что выражения для всех векторов электромагнитного поля удовлетворяют системе уравнений Максвелла. Это делается ниже.

Вычислив по формулам (141.5) дивергенцию $\mathbf{D}$, получим

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = -2(1+b)\frac{(\dot{\mathbf{p}}\mathbf{r})}{vr^4} - (a+b-f+h)\frac{(\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{r})}{v^2r^3} - (f+h)\frac{(\dddot{\mathbf{p}}\mathbf{r})}{v^3r^2} = 0.$$

Так как векторы $\dot{\mathbf{p}}$, $\ddot{\mathbf{p}}$, $\dddot{\mathbf{p}}$ независимы, то коэффициенты этого выражения должны обращаться в нуль. Это приводит к соотношениям

$$b = -1, \quad h = -f, \quad a - 2f = 1. \quad (141.7)$$

Соотношение $h = -f$ показывает, что последний член в выражении (141.6) есть вектор, перпендикулярный к $\mathbf{r}$, в чем легко убедиться, умножая этот вектор скалярно на $\mathbf{r}$. Отсюда следует, что поток этого вектора через любой участок сферы с центром в начале координат равен нулю.

Для определения коэффициентов a и f установим сначала вид выражения для магнитного поля $\mathbf{H}$. Вычислим поток $\Phi_{\text{эл}}$ вектора $\mathbf{D}$ через участок сферы, ограниченный окружностью MN (см. рис. 336). Для этого выражение (141.6) умножаем на единичный вектор $\mathbf{r}/r$ и интегрируем по поверхности указанного участка. Учитывая при этом соотношения (141.7), получим

$$\Phi_{\text{эл}} = \left(\frac{2p}{r} + \frac{a-1}{v}\,\dot{p}\right)\pi\sin^2\vartheta.$$

После этого поле $\mathbf{H}$ найдется из уравнения

$$\oint H\,dl = \frac{1}{c}\,\dot{\Phi}_{\text{эл}},$$

если в качестве контура интегрирования взять ту же окружность MN. Это дает

$$H = \left(\frac{\dot{p}}{cr^2} + \frac{a-1}{2cvr}\,\ddot{p}\right)\sin\vartheta,$$

если в векторной форме

$$\mathbf{H} = \frac{[\dot{\mathbf{p}}\mathbf{r}]}{cr^3} + \frac{a-1}{2cvr^2}\,[\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{r}]. \tag{141.8}$$

Первое слагаемое здесь соответствует закону Био и Савара. Уравнение $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$ удовлетворяется автоматически, поскольку магнитное поле аксиально симметрично, а силовые линии его являются окружностями с центрами, расположенными на оси диполя (см. § 53). Однако коэффициент a все еще не определен. Для его определения и одновременно завершения всего доказательства надо воспользоваться последним уравнением Максвелла. Запишем его в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{D} = -\frac{\varepsilon\mu}{c}\,\dot{\mathbf{H}}. \tag{141.9}$$

Вычислив $\operatorname{rot}\mathbf{D}$ с использованием формул (141.5), найдем

$$\operatorname{rot}\mathbf{D} = (a-3)\frac{[\dot{\mathbf{p}}\mathbf{r}]}{vr^4} - \frac{[\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{r}]}{v^2r^3} - f\,\frac{[\dddot{\mathbf{p}}\mathbf{r}]}{v^3r^2}.$$

С другой стороны, формула (141.8) с учетом соотношения $c^2 = \varepsilon\mu v^2$ дает

$$-\frac{\varepsilon\mu}{c}\dot{\mathbf{H}} = -\frac{[\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{r}]}{v^2r^3} - \frac{a-1}{2v^3r^2}\,[\dddot{\mathbf{p}}\mathbf{r}].$$

Путем сравнения с предыдущим выражением находим $a = 3$, $f = 1$. Эти значения удовлетворяют и последнему уравнению системы (141.7).

Таким образом, все условия задачи удовлетворены, и поле диполя Герца можно представить в окончательном виде:

$$\mathbf{D} = \left[\frac{3(\mathbf{pr})}{r^5}\,\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}\right]_{t-r/v} + \left[\frac{3(\dot{\mathbf{p}}\mathbf{r})}{vr^4}\,\mathbf{r} - \frac{\dot{\mathbf{p}}}{vr^2}\right]_{t-r/v} + \left[\frac{(\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{r})}{v^2r^3}\,\mathbf{r} - \frac{\ddot{\mathbf{p}}}{v^2r}\right]_{t-r/v},$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{cr^3}\,[\dot{\mathbf{p}}\mathbf{r}]_{t-r/v} + \frac{1}{cvr^2}\,[\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{r}]_{t-r/v}. \tag{141.10}$$

Индекс $t - r/v$, поставленный внизу справа от каждого слагаемого, напоминает о том, что значения дипольного момента $\mathbf{p}$ и его производных по времени следует брать не в момент времени t, а в более ранний момент времени $t - r/v$. Такое «запаздывание» поля колеблющегося диполя означает, что электромагнитное поле не стоит на месте, а распространяется в виде возмущения со скоростью v.

При выводе формул (141.10) мы для краткости выражались так, как если бы векторы $\dot{\mathbf{p}}$ и $\ddot{\mathbf{p}}$ имели то же направление, что и сам вектор $\mathbf{p}$. В действительности это обстоятельство нигде не использовалось. Поэтому окончательные формулы (141.10) справедливы независимо от того, совпадают ли направления всех трех векторов $\mathbf{p}$, $\dot{\mathbf{p}}$, $\ddot{\mathbf{p}}$ или эти направления различны.

5. Поле, представляемое формулами (141.10), можно разложить на три части в зависимости от того, как они убывают с расстоянием от диполя r. При малых r, когда запаздывание несущественно, основную роль играет первое слагаемое. Оно меняется обратно пропорционально кубу расстояния r. Его мгновенное значение совпадает с полем статического диполя момента $\mathbf{p}$. Затем идут два члена: один электрический, другой магнитный, зависящие от $\dot{\mathbf{p}}$ и убывающие обратно пропорционально квадрату расстояния r. Магнитный член на малых расстояниях от диполя соответствует закону Био и Савара и представляет собой магнитное поле элемента тока $\dot{\mathbf{p}}$. Электрический член не допускает какой-либо простой интерпретации. Наконец, последние два члена, из которых один также электрический, а другой магнитный, зависят от второй производной дипольного момента. Эти члены убывают с расстоянием всего медленнее, а именно обратно пропорционально первой степени расстояния r. На больших расстояниях r эти члены становятся настолько большими по сравнению со всеми остальными членами, что последними можно полностью пренебречь. Тогда говорят о *волновой зоне* излучающего диполя. Таким образом, если пренебречь всеми более быстро убывающими слагаемыми, то *для поля в волновой зоне можно написать*

$$\mathbf{D} = \left[\frac{(\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{r})}{v^2r^3}\,\mathbf{r} - \frac{\ddot{\mathbf{p}}}{v^2r}\right]_{t-r/v} = \frac{1}{v^2r^3}\,[[\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{r}]\mathbf{r}]_{t-r/v},$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{cvr^2}\,[\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{r}]_{t-r/v}. \tag{141.11}$$

Отсюда следует

$$\mathbf{D} = \frac{c}{v}\,[\mathbf{HN}], \quad \mathbf{H} = \frac{v}{c}\,[\mathbf{ND}], \tag{141.12}$$

где $\mathbf{N} = \mathbf{r}/r$ — единичный вектор, направленный вдоль радиуса-вектора $\mathbf{r}$. Мы видим, что векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ взаимно перпендикулярны. Оба они перпендикулярны к радиусу-вектору $\mathbf{r}$ (рис. 337). Вектор $\mathbf{D}$ лежит в плоскости меридиана, а вектор $\mathbf{H}$ направлен вдоль параллели, если в качестве полярной оси взять направление вектора $\ddot{\mathbf{p}}$ (в момент времени $t - v/r$). Полученное поле в волновой зоне называется *сферической электромагнитной волной* [1]. Таким образом, соотношения между электрическим и магнитным векторами в волновой зоне такие же, как и для плоской электромагнитной волны (см. § 139). Это вполне естественно, так как на больших расстояниях от излучающего источника малый участок сферического волнового фронта должен вести себя практически как плоский.

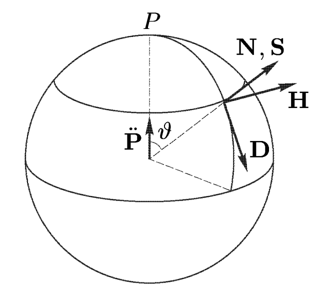


Рис. 337

6. Вектор плотности потока электромагнитной энергии равен

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\,[\mathbf{EH}] = \frac{c}{4\pi\varepsilon}\,[\mathbf{DH}].$$

Подставляя сюда значение $\mathbf{D}$ из (141.12), получим

$$\mathbf{S} = \frac{c^2}{4\pi\varepsilon v}\,\mathbf{H}^2\mathbf{N},$$

или с учетом выражения (141.11) для $\mathbf{H}$

$$\mathbf{S} = \frac{\sin^2\vartheta}{4\pi\varepsilon v^3 r^2}\,\ddot{\mathbf{p}}^2_{t-r/v}\mathbf{N}, \tag{141.13}$$

где ϑ — полярный угол, т. е. угол между векторами $\ddot{\mathbf{p}}$ и $\mathbf{r}$.

Выражение (141.13) показывает, что колеблющийся диполь излучает электромагнитную энергию в окружающее пространство. Поток энергии направлен *вдоль радиуса*, его плотность *обратно пропорциональна квадрату расстояния* r. Излучение *не изотропно*, его максимум приходится на угол $\vartheta = 90^\circ$. В направлении вектора $\ddot{\mathbf{p}}$ излучение отсутствует. «Диаграмма направленности» излучения диполя Герца представлена на рис. 338. Чтобы найти интегральную мощность излучения, т. е. полную энергию $-\,d\mathscr{E}/dt$, излучаемую диполем в единицу

---

[1] Это название не совсем точно. Сферическая симметрия относится не к электромагнитному полю диполя, а только к *форме волновых фронтов*, т. е. поверхностей, до которых одновременно доходит возмущение: волновые фронты являются сферами, центры которых находятся в точке нахождения диполя в момент излучения.

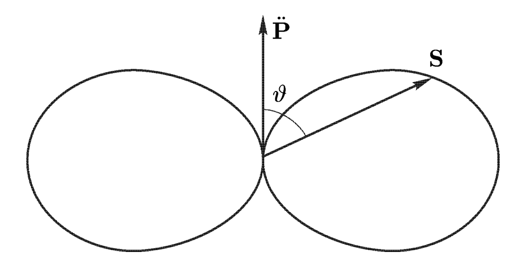


Рис. 338

времени, умножим модуль выражения (141.13) на элемент поверхности сферы $2\pi r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta$ и проинтегрируем по всем направлениям. Таким путем найдем

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{2}{3\varepsilon v^3}\,\ddot{\mathbf{p}}^2_{t-r/v}. \tag{141.14}$$

7. Во всех предыдущих вычислениях относительно характера изменения дипольного момента $\mathbf{p}$ во времени не вводилось никаких предположений. Допустим теперь, что вектор $\mathbf{p}$ совершает синусоидальные колебания $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 e^{i\omega t}$. Тогда $\dot{\mathbf{p}} = i\omega\mathbf{p}$, $\ddot{\mathbf{p}} = -\omega^2\mathbf{p}$. Замена времени t на $t - r/v$ преобразует экспоненциальный множитель в $e^{i\omega(t-r/v)} = e^{i(\omega t - kr)}$, где $k = \omega/v$ — волновое число. В результате из формул (141.10) получаем

$$\mathbf{D} = \left[\left(\frac{3(\mathbf{p}_0\mathbf{r})}{r^5}\,\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}_0}{r^3}\right) + ik\left(\frac{3(\mathbf{p}_0\mathbf{r})}{r^4}\,\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}_0}{r^2}\right) - k^2\left(\frac{(\mathbf{p}_0\mathbf{r})}{r^3}\,\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}_0}{r}\right)\right] e^{i(\omega t - kr)},$$

и аналогично для $\mathbf{H}$. Это выражение интересно в том отношении, что оно позволяет точно сформулировать, когда можно пользоваться электростатическим приближением, а когда достаточно ограничиться волновым полем, убывающим обратно пропорционально r. Действительно, отношение каждого члена полученной суммы к предыдущему порядка kr. Если $kr \ll 1$, то справедливо *электростатическое приближение.* Это — *условие квазистационарности*, которое также можно представить в виде $r \ll \lambda$, где $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны. Если же $kr \gg 1$, т. е. $r \gg \lambda$, то можно ограничиться только *волновым полем.* Условие $r \gg \lambda$ и определяет *волновую зону* колеблющегося диполя Герца.

Формула (141.14) для синусоидально колеблющегося диполя принимает вид

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{2\omega^4}{3\varepsilon v^3}\,p_0^2\cos^2(\omega t - kr). \tag{141.15}$$

Если ее усреднить по периоду колебаний T, то для средней мощности излучения получится

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{\omega^4}{3\varepsilon v^3}\,\mathbf{p}_0^2. \tag{141.16}$$

Мощность излучения пропорциональна *четвертой степени частоты* ω. По этой причине для увеличения мощности излучающих систем пользуются *короткими волнами.* Так, частота переменного тока городской сети $\nu = 50$ Гц, а длина волны $\lambda = c/\nu = 6 \cdot 10^7$ км. Такие токи практически не излучают. Но если $\lambda = 1$ км, то при той же амплитуде мощность излучения увеличится в $(6 \cdot 10^7)^4 \approx 10^{31}$ раз!

8. Полученные результаты можно использовать для нахождения электромагнитного поля одиночного движущегося точечного заряда e. С этой целью допустим, что диполь состоит из двух точечных зарядов: e и $-e$, из которых второй *бесконечно тяжелый.* Второй заряд можно считать неподвижным. Он создает только электростатическое поле по закону Кулона. Если последнее вычесть из полного поля диполя, то останется только поле движущегося заряда e. Представим дипольный момент в виде $\mathbf{p} = e(\mathbf{R} - \mathbf{R}')$, где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор заряда e, а $\mathbf{R}'$ — заряда $-e$. Так как $\mathbf{R}' = \text{const}$, то отсюда получаем $\dot{\mathbf{p}} = e\dot{\mathbf{R}} = e\mathbf{v}$, $\ddot{\mathbf{p}} = e\dot{\mathbf{v}}$, где $\mathbf{v}$ — скорость, а $\dot{\mathbf{v}}$ — ускорение заряда e. Для излучаемой мощности находим

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{2e^2}{3\varepsilon v^3}\,\dot{\mathbf{v}}^2. \tag{141.17}$$

Таким образом, *электрический заряд излучает электромагнитную энергию, если он движется ускоренно.*

Понятно, что формула (141.17) справедлива только в *нерелятивистском приближении*, поскольку при ее выводе использовалась нерелятивистская кинематика.

ЗАДАЧИ

1. Найти выражение для поля излучения в однородной среде точечного магнитного диполя с магнитным моментом $\mathfrak{M}$.

Решение. Из уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

и предельного условия при $r \to 0$ следует, что искомое поле получится из формулы (141.10) путем замены

$$\mathbf{p} \to \boldsymbol{\mathfrak{M}}, \quad \mathbf{D} \to \mathbf{B}, \quad \mathbf{H} \to -\mathbf{E}.$$

2. По бесконечно длинному соленоиду течет переменный ток. Магнитное поле внутри соленоида определяется формулой $H = (4\pi/c)i$, где i — ток, приходящийся на единицу длины соленоида. Если на соленоид надеть проволочный виток, то магнитный поток через него будет меняться и в витке возникнет индукционный ток. Но магнитное поле в месте нахождения витка равно нулю, и не видно причины для возникновения индукционного тока. Разъяснить этот парадокс.

Ответ. Магнитное поле переменного тока вне соленоида не равно нулю (см. следующую задачу).

3. Рассчитать напряженности магнитного и электрического полей во внешнем пространстве бесконечно длинного и бесконечно тонкого прямолинейного соленоида, по которому течет переменный ток (см. предыдущую задачу). Ограничиться квазистационарным приближением, предполагая, что расстояние до оси соленоида R мало по сравнению с длиной волны λ и велико по сравнению с поперечными размерами соленоида.

Решение. Воспользуемся формулами для электромагнитного поля точечного магнитного диполя. Статические члены нам не понадобятся, а членами, содержащими $\ddot{\mathfrak{M}}$, которые существенны в волновой зоне, мы пренебрежем. Кроме того, в требуемом приближении можно пренебречь запаздыванием. С этими оговорками

$$\mathbf{B} = \frac{3(\dot{\boldsymbol{\mathfrak{M}}}\mathbf{r})}{vr^4}\,\mathbf{r} - \frac{\dot{\boldsymbol{\mathfrak{M}}}}{vr^2}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{cr^3}\,[\dot{\boldsymbol{\mathfrak{M}}}\mathbf{r}]. \tag{141.18}$$

Теперь разобьем весь бесконечный соленоид на бесконечно короткие цилиндрики с высотой dx. Каждый из них представляет собой точечный магнитный диполь с дипольным моментом $d\mathfrak{M} = \dfrac{Si}{c}\,dx$, где S — площадь поперечного сечения соленоида. Вычислив по предыдущим формулам магнитное и электрическое поле каждого такого кольцевого тока и проинтегрировав по длине бесконечного соленоида, получим

$$B = \frac{\pi S}{2vcR}\,\frac{di}{dt}, \quad E = -\frac{2S}{Rc^2}\,\frac{di}{dt}$$

(предполагается, что $\mu = 1$). Магнитное поле направлено параллельно оси соленоида. Электрические силовые линии имеют форму коаксиальных окружностей, центры которых расположены на оси соленоида. При интегрировании по длине бесконечного соленоида статические члены, входящие в выражение для электромагнитного поля точечного магнитного диполя, дают нуль. Поэтому они и опущены в (141.18).

§ 142. Демонстрационные опыты с электромагнитными волнами

1. Электромагнитные волны впервые были получены и исследованы на опыте Генрихом Герцем в 1887–1888 гг. *Вибратор Герца*, с помощью которого он возбуждал электромагнитные волны, состоял из двух одинаковых металлических стержней V, V, разделенных искровым промежутком (рис. 339 слева). Обе половины вибратора соединялись с индуктором I. Когда напряжение на искровом промежутке достигало пробойного значения, искровой промежуток пробивался электрической искрой, замыкавшей обе половины вибратора. В вибраторе возникали затухающие собственные электрические колебания высокой частоты с узлами тока на его концах. Наиболее интенсивным было основное собственное колебание с пучностью тока посередине вибратора и с длиной волны, равной приблизительно удвоенному расстоянию между его концами. Собственные колебания с высшими частотами были

слабы и практически не играли роли. Для предотвращения ухода быстропеременных токов из вибратора в катушку индуктора последний присоединялся к вибратору через дроссели D. Такой вибратор, как уже указывалось в начале предыдущего параграфа, можно рассматривать как систему точечных диполей Герца, излучения которых складываются друг с другом и дают поле излучения всего вибратора.

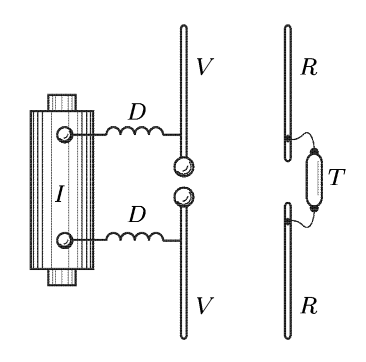


Рис. 339

Для обнаружения электромагнитных волн Герц пользовался *резонаторами* различной формы. Наиболее простым и удобным является *прямой открытый резонатор* (рис. 339 справа). По форме и размерам он должен быть тождествен с излучающим вибратором, чтобы совпадали их собственные частоты. Когда электромагнитная волна достигает резонатора, в нем возбуждаются вынужденные высокочастотные электрические токи. Они наиболее интенсивны при совпадении собственных частот вибратора и резонатора (резонанс). О появлении таких токов Герц судил по проскакиванию слабой электрической искорки в малом зазоре в середине резонатора или по свечению миниатюрной газоразрядной трубки T, включенной между обеими половинами резонатора.

2. Недостаток аппаратуры Герца состоит в том, что свободные колебания в его вибраторе *быстро затухают* и обладают малой мощностью. От этого недостатка свободны *ламповые генераторы*, позволяющие получать колебания *практически любой мощности* и притом *правильной синусоидальной формы.* Они могут быть использованы вместо индуктора I для возбуждения незатухающих колебаний в вибраторе. С этой целью можно, например, между половинами вибратора VV ввести один или несколько витков медной проволоки, индуктивно связанных с катушкой самоиндукции L генератора (рис. 340).

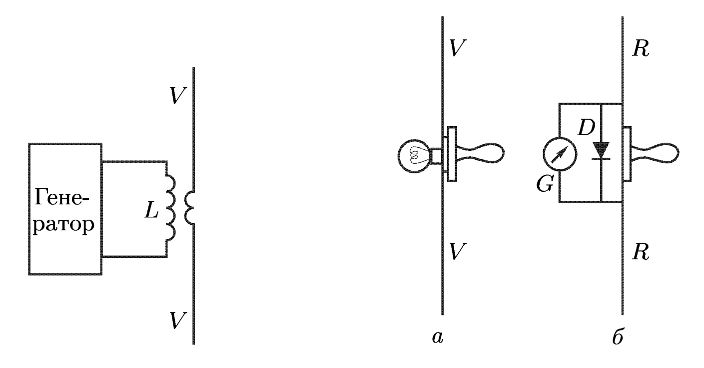


Рис. 340

Рис. 341

Для обнаружения излучения вибратора в промежутке между концами приемного резонатора можно включить маленькую электрическую лампочку (рис. 341 *а*). Этот способ особенно удобен в демонстрационных опытах, когда расстояния между вибраторами и резонатором невелики и поэтому колебания, возникающие в резонаторе, достаточно сильны. Для обнаружения более слабых колебаний в промежуток между половинами резонатора можно ввести *кристаллический детектор* D и к его концам присоединить гальванометр постоянного тока $Г$ (рис. 341 *б*). Сопротивление детектора зависит от направления тока. Когда ток через детектор течет в пропускном направлении, то сопротивление детектора мало. Мало и напряжение на детекторе. Если же ток течет в запорном направлении, то напряжение на детекторе сильно возрастает. Поэтому в случае переменного тока на детекторе появляется постоянная составляющая напряжения, а через гальванометр течет ток *постоянного направления.* Этот способ применяется в большинстве опытов, описываемых ниже. Вместо детектора можно взять *когерер*, т. е. стеклянную трубочку, наполненную оксидированными металлическими опилками. Действие его разъясняется на примере следующей демонстрации.

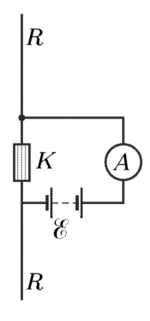


Рис. 342

3. Искровой вибратор, возбуждаемый индуктором (см. рис. 339 слева), помещается в соседней комнате, резонатор с когерером — в аудитории. В цепь когерера K включена батарея с амперметром (рис. 342). В обычном состоянии сопротивление опилок когерера очень велико, и амперметр не обнаруживает тока. При включении индуктора электромагнитные волны, излучаемые вибратором, попадая на когерер, вызывают искорки, проскакивающие между опилками. Происходит *спекание опилок*, и сопротивление их резко уменьшается (в сотни раз). В результате через амперметр начинает идти ток от батареи, не прекращающийся и при выключении индуктора. Если, однако, слегка постучать по когереру, то спекание опилок исчезает, сопротивление когерера сильно возрастает, и ток через амперметр прекращается. Амперметр снова обнаружит ток, если включить индуктор и тем самым заставить вибратор излучать электромагнитные волны.

4. В следующей демонстрации колебания в вибраторе возбуждаются ламповым генератором с длиной волны $\lambda = 3$ м и частотой $\nu = 10^8$ Гц по схеме рис. 340. Прием осуществляется резонатором с лампочкой (см. рис. 341 *а*). Длина вибратора и резонатора $\lambda/2 = 1{,}5$ м. Резонатор и вибратор устанавливаются на некотором расстоянии параллельно друг к другу и перпендикулярно к линии AB, соединяющей их центры, как указано на схематическом рис. 343. В этом случае лампочка горит ярко. Если поворачивать резонатор вокруг оси AB, то накал лампочки уменьшается, совсем пропадая при повороте на 90°. То же происходит, если поворачивать резонатор вокруг оси,

перпендикулярной к плоскости рисунка, — накал пропадает, когда резонатор устанавливается параллельно линии AB. Дело в том, что электромагнитные волны, излучаемые вибратором, *линейно поляризованы*: электрический вектор волны в точке B параллелен оси вибратора. Токи в резонаторе возбуждает только составляющая электрического вектора, направленная *вдоль оси резонатора*. Она, а следовательно, и возбуждаемый ею ток пропорциональны косинусу угла α между осями вибратора и резонатора. Следовательно, джоулево тепло, выделяющееся в лампочке, должно быть пропорционально квадрату того же косинуса. Если приемный резонатор перемещать параллельно самому себе вдоль линии AB, то при удалении от вибратора накал лампочки уменьшается не монотонно, а проходит через максимумы и минимумы. Дело в том, что волны, излучаемые вибратором, отражаются от стен аудитории и в ней устанавливается некоторое подобие стоячей волны с узлами и пучностями. Лампочка горит ярче в пучностях электрического поля и слабее в узлах.

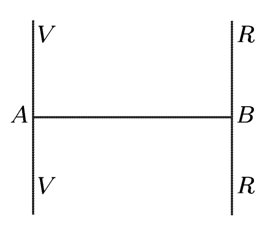


Рис. 343

5. Используя отражение волн от металлических поверхностей, Герц получал *направленные волны*, подобные параллельным пучкам света. Изгибанием металлических листов изготовлялись зеркала, имеющие форму параболических цилиндров. Их размеры в несколько раз превосходили длину электромагнитной волны (чтобы получить правильное отражение, не очень сильно искаженное дифракцией). Вдоль фокальной линии одного зеркала помещался небольшой вибратор, вдоль фокальной линии другого — приемный резонатор. Электромагнитные волны, исходящие от вибратора, после отражения от зеркала распространялись в виде направленного пучка параллельно главной оптической оси этого зеркала. Если зеркала были обращены отражающими поверхностями друг к другу, а их главные оптические оси совпадали, то этот направленный пучок отражался от второго зеркала, собирался в его фокусе и вызывал сильные электрические колебания резонатора (рис. 344, вибратор V и резонатор R установлены перпендикулярно к плоскости рисунка). Если же второе зеркало было смещено в сторону, то пучок не попадал на него, и колебания в резонаторе не возникали. Этот опыт доказывает *прямолинейное распространение электромагнитных волн.* Если же поворачивать одно из зеркал (вместе с вибратором или резонатором) вокруг общей главной оптической оси VR, то интенсивность приема будет убывать и обратится в нуль, когда вибратор и резонатор установятся взаимно перпендикулярно. Толкование этого опыта такое же, что и опыта, описанного в п. 4.



Рис. 344

6. Помещая между зеркалами на пути распространяющегося пучка (см. рис. 344) лист стекла, эбонита и других диэлектриков, а также металлические листы, можно убедиться, что все диэлектрики хорошо пропускают электромагнитные волны, а металлы не пропускают. Такое поведение металлов объясняется двумя обстоятельствами, тесно связанными между собой. Во-первых, *металлы сильно отражают электромагнитные волны.* Во-вторых, электрическое поле электромагнитной волны, частично проникшей в металл, возбуждает в нем электрические токи, энергия которых переходит в джоулево тепло, так что на протяжении толщи металла электромагнитная волна *полностью поглощается.*

7. Вместо сплошного металлического листа можно взять сетку из параллельных медных прямолинейных проводов (рис. 345) Если такую сетку поставить на пути пучка электромагнитных волн и притом так, чтобы проволоки были параллельны вибратору и резонатору, то электромагнитные волны через нее практически не проходят. В этом случае вдоль проволок возбуждаются электрические токи и происходит поглощение электромагнитной энергии с выделением джоулева тепла. Если же проволоки сетки перпендикулярны к вибратору и резонатору, то они будут перпендикулярны и к электрическому вектору **E**. В этом случае ток в проволоках не возникает и волна проходит через сетку практически так же, как через диэлектрическую пластинку. Описанный опыт дает новое доказательство линейной поляризации волн, излучаемых вибратором (см. п. 4) Заметим также, что проволочная сетка действует *как сплошная пластинка*, если расстояние между проволоками мало по сравнению с длиной волны. Проволоки делают только такую «пластинку» *анизотропной.* Этот вопрос будет подробно разобран в т. IV нашего курса — в оптике.

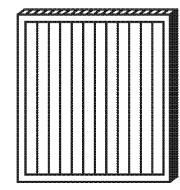


Рис. 345

Поворотом зеркал вокруг их общей оптической оси установим вибратор и резонатор взаимно перпендикулярно. Приема не будет. Если же между вибратором и резонатором ввести проволочную сетку под некоторым углом к ним, то прием возобновится. Для понимания опыта разложим электрический вектор перед сеткой на две составляющие: параллельно и перпендикулярно к проволокам. Вторая составляющая будет пропущена сеткой. А так как ее электрическое поле имеет составляющую вдоль оси резонатора, то в нем возбудятся колебания.

8. Направляя электромагнитную волну от параболического зеркала вибратора на плоское зеркало AB (металлический лист, рис. 346), можно наблюдать *отражение волны.* Оказалось, что (как и для световых лучей) угол падения волны равен углу отражения, а нормали к падающей и отраженной волнам лежат в одной плоскости с нормалью к поверхности зеркала. Кроме того, легко убедиться, что металлы значительно лучше отражают электромагнитные волны, чем диэлектрики.

9. Можно наблюдать и *преломление электромагнитных волн*, изготовив большую призму из диэлектрика (парафин, сера и т. п., рис. 347).

Таким путем можно убедиться в справедливости *закона преломления Снеллиуса*: отношение синуса угла падения к синусу угла преломления не зависит от угла падения. Более того, опыт подтвердил соотношение

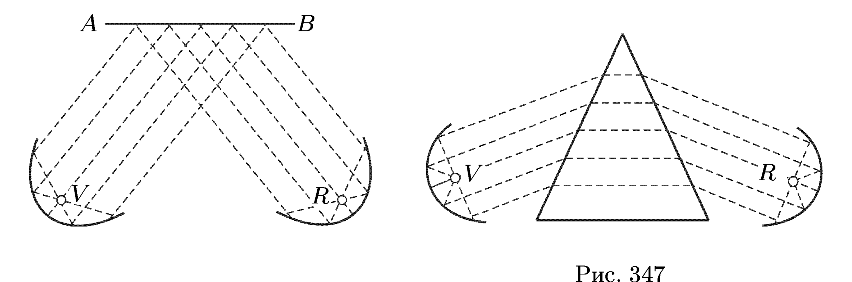


Рис. 347

Рис. 346

$n = \sqrt{\varepsilon}$ между показателем преломления среды n и диэлектрической проницаемостью ε. Это соотношение было теоретически установлено Максвеллом. Оно будет подробно рассмотрено в т. IV.

10. Можно получить и *стоячие электромагнитные волны.* Для этого волну от параболического зеркала вибратора надо нормально направить на плоское металлическое зеркало. От наложения отраженной волны на падающую образуется система стоячих волн с узлом электрического поля на поверхности зеркала (см. § 145). Положение пучностей и узлов электрического поля в такой волне исследуется с помощью резонатора обычным путем. Расстояние между соседними пучностями (или узлами) равно половине длины волны. Измерив это расстояние, можно найти длину волны λ. В опытах Герца длина волны была 60 см, а высота параболических зеркал 2 м.

11. В анизотропных кристаллах должно наблюдаться *двойное преломление электромагнитных волн*, аналогичное двойному преломлению световых лучей. Этот вывод был сделан Максвеллом. Явление двойного преломления будет подробно изучено нами в т. IV. Здесь же заметим, что вывод Максвелла был экспериментально проверен П. Н. Лебедевым (1866–1912) в 1895 г. Для опытов необходимо было получить очень короткие электромагнитные волны, так как размеры кристаллов обычно не превышают нескольких сантиметров. С помощью миниатюрного искрового вибратора Лебедев получил волны с длиной около 6 мм — в сто раз короче волн Герца. С помощью таких волн он воспроизвел в кристаллах серы все явления двойного преломления, которые обычно наблюдают со световыми лучами. В частности, из кристаллов серы с эбонитовой прокладкой он изготовил прибор, вполне аналогичный *призме Николя*, применяемой в оптике для получения *поляризованного света.*

Опыты Герца сыграли решающую роль для доказательства и быстрого признания электродинамики Максвелла и электромагнитной

теории света. Через семь лет после этих опытов (1895) электромагнитные волны нашли применение в *беспроволочной телеграфии и телефонии* (*радио*). Пионером в этой области был наш соотечественник А. С. Попов.

§ 143. Волны вдоль проводов

1. Рассмотрим два одинаковых параллельных провода, в которых с помощью генератора могут возбуждаться переменные токи высокой частоты. Такие два провода называются *системой Лехера.* Связь проводов с генератором может быть либо *емкостной*, либо *индуктивной* (рис. 348). Примем, что *по отношению к поперечным размерам системы выполнено условие квазистационарности.* Это значит, что расстояние между проводами должно быть весьма мало по сравнению с длиной волны. В то же время будем предполагать провода длинными — на их длине должно укладываться по меньшей мере несколько волн. Поэтому электрические токи в проводах *не квазистационарны*, сила тока $I(x)$, а также линейная плотность электрического заряда $q(x)$ существенно меняются вдоль проводов (ось X направлена параллельно проводам). В силу предполагаемой симметрии ток $I(x)$, текущий вдоль одного из проводов, равен и противоположно направлен току, текущему напротив него вдоль другого провода. Аналогичное утверждение относится к величинам зарядов на проводах и их знакам. Электрическое напряжение между проводами, измеренное вдоль перпендикуляра к ним, будем обозначать через $V(x)$. Указание «пути», вдоль которого измеряется напряжение, т. е. интеграл $\int E\,dl$, необходимо потому, что в переменном электромагнитном поле значение этого интеграла *зависит от формы пути.*

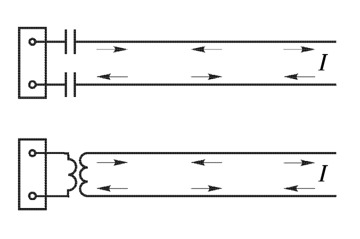


Рис. 348

При изложении теории распространения волн вдоль проводов мы не будем пользоваться уравнением Максвелла с током смещения, а изберем более простой путь, которым пользовался еще Кирхгоф задолго до появления максвелловской теории. Наше рассмотрение применимо также к задаче о распространении волн вдоль кабеля, состоящего из двух коаксиальных цилиндрических проводов: наружного полого и помещенного внутри него сплошного, пространство между которыми заполнено однородным диэлектриком. Наружный проводник играет роль одного провода системы Лехера, внутренний — другого. Однако оно совсем неприменимо к линии, состоящей только из одного провода.



Рис. 349

2. Возьмем на одном из проводов системы Лехера бесконечно малый участок dx (рис. 349). Через конец A за время dt внутрь рассмат- риваемого участка входит

электрический заряд $I(x)dt$, а через конец D выходит заряд $I(x+$ $+dx)dt$. Избыток входящего электричества над выходящим составляет

$$[I(x) - I(x+dx)]dt = -\frac{\partial I}{\partial x}\,dxdt.$$

Ту же величину можно представить в виде $\dot{q}dxdt$. Таким образом,

$$\dot{q} = -\frac{\partial I}{\partial x}. \tag{143.1}$$

Это уравнение выражает закон сохранения электрического заряда.

Применим теперь к контуру $ADCB$ уравнение $\oint E\,dl = -\frac{1}{c}\,\dot{\Phi}\,dx$, где $\Phi(x)\,dx$ — магнитный поток, пронизывающий этот контур. Имеем

$$\int\limits_{DC} E\,dl = V(x+\,dx),$$

$$\int\limits_{BA} E\,dl = -V(x),$$

$$\int\limits_{DC+BA} E\,dl = V(x+\,dx) - V(x) = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx,$$

$$\int\limits_{AD+CB} E\,dl = RI\,dx,$$

где $R\,dx$ — суммарное сопротивление элементов проводов AD и CB. Следовательно,

$$\frac{\partial V}{\partial x} + RI = -\frac{1}{c}\dot{\Phi}. \tag{143.2}$$

Величины q, Φ и R суть заряд, магнитный поток и сопротивление единицы длины рассматриваемой *двухпроводной линии.* В дальнейшем всюду будем предполагать, что сопротивление R равно нулю. Используем теперь условие квазистационарности по отношению к поперечным размерам линии. При выполнении этого условия можно ввести емкость C и индуктивность L *единицы длины линии.* Эти величины определяются соотношениями

$$q = CV, \quad \Phi = LI. \tag{143.3}$$

Исключив из уравнений (143.1) и (143.2) величины q и Φ, при $R=0$ получим

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C\frac{\partial V}{\partial t}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{L}{c^2}\,\frac{\partial I}{\partial t}. \tag{143.4}$$

Эти уравнения *формально тождественны* с уравнениями (139.3). Поэтому все следствия, полученные из уравнений (139.3), остаются справедливыми и для системы Лехера. Надо только сделать замену $H \to I$, $E \to V$, $\varepsilon \to cC$, $\mu \to L/c$. Таким путем приходим к выводу, что напряжение и ток распространяются вдоль проводов в виде волны со

другую. Никакого направленного переноса энергии вдоль всей линии не происходит, как и должно быть в стоячей волне. Наиболее сильные вынужденные колебания тока и напряжения в линии возникают при тех же условиях, как и во всякой стоячей волне. Если, например, на обоих концах линии — пучность тока (напряжения), то это происходит тогда, когда в линии укладывается целое число полуволн.

5. Для демонстрации стоячих волн в системе Лехера берут два длинных и толстых голых провода и натягивают их от одного конца аудитории до другого. Провода располагаются в горизонтальной плоскости на расстоянии около 10 см друг от друга. Линия питается с одного конца ламповым генератором с длиной волны 3 м. Колебательный контур генератора имеет конденсатор переменной емкости, что позволяет настраивать линию в резонанс. Второй конец линии может быть либо свободным, либо закороченным. В качестве индикаторов для исследования стоячих волн применяются *неоновые лампочки*, включаемые между обоими проводами линии, а также небольшие *проволочные витки* с включенными в них лампочками от карманных фонариков. Витки располагаются горизонтально между проводами, как указано на рис. 350. Такие индикаторы лишь незначительно искажают поле

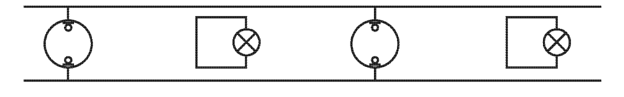


Рис. 350

стоячей волны. Неоновая лампочка загорается в тех местах, где есть электрическое поле, создающее на ней напряжение, превосходящее потенциал зажигания. Она светится наиболее ярко в пучностях и гаснет в узлах напряжения. Электрические лампочки, напротив, горят наиболее ярко в пучностях и гаснут в узлах тока. Действительно, когда виток помещен в пучность тока, он пронизывается максимальным магнитным потоком. Так как этот магнитный поток переменный, то в витке возбуждается индукционный ток, и лампочка горит наиболее ярко. Если же виток находится в узле тока, то магнитный поток равен нулю, и индукционный ток не возникает. С помощью этих индикаторов легко исследовать распределение пучностей и узлов тока и напряжения.

6. Стоячие волны можно демонстрировать также в катушках длиной 2–3 м, состоящих из однослойных витков тонкой проволоки (общая длина проволоки несколько километров). Один конец катушки присоединяют к ламповому генератору (длина волны $\lambda \approx 300$ м), другой замыкают. В проволоке возникают стоячие волны тока, а в окружающем пространстве — переменные электромагнитные поля. Пучности электрического поля можно наблюдать, если параллельно катушке расположить длинную газосветную стеклянную трубку. Газ светится неравномерно, расстояния между максимумами свечения составляют обычно 20–30 см. Можно взять стеклянную трубку в форме кольца,

наполненную неоном, и надеть ее на катушку. При перемещении вдоль катушки трубка периодически зажигается и гаснет. Можно также пользоваться трубками различной формы и наблюдать их свечение при перемещении вокруг катушки. Произвести количественные расчеты в этих случаях затруднительно.

ЗАДАЧА

Провода лехеровой системы соединены между собой мостиком из катушки индуктивности, омического сопротивления и конденсатора (рис. 351). Комплексное сопротивление (импеданс) мостика равно Z. Провода и однородные среды, в которые они погружены, по разные стороны мостика могут быть разными, так что волновое сопротивление линии перед мостиком равно W, а за мостиком W'. Если на мостик падает волна, то она частично отражается, частично проходит дальше. Определить у мостика отраженную (I_r) и прошедшую (I_d) волны тока, а также ток через мостик I, если ток падающей волны равен I_e.

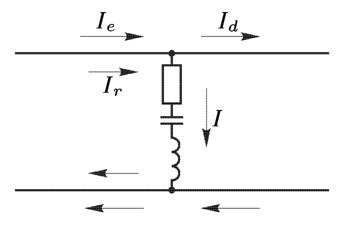


Рис. 351

Р е ш е н и е. Напряжение в падающей, отраженной и прошедшей волнах у мостика:

$$V_e = WI_e, \quad V_r = -WI_r, \quad V_d = W'I_d$$

(минус во второй формуле потому, что отраженная волна идет назад). По первому правилу Кирхгофа

$$I_e + I_r = I + I_d.$$

Напряжение между концами мостика можно представить следующими тремя выражениями: ZI, $V_e + V_r$, V_d. Приравнивая их и выражая напряжения через токи, получим два уравнения:

$$ZI = W(I_e - I_r), \quad ZI = W'I_d.$$

Решая эти уравнения совместно с предыдущим, найдем

$$\frac{I_r}{I_e} = \frac{WW' + (W - W')Z}{\Delta}, \quad \frac{I_d}{I_e} = \frac{2WZ}{\Delta}, \quad \frac{I}{I_e} = \frac{2WW'}{\Delta},$$

где

$$\Delta = WW' + (W + W')Z.$$

Если мостик поставлен на конец линии, то прошедшей волны не будет ($W' = \infty$). В этом случае

$$I_r = \frac{W - Z}{W + Z}\, I_e, \quad I = \frac{2W}{W + Z}\, I_e.$$

Отсюда легко получить амплитуды и фазы токов I_e и I для закороченной линии ($Z = 0$) и для линии со свободными концами ($Z = \infty$). В обоих случаях отражение полное, но с разными фазами. Если сопротивление мостика чисто реактивное ($Z = iX$), то $|I_e| = |I_r|$: отражение также полное, наличие реактивного сопротивления сказывается только на положении узлов и пучностей. При $Z = W$ получаем $I_r = 0$, т. е. волна совсем не отражается. Ток, подойдя к мостику по одному из проводов, проходит через мостик, попадает в другой провод и возвращается к началу линии.

§ 144. Свойства быстропеременных токов. Скин-эффект

1. В металлах из-за их высокой проводимости основную роль играет *ток проводимости*, по сравнению с которым током смещения можно полностью пренебречь. Благодаря этому проникновение магнитного поля в металл в математическом отношении вполне аналогично *процессу диффузии.*

Напомним сначала простейшие уравнения, которыми описывается процесс диффузии частиц вещества. Пусть частицы помещены в длинную прямолинейную трубу, направленную параллельно оси X (рис. 352). Поперечное сечение трубы для простоты будем считать равным единице. Концентрация частиц n является функцией координаты x и времени t. Если $j(x)$ — плотность диффузионного тока, то приращение в единицу времени числа частиц в слое, заштрихованном на рисунке, представится разностью $j(x) - j(x + dx) = -(\partial j/\partial x)\,dx$. То же приращение равно $(\partial n/\partial t)\,dx$. Таким образом,

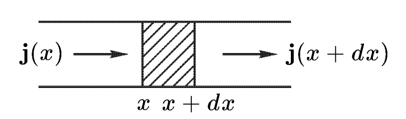


Рис. 352

$$\frac{\partial j}{\partial x} = -\dot{n}, \quad j = -D\frac{\partial n}{\partial x}, \tag{144.1}$$

где D — коэффициент диффузии. Выделим теперь в трубе столб вещества длиной l. Пусть в начальный момент времени на левом конце этого столба концентрация n отлична от нуля, а на правом обращается в нуль. Допустим также, что концентрация n равна нулю во всех точках трубы, расположенных правее выделенного столба. Плотность диффузионного тока будет $j \sim Dn/l$. Ту же величину можно представить выражением $j = nv$, где v — скорость, с которой вещество при диффузии распространяется вдоль трубы. Отсюда находим $v \sim D/l$. Время τ, за которое вещество диффундирует на расстояние l, будет $\tau \approx l/v \approx l^2/D$, и, следовательно,

$$l \sim \sqrt{D\tau}. \tag{144.2}$$

2. Перейдем теперь к *задаче о проникновении электромагнитного поля в металл.* В пренебрежении током смещения этот процесс описывается уравнениями

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}}.$$

Пользуясь соотношениями

$$\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H},$$

исключим из этих уравнений векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Получим

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi\mu}\operatorname{rot}\mathbf{B}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{j} = -\frac{\lambda}{c}\dot{\mathbf{B}}.$$

Допустим, что все величины зависят только от *одной координаты* x, и для этого случая запишем полученные уравнения в координатной форме. Поступая так же, как при выводе формул (139.2), убедимся, что уравнения распадутся на две однотипные группы. В одну группу войдут уравнения, содержащие j_y и B_z, в другую — j_z и B_y. Поскольку эти две группы уравнений *независимы*, достаточно исследовать одну из них. Поэтому с самого начала можно предположить, что ток $\mathbf{j}$ течет параллельно оси Y, а магнитное поле $\mathbf{B}$ направлено вдоль оси Z. В таком случае

$$\frac{\partial j}{\partial x} = -\frac{\lambda}{c}\,\dot{B}, \quad j = -\frac{c^2}{4\pi\mu\lambda}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda}{c}\,B\right). \tag{144.3}$$

Эти уравнения переходят в (144.1), если произвести замену $n \to (\lambda/c)B$ и положить

$$D = \frac{c^2}{4\pi\mu\lambda}. \tag{144.4}$$

Таким образом, распространение электромагнитного поля в металле описывается *уравнениями диффузии*, причем *роль коэффициента диффузии играет величина* (144.4).

Допустим теперь, что по плоской поверхности металла начинает течь переменный ток, периодически меняющийся во времени с периодом T. Через половину периода $T/2$ ток изменит направление на противоположное. За это время, как видно из формулы (144.2), магнитное поле, а с ним и электрический ток успеют проникнуть внутрь металла на глубину

$$l \sim \sqrt{D\frac{T}{2}} \sim c\sqrt{\frac{T}{8\pi\mu\lambda}} \sim \frac{c}{\sqrt{8\pi\mu\lambda\nu}}, \tag{144.5}$$

где $\nu = 1/T$ — частота переменного тока.

Таким образом, плотность тока в металле *убывает с глубиной*. Ток течет практически только в поверхностном слое металла, толщина которого порядка l. Это явление называется *скин-эффектом* (от английского слова «скин», что означает «кожа»), а величина l — *глубиной проникновения тока* (или магнитного поля) в металл. Глубина проникновения убывает с частотой, как $1/\sqrt{\nu}$. Возьмем в качестве примера медь. Для нее $\lambda = 5{,}4\cdot 10^{17}$ с$^{-1}$ (величину μ принимаем равной единице). Тогда для «городского» тока $\nu = 50$ Гц, и по формуле (144.5) находим $l \approx 0{,}7$ см~ 1 см. При $\nu = 5000$ Гц $l \sim 0{,}1$ см, при $\nu = 5\cdot 10^5$ Гц $l \sim 0{,}01$ см и т. д. Таким образом, токи высокой частоты текут только в тонком поверхностном слое металла. В целях упрощения вычислений мы рассмотрели явление скин-эффекта для случая бесконечного металла, ограниченного плоскостью. Но скин-эффект, конечно, имеет место и в тех случаях, когда токи текут по проводам. Только в этом случае выражение для глубины проникновения будет отличаться от (144.5) множителем, зависящим от радиуса провода. Впрочем, этот множитель порядка единицы, а потому для понимания явления он никакой существенной роли не играет.

3. Дадим теперь качественное объяснение скин-эффекта. Рассмотрим цилиндрический провод, по которому течет переменный ток I (рис. 353). Возьмем в меридиональном сечении провода прямоугольный контур $MM'N'N$, одна из сторон которого MM' проходит по оси провода. Пусть в рассматриваемый момент ток I течет вверх. Магнитные силовые линии будут обвиваться вокруг оси провода, как указано на рис. 353. Допустим теперь, что ток I, а с ним и магнитный поток Φ через контур $NMM'N'$ возрастают. Тогда возникает электрическое поле индукции $\mathbf{E}_{\text{инд}}$, направленное на NN' вверх, а на MM' — вниз. Это поле будет усиливать ток на периферии NN' и ослаблять на оси MM'. Если же ток I убывает, то поле $\mathbf{E}_{\text{инд}}$ изменит направление — теперь ток будет усиливаться на оси MM' и ослабляться на периферии NN'. Таким образом, каково бы ни было изменение тока I, индукционный ток способствует этому изменению на периферии и препятствует на оси провода. В результате этого амплитуда установившихся колебаний тока на NN' становится больше, чем на оси MM'. Чем дальше от оси провода, тем больше амплитуда колебаний тока, так как магнитный поток Φ через контур $MM'N'N$ увеличивается с возрастанием расстояния MN. Такое перераспределение тока по сечению провода и есть скин-эффект.

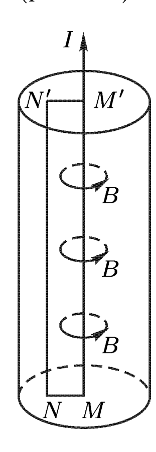


Рис. 353

Концентрация тока на поверхности провода приводит к тому, что сплошной провод начинает вести себя как полый с толщиной стенок, равной приблизительно глубине проникновения l. От этого сопротивление провода увеличивается, а индуктивность уменьшается. Поэтому для быстропеременных токов провода выгодно делать полыми, в виде труб, а не в виде сплошных проволок, так как внутренние приосевые части таких проволок в этих случаях бесполезны. Для более конкретного представления о влиянии скин-эффекта на сопротивление проводов приведем следующие данные. При частоте переменного тока $\nu = 50$ Гц сопротивление медного провода диаметром 2 см по сравнению с сопротивлением постоянному току увеличивается приблизительно на 3 %, а для проволоки диаметром 2 мм — всего на 0,0003 %. Для быстропеременных токов с частотой $\nu = 10^6$ Гц и провода с диаметром 2 мм сопротивление увеличивается почти в 7 раз. Если проволока не прямая, а навита, например, на катушку, то распределение тока по сечению проволоки становится несимметричным: плотность тока больше на стороне проволоки, обращенной внутрь катушки.

4. При быстрых электрических колебаниях магнитное поле меняется также очень быстро. Поэтому индукционные действия быстропеременных токов могут быть очень сильными. Их можно еще больше усилить, если воспользоваться явлением резонанса. На этом основано действие высокочастотного *резонансного трансформатора Тесла* (1856–1943). Это воздушный трансформатор, первичная обмотка которого L_1 состоит из небольшого числа витков толстой проволоки

и входит в состав колебательного контура, содержащего конденсатор (лейденскую банку) C и искровой промежуток F. Колебательный контур через дроссели D соединен с индуктором I (рис. 354). Вторичной обмоткой L_2, которая помещается внутри первичной, служит спираль, состоящая из многих витков тонкой проволоки, намотанной в один ряд на изолирующий цилиндр. Обе обмотки, а также отдельные витки вторичной обмотки должны быть хорошо изолированы друг от друга. Вторичная обмотка поэтому часто парафинируется и погружается в масло. Когда пробивается искровой промежуток F, в первичной обмотке возникают высокочастотные электрические колебания, а во вторичной — индукционные токи той же частоты. Катушка L_2 обладает собственными частотами, и поэтому колебания высокочастотных индукционных токов особенно сильны при совпадении одной из этих частот (обычно основной) с собственной частотой колебательного контура. В колебаниях с основной частотой посередине катушки возникает пучность тока, электрическое поле максимально на краях. Амплитуда колебаний напряжения между концами вторичной обмотки получается значительно больше амплитуды колебаний напряжения на конденсаторе первичной обмотки. В этом можно убедиться с помощью выражения для электрической энергии конденсатора $W_e = CV^2/2$, если принять во внимание, что электромагнитная энергия из первичной обмотки переходит во вторичную, и пренебречь при этом потерями энергии. Действительно, емкость вторичной обмотки много меньше емкости конденсатора первичной цепи. Поэтому напряжение на ней будет больше. Аналогично убеждаемся, что амплитуда тока во вторичной обмотке получится значительно меньше, чем в первичной [1].

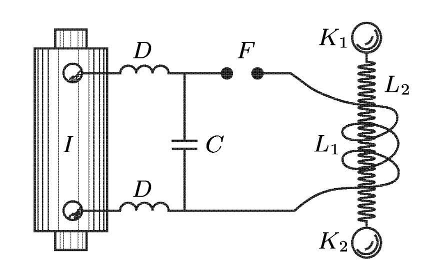


Рис. 354

Сильное электрическое поле вблизи полюсов K_1 и K_2 вторичной обмотки очень эффектно проявляется в темноте в виде энергичных разрядов в воздух с этих полюсов. При приближении к полюсам K_1 и K_2 заземленных проводников образуются длинные электрические искры. Тесла получал искры длиной до двух метров, что соответствует напряжению более миллиона вольт. Искры можно извлекать и из

[1] Аргументация подобного рода, хотя она и часто применяется, отличается неясностью. Вторичная обмотка характеризуется определенными емкостью и индуктивностью. Эти понятия применимы для постоянных и квазистационарных полей, тогда как в трансформаторе Тесла мы имеем дело с высокочастотными полями, для которых условие квазистационарности не выполняется. Неясным остается и смысл напряжения, поскольку в переменных полях интеграл $\int E\,dl$ зависит от пути интегрирования. Строгое (и понятное) рассмотрение должно основываться на системе уравнений Максвелла. Однако такового, по-видимому, не существует.

других частей вторичной обмотки, но они слабее. Вблизи середины обмотки искры не возникают (узел напряжения). Газоразрядные трубки светятся даже на значительном расстоянии от трансформатора Тесла.

Быстропеременные токи от трансформатора Тесла, несмотря на их высокое напряжение, не опасны для человека, а наоборот, ими даже пользуются теперь в лечебных целях. Человек может без боли выдерживать переменный ток с частотой 50 Гц до 0,1 А, тогда как при частоте 10^5 Гц можно довести силу тока до 0,8 А без заметного сокращения мускулов. (Эти пределы для разных людей разные.) Можно произвести следующий опыт. Кусок голой медной проволоки, служащий ручкой, обвивается два-три раза вокруг нарезного цоколя обыкновенной лампочки накаливания. Экспериментатор становится на изолирующую скамейку, удерживая лампочку за другой конец проволоки. Второй контакт лампочки он подносит к верхнему полюсу вторичной обмотки трансформатора Тесла, нижний полюс которой заземлен. Хотя цепь лампочки и не замкнута (экспериментатор стоит на изолирующей скамейке), лампочка ярко горит. Это происходит потому, что за половину периода лампочка и тело экспериментатора заряжаются электричеством определенного знака, а в следующую половину периода — таким же электричеством, но противоположного знака. Ввиду того, что колебания высокочастотные (порядка 10^6 Гц и выше), такая перезарядка происходит очень часто, и возникает переменный ток, достаточный для накала нити лампы. Через тело экспериментатора проходят при этом токи в несколько ампер. Такие токи, если бы они были постоянными, вызвали бы сильные физиологические действия и были бы очень опасны для жизни. Однако в описанном опыте токи высокочастотные. Экспериментатор не ощущает их, так как они протекают только в тонком поверхностном слое его кожи и не заходят вглубь, где расположена нервная система и жизненно важные органы человека. Можно даже подносить к полюсу вторичной обмотки палец руки. Искры, проскакивающие между полюсом и пальцем, никакого заметного болевого ощущения не вызывают.

ЗАДАЧА

В § 47 было указано, что для измерения электростатических полей на моделях в электролитической ванне применяется переменное напряжение. Выяснить пределы применимости такого метода.

Решение. Прежде всего должно соблюдаться условие квазистационарности. При наличии проводимости жидкости оно означает, что размеры ванны L должны быть малы не только по сравнению с длиной электромагнитной волны в электролите Λ, но и по сравнению с глубиной l проникновения электромагнитного поля в электролит из-за скин-эффекта. (Длина волны обозначается через Λ, λ применяется для обозначения удельной проводимости электролита.) Кроме того, должно быть выполнено условие применимости метода сечений. При обосновании этого метода используется то обстоятельство, что в электролите на его поверхности должна обращаться в нуль нормальная составляющая электрического поля, что в случае переменных полей может соблюдаться только приближенно. Пусть электролит граничит с воздухом.

Тогда на границе раздела должны соблюдаться условия

$$-D_n + D_{0n} = 4\pi\sigma, \quad j_n = \partial\sigma/\partial t,$$

где $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D}_0$ — векторы индукции в электролите и в воздухе, σ — поверхностная плотность зарядов, j — плотность тока в электролите (нормаль проведена от электролита к воздуху). Введем электрические поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}_0$ и предположим, что они $\sim e^{i\omega t}$. Тогда

$$E_{0n} - \varepsilon E_n = 4\pi\sigma, \quad \lambda E_n = i\omega\sigma,$$

откуда

$$E_n = \frac{E_0 n}{\varepsilon - i\cdot 4\pi\lambda/\omega}, \quad D_n = \frac{E_{0n}}{1 - i\cdot 4\pi\lambda/\omega\varepsilon}.$$

Скачок нормальной составляющей вектора $\mathbf{D}$ обусловлен поверхностными зарядами на границе электролита. Эти заряды ослабляют поле электродов внутри и усиливают вне электролита. При выполнении условия $|D_n| \ll$ $\ll E_{0n}$, поверхностные заряды почти полностью компенсируют нормальную составляющую поля электродов в электролите на его границе. Для полной компенсации надо было бы очень мало изменить поверхностную плотность σ. Тогда мы получили бы точно $E_n = 0$, и для такого искаженного поля условие применимости метода сечений было бы выполнено. Но, очевидно, малое изменение плотности σ мало изменит и поле внутри электролита. Поэтому можно считать, что при соблюдении неравенства

$$\varepsilon \ll 4\pi\lambda/\omega$$

нормальная составляющая E_n на поверхности электролита практически равна нулю. Это неравенство и есть условие применимости метода сечений. Используя формулу (144.5), а также выражение $\Lambda = 2\pi c/(\omega\sqrt{\varepsilon})$, неравенство можно записать в виде $l \ll \Lambda$. Окончательно условие применимости метода электролитической ванны можно записать в виде

$$L \ll l \ll \Lambda. \tag{144.6}$$

Подставляя выражения для l и Λ, получаем

$$\nu \ll \frac{c}{L\sqrt{\varepsilon}}, \tag{144.7}$$

$$\frac{\nu\varepsilon}{8\pi} \ll \lambda \ll \frac{c^2}{8\pi\nu L^2}. \tag{144.8}$$

При $L = 1$ м, $\varepsilon = 81$ из (144.7) получаем $\nu \ll 3\cdot 10^7$ Гц независимо от электропроводности электролита. Для предельной частоты $3\cdot 10^7$ Гц условие (144.8) дает

$$9{,}7\cdot 10^7 \ll \lambda \ll 12\cdot 10^7\ \text{с}^{-1}.$$

Отсюда видно, что метод электролитической ванны (при $L \sim 1$ м) уже неприменим на частотах порядка 10^7 Гц. Для обычно применяемых частот $\nu \sim 10^3$ Гц имеем $3\cdot 10^3 \ll \lambda \ll 3\cdot 10^{12}$ с$^{-1}$, или $10^{-9} \ll \lambda \ll 1$ Ом$^{-1}\cdot$см$^{-1}$.

§ 145. Давление и импульс электромагнитных волн

1. Максвеллом теоретически было показано, что электромагнитные волны, отражаясь или поглощаясь в телах, на которые они падают, оказывают на них *давление.* Это давление есть результат воздействия магнитного поля волны на электрические токи, возбуждаемые электрическим полем той же волны, а иногда также воздействия элек-

трического поля на заряды, индуцируемые в веществе тем же полем. Рассмотрим, например, бегущую плоскую электромагнитную волну в однородной среде. Если среда поглощающая, т. е. обладает проводимостью, то электрическое поле волны возбуждает в ней электрический ток с плотностью $\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}$. Вследствие этого на единицу объема среды действует сила $\mathbf{f} = (1/c)[\mathbf{jB}] = (\lambda/c)[\mathbf{EB}]$, направленная в сторону распространения волны. Эта сила и вызывает давление электромагнитной волны. При отсутствии поглощения ($\lambda = 0$) $\mathbf{f} = 0$, т. е. распространение электромагнитной волны в этом случае не связано ни с каким давлением на среду.

2. Для вычисления давления электромагнитных волн и уяснения его происхождения рассмотрим сначала частный случай. Пусть плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в вакууме, падает на плоскую границу идеально проводящего металла (рис. 355). При отражении волна изменяет направление. При этом должно измениться на противоположное направление одного из векторов $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$. Легко видеть, что это произойдет с вектором $\mathbf{E}$. Действительно, так как вторая среда идеально проводящая ($\lambda = \infty$), в ней электрическое поле должно обращаться в нуль. Иначе, в силу закона Ома $\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}$, в среде возникли бы электрические токи с бесконечной плотностью, что физически невозможно. Так как тангенциальные составляющие элек-

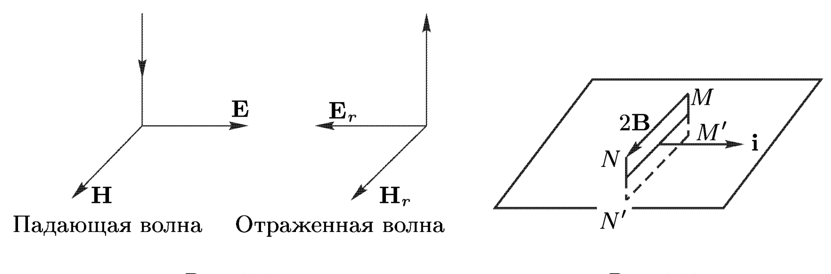


Рис. 355 Рис. 356

трического поля непрерывны, то на границе раздела электрический вектор должен обращаться в нуль и в первой среде. Но поле в первой среде складывается из поля $\mathbf{E}$ падающей и поля $\mathbf{E}_r$ отраженной волн. Поэтому на границе должно быть $\mathbf{E} + \mathbf{E}_r = 0$, т. е. $\mathbf{E}_r = -\mathbf{E}$, что и требовалось доказать. Напротив, на той же границе магнитный вектор отраженной волны будет $\mathbf{H}_r = \mathbf{H}$, а результирующее магнитное поле в первой среде $\mathbf{H} + \mathbf{H}_r = 2\mathbf{H}$. Таким образом, магнитный вектор при переходе через границу раздела претерпевает скачок, равный $2\mathbf{H}$. Это означает, что по поверхности металла в направлении электрического вектора $\mathbf{E}$ течет поверхностный ток с линейной плотностью $\mathbf{i}$ (рис. 356). Величина этой плотности найдется по теореме о циркуляции, если применить последнюю к контуру $MNN'M'$. Это дает $2H = 4\pi i/c$, откуда $i = cH/2\pi$.

При вычислении силы, действующей на элементарную площадку dS поверхности тела с током $i\,dS$, надо соблюдать осторожность. Дело

в том, что эта сила определяется магнитным полем $\mathbf{H}_{\text{внеш}}$, *внешним по отношению к самому току* $\mathbf{i}\,dS$. Внешнее поле на поверхности площадки dS, очевидно, одинаково по обе ее стороны; оно непрерывно. Собственное же магнитное поле тока $\mathbf{i}\,dS$ претерпевает разрыв. Если со стороны вакуума его обозначить через $\mathbf{H}_{\text{соб}}$, то со стороны металла, ввиду симметрии, оно будет $-\mathbf{H}_{\text{соб}}$. Применение теоремы о циркуляции к контуру $MNN'M'$ дает $H_{\text{соб}} = 2\pi i/c = H$. Вычитая это значение из полного поля $2H$ вне металла, получим $\mathbf{H}_{\text{внеш}} = \mathbf{H}$. (Тот же результат можно получить из условия, что внутри металла внешнее поле должно уничтожать собственное поле.) Сила, действующая со стороны внешнего поля на ток $\mathbf{i}\,dS$, направлена внутрь металла, т. е. это есть *сила давления.* Давление на единицу поверхности металла будет

$$\mathscr{P} = \frac{1}{c}\,\overline{iH}_{\text{внеш}} = \frac{1}{2}\,\overline{H^2}, \tag{145.1}$$

где черта означает усреднение по времени. Ввиду равенства $E = H$ можно также написать

$$\mathscr{P} = \frac{1}{2\pi}\,\overline{EH} = \frac{1}{4\pi}\,(\overline{E^2} + \overline{H^2}) = 2\overline{w}, \tag{145.2}$$

где $\overline{w}$ — средняя плотность электромагнитной энергии падающей волны. Таким образом, при нормальном падении электромагнитной волны на идеально отражающую поверхность металла металл испытывает давление, равное *удвоенной средней плотности энергии падающей волны.*

3. Совершенно так же может быть разобран случай *наклонного падения волны.* Вычисления здесь будут несколько сложнее. Появится разрыв не только тангенциальных составляющих магнитного поля, но и нормальных составляющих электрического поля. Последний разрыв означает, что на поверхности металла возникнут *электрические заряды*, и надо принимать во внимание силы, действующие на эти заряды со стороны электрического поля. Таким образом, давление электромагнитной волны в этом случае имеет *двойное происхождение.* Оно складывается из *«магнитной силы»*, с которой магнитное поле действует на поверхностные токи металла, и из *«электрической силы»*, с которой на поверхностные заряды того же металла действует электрическое поле. Мы не будем производить эти вычисления, а воспользуемся более общим подходом к вопросу о давлении электромагнитных волн.

4. Будем предполагать опять, что волна падает нормально на поверхность идеального металла. Допустим, что поле волны заполняет цилиндр высотой c с площадью основания, равной единице. Ось цилиндра совпадает с направлением распространения волны. Такая волна будет падать на металл в течение секунды. Поскольку она оказывает давление $\mathscr{P}$ на поверхность металла, последний за это время приобретет импульс $\mathbf{I}_{\text{вещ}} = \mathscr{P} = \overline{EH}/2\pi$, или в векторной форме $I_{\text{вещ}} = \overline{[\mathbf{EH}]}/2\pi$. В замкнутой системе, состоящей из металла и электромагнитного поля, получилось бы *нарушение закона сохранения импульса*, если бы импульсом обладало *только вещество.* Импульс указанной системы

может сохраняться только при условии, что *электромагнитная волна также обладает импульсом*: металл приобретает импульс за счет импульса, передаваемого ему электромагнитной волной. Для вычисления импульса падающей электромагнитной волны $\mathbf{I}_{эл}$ замечаем, что при отражении ее импульс *не меняется по модулю*, *но меняет направление на противоположное*, т. е. изменение электромагнитного импульса в этом процессе равно $\Delta\mathbf{I}_{эл} = -\mathbf{I}_{эл} - (+\mathbf{I}_{эл}) = -2I_{эл}$, тогда как для вещества $\Delta\mathbf{I}_{вещ} = \mathbf{I}_{вещ}$. Закон сохранения импульса требует $\Delta\mathbf{I}_{эл} + \Delta\mathbf{I}_{вещ} = 0$, откуда $\mathbf{I}_{эл} = \mathbf{I}_{вещ}/2 = \overline{[\mathbf{EH}]}/4\pi$. Разделив это выражение на длину c цилиндра, получим средний электромагнитный импульс единицы объема, т. е. среднюю плотность электромагнитного импульса

$$\overline{\mathbf{g}}_{эл} = \frac{1}{4\pi c}\overline{[\mathbf{EH}]} = \frac{1}{c^2}\overline{\mathbf{S}}, \tag{145.3}$$

где $\mathbf{S}$ — вектор Пойнтинга. При выводе предполагалось, что волна падает нормально на поверхность металла. Однако это обстоятельство не может отразиться на окончательном результате (145.3), так как плотность импульса $\mathbf{g}_{эл}$ есть характеристика *только самой электромагнитной волны* и не может зависеть от тел, с которыми она взаимодействует. Полученные результаты согласуются с тем, что было сказано об электромагнитном количестве движения в § 84.

5. Покажем на примере, как следует пользоваться формулой (145.3) для вычисления сил, с которыми излучение действует на тело. Пусть электромагнитная волна, распространяющаяся в направлении единичной нормали $\mathbf{N}$, частично отражается в направлении нормали $\mathbf{N}'$, а частично проходит во вторую среду и там поглощается (рис. 357).

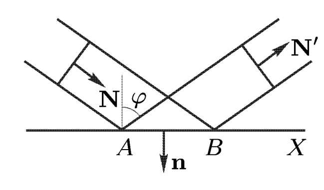


Рис. 357

Если площадь AB, на которую падает волна, равна единице, а угол падения φ, то поперечные сечения падающего и отраженного пучков будут равны $\cos\varphi$ каждый. Возьмем длины пучков равными c. Тогда импульс, передаваемый излучением телу в одну секунду, будет $\mathbf{I} = \cos\varphi(\overline{w}\mathbf{N} - \overline{w}'\mathbf{N}') = \overline{w}\cos\varphi(\mathbf{N} - \rho\mathbf{N}')$, где $\overline{w}$ и $\overline{w}'$ — средние плотности энергии падающей и отраженной волн, а ρ — *коэффициент отражения.* Излучение действует на единичную площадку AB на границе тела с силой $\mathbf{f} = \mathbf{I}$. Проецируя ее на нормаль и к поверхности тела, находим давление излучения

$$\mathscr{P} = \overline{w}\cos^2\varphi(1 + \rho), \tag{145.4}$$

а проецируя на ось X — среднюю касательную силу, действующую на площадку AB:

$$\tau = \overline{w}\sin\varphi\cos\varphi(1 - \rho). \tag{145.5}$$

При $\rho = 1$ и при нормальном падении получаем прежний результат $\mathscr{P} = 2\overline{w}$. Если же среда полностью поглощает падающее излучение $(\rho = 0)$, то $\mathscr{P} = \overline{w}$, т. е. в этом случае давление вдвое меньше.

6. Чтобы составить представление о давлении излучения, рассчитаем его для солнечного излучения вблизи земной поверхности. Как показали измерения, средняя плотность потока энергии в этом случае $\overline{S} = 2$ кал/(см$^2 \cdot$ мин)$= 1{,}4 \cdot 10^3$ Вт/м^2. Для давления излучения на полностью поглощающую поверхность, перпендикулярную к излучению, находим $\mathscr{P} = \overline{S}/c = 4{,}7 \cdot 10^{-6}$ Па, а на полностью отражающую $9{,}4 \cdot 10^{-6}$ Па. Несмотря на ничтожные значения этих величин, экспериментальное доказательство существования давления электромагнитных волн было впервые получено на волнах света в классических опытах П. Н. Лебедева. Лебедев в 1900 г. доказал существование светового давления на твердые тела, а в 1910 г. — и на газы. Результаты этих опытов оказались в согласии с электромагнитной теорией света. Впрочем, давление излучения не всегда столь мало. Если с помощью линзы сфокусировать на поверхности монеты пучок света от лазера, то световое давление пробивает монету, оставляя в ней маленькую дырочку (диаметром в несколько десятых миллиметра). Давление излучения громадно внутри горячих звезд и играет существенную роль при их взрывах. Когда температура в звезде достигает 10^8 кэВ (такие температуры достигаются также при взрывах атомных и водородных бомб), давление излучения становится того же порядка, что и давление плазмы, из которой состоит звезда.

§ 146. Принципы радиосвязи

1. Всякий провод, по которому течет переменный ток, излучает электромагнитные волны. Однако если ток замкнут и выполнено условие квазистационарности, то *излучения практически не будет.* Действительно, разобьем провод на элементы тока $I\,d\mathbf{l}$. Каждый из этих элементов излучает, как точечный диполь, производная дипольного момента которого по времени определяется выражением $d\dot{\mathbf{p}} = I\,d\mathbf{l}$. Если выполнено условие квазистационарности, то все эти дипольные моменты колеблются почти в одинаковых фазах, а потому при рассмотрении поля в волновой зоне (а только такое поле и представляет интерес в вопросах радиосвязи) все их можно считать как бы сосредоточенными в одной точке. Следовательно, весь виток с током будет излучать, как точечный диполь, для которого $\dot{\mathbf{p}} = \oint d\dot{\mathbf{p}} = \oint I\,d\mathbf{l}$. В случае квазистационарных токов величина I одна и та же вдоль всего витка, а потому $\dot{\mathbf{p}} = I \oint d\mathbf{l} = 0$, так как для всякого замкнутого контура $\oint d\mathbf{l} = 0$. При более точном рассмотрении замкнутый виток с током можно разбить на две половины и каждую из них заменить точечным диполем. Тогда получится система двух точечных диполей *с равными, но противоположно направленными моментами*, сдвинутыми один относительно другого на расстояние, малое по сравнению с длиной волны. Теоретически такая система излучает, но практически излучения нет, так как в волновой зоне поле излучения меняется с расстоянием, как $\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{1}{r}\right) \sim \dfrac{1}{r^2}$, т. е. убывает слишком быстро. Эти рассуждения

применимы и к колебательному контуру, а также ко всякой «закрытой» системе, т. е. к системе с замкнутыми или почти замкнутыми токами. Для получения интенсивного излучения надо перейти к *«открытым»* системам, в которых токи не замкнуты. Теоретически наилучшей системой является прямолинейный провод, в котором возбуждаются (незамкнутые) переменные токи. Излучатель такого типа был использован уже в классических опытах Герца. В радиотехнике излучающей системой служит *антенна* — незамкнутый провод или система проводов, подвешенных высоко над землей, по которым текут переменные токи.

Низкочастотные токи, применяемые в электротехнике, не годятся для целей радиосвязи по двум причинам. Во-первых, потому, что они излучают *очень слабо.* (Мощность излучения пропорциональна четвертой степени частоты, см. § 141.) Во-вторых, для возбуждения сильных колебаний в антенне используется явление резонанса, а следовательно, размеры антенны должны быть *очень большими.* Например, если излучающей антенной служит прямолинейный провод, то для возбуждения основного колебания длина провода должна быть $l = \lambda/2$. При частоте $\nu = 1000$ Гц это дает $l = 150$ км. Поэтому в радиотехнике излучающие антенны питаются *токами высокой частоты.* В радиовещании пользуются частотами, лежащими приблизительно в пределах от 10^5 до 10^8 Гц, чему соответствуют длины волн от 3 км до 3 м. Для решения специальных задач, где существенна острая направленность излучения, применяют дециметровые и сантиметровые волны (частоты до 10^{10} Гц и выше).

Принцип радиосвязи очень прост. В антенне передающей радиостанции, настроенной в резонанс с генератором (рис. 358 *а*), возбуждаются сильные высокочастотные токи. Электромагнитные волны, излу-

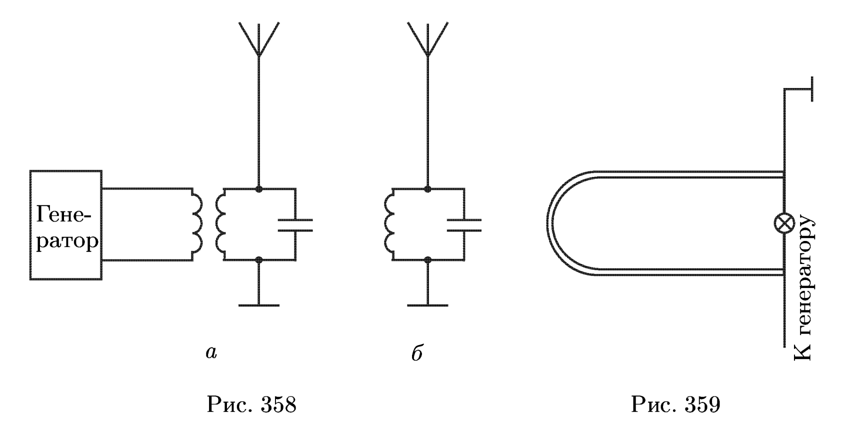


Рис. 358 Рис. 359

чаемые этой антенной, достигая приемной антенны (рис. 358 *б*), также настроенной в резонанс с генератором, в свою очередь возбуждают в ней токи той же частоты, которые могут быть усилены и использованы. Для настройки антенн конденсатор можно включать не только параллельно катушке индуктивности (рис. 358), но и последовательно

с ней (рис. 359). При параллельном включении увеличивается общая емкость системы, а следовательно, ее собственная частота уменьшается. При последовательном соединении, наоборот, емкость уменьшается, а частота увеличивается.

2. Однако чисто синусоидальные волны высокой частоты, излучаемые антенной, не только *не несут никакой информации*, но и *не воспринимаются ухом человека*, если их преобразовать в звуковые волны той же частоты. Для передачи информации, например человеческой речи или музыки, требуются *низкочастотные сигналы*, с частотами примерно от 100 до нескольких тысяч герц. Для передачи телеграфных сигналов требуемые частоты еще ниже. Непосредственная передача низкочастотных сигналов радиоволнами тех же частот, как указывалось выше, невозможна из-за невозможности их генерации. Эта трудность устраняется в радиотехнике тем, что *передача осуществляется синусоидальными волнами высокой частоты*, *измененными низкочастотными сигналами.* Такое изменение называется *модуляцией*, а сами волны — *модулированными* (см. § 128). Модуляция состоит в изменении во времени *амплитуды*, *частоты* или *фазы колебания.* Во всем последующем изложении имеется в виду наиболее простая, *амплитудная*, *модуляция.*

Если из студии радиостанции не производится передача, то колебания тока в передающей антенне синусоидальны:

$$I = I_0 \sin \omega t \tag{146.1}$$

(рис. 360 *а*). Во время передачи (речь, музыка перед микрофоном) эти колебания преобразуются в

$$I = I_0[1 + f(t)] \sin \omega t, \tag{146.2}$$

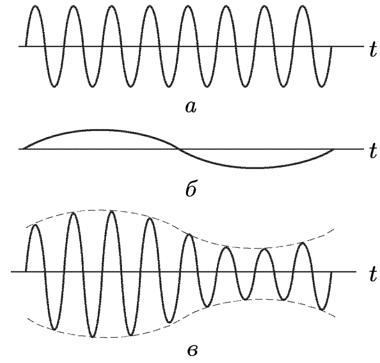


Рис. 360

где функция $f(t)$ зависит от формы передаваемого (модулирующего) сигнала $[|f(t)| < 1]$. Она называется *модулирующей функцией.* Простейшая модулирующая функция соответствует передаче чисто музыкального тона, например звучания камертона. В этом случае $f(t) = \alpha \sin \Omega t$ (рис. 360 *б*). Постоянная Ω называется *частотой*, а постоянная α — *глубиной модуляции.* (Начальную фазу мы взяли равной нулю, так как она не играет принципиальной роли.) Подставляя $f(t)$ в формулу (146.2), представим модулированное колебание в виде

$$I = I_0[1 + \alpha \sin \Omega t] \sin \omega t \tag{146.3}$$

(рис. 360 *в*). Преобразовывая это выражение, получим

$$I = I_0 \sin \omega t + \frac{\alpha I_0}{2} \cos (\omega - \Omega)t - \frac{\alpha I_0}{2} \cos (\omega + \Omega)t. \tag{146.4}$$

Если модулирующая функция $f(t)$ не синусоидальна, но периодична, то ее можно разложить в ряд Фурье и к каждому члену этого разложения применить рассуждение, приведенное выше. Тогда вместо двух частот $\omega - \Omega$ и $\omega + \Omega$ слева и справа от ω появится несколько боковых частот. Они образуют *боковые полосы*, состоящие из дискретного набора частот. Если же модулирующая функция не периодична, то она разлагается в интеграл Фурье. В этом случае боковые полосы слева и справа от ω содержат не только бесконечное, но и *непрерывное* множество частот. Примером могут служить модулирующая функция и модулированные колебания в случае телеграфных знаков, передаваемых по азбуке Морзе (рис. 361). Существенно, что все боковые частоты расположены *очень близко* от «несущей» частоты ω. Все колебания с такими частотами являются *высокочастотными*, а потому они пригодны для излучения радиоволн. Приемник должен принимать *не только колебания несущей частоты, но и колебания примыкающих к ней боковых полос.* Иначе вся информация, содержащаяся в передаваемом сигнале, будет утеряна. Поэтому настройка приемника *не должна быть особенно острой.*

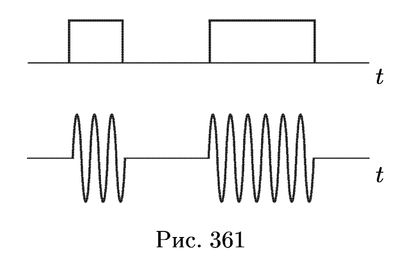


Рис. 361

3. Для осуществления модуляции применяются устройства, образующие *произведения*, а не сумму подводимых к ним напряжений. Такие устройства принадлежат к классу нелинейных систем. На рис. 362 приведена простейшая схема генератора радиотелефонного передатчика с модуляцией на сетку. Колебательный контур включен в цепь анода. Модулирующее напряжение возникает в цепи микрофона M и повышается трансформатором. Сопротивление сеточного конденсатора C_g для высокочастотных токов генератора мало, а сопротивление вторичной обмотки трансформатора благодаря ее большой индуктивности, наоборот, велико. Поэтому токи высокой частоты не ответвляются в модулирующую микрофонную цепь, и генератор работает практически так же, как и в отсутствие этой цепи. Иначе ведут себя микрофонные токи, идущие от вторичной обмотки трансформатора. Это токи низкой частоты. Для них конденсатор C_g оказывает очень большое сопротивление, а потому напряжение трансформатора оказывается целиком приложенным между сеткой и катодом лампы.

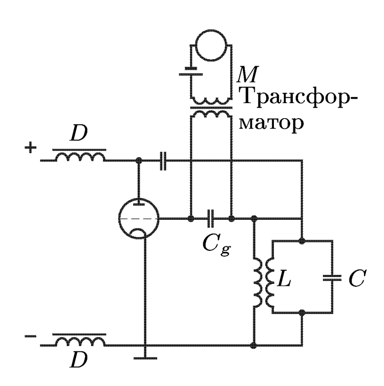


Рис. 362

Это напряжение и модулирует выходное напряжение генератора. Действительно, анодный ток I есть функция анодного V_1 и сеточного V_2 напряжений: $I = I(V_1, V_2)$. Разложим эту функцию в ряд Тейлора по обоим аргументам, оборвав разложение на членах второй степени. Получим

$$I = a_0 + a_1 V_1 + a_2 V_2 + a_{11} V_1^2 + a_{22} V_2^2 + a_{12} V_1 V_2.$$

Последний член пропорционален *произведению* подводимых напряжений. Он и вызывает модуляцию анодного напряжения, а следовательно, и напряжения на конденсаторе или катушке индуктивности колебательного контура. Допустим, например, что $V_1 = A_1 \sin \omega t, V_2 = A_2 \sin \Omega t$. Тогда

$$I = a_1 A_1 \left(1 + \frac{a_{12}}{a_1} A_2 \sin \Omega t\right) \sin \omega t + (a_0 + a_2 A_2 \sin \Omega t + a_{11} A_1^2 \sin^2 \omega t + a_{22} A_2^2 \sin^2 \Omega t).$$

Первая скобка и есть требуемое модулированное колебание. Его можно выделить с помощью резонансного контура, настроенного (но не слишком остро) на частоту ω. Из приведенного анализа следует, что для модуляции колебаний лампа обязательно должна работать в таком режиме, чтобы ее вольт-амперная характеристика была *нелинейна.* Модулированные колебания передаются в антенный контур, связанный индуктивно с катушкой L колебательного контура.

4. Обратимся теперь к приему модулированных колебаний. Под действием модулированной волны передающей антенны в приемной антенне возникают такие же модулированные колебания, только более слабые. Однако даже после предварительного усиления они еще не годятся для непосредственного воспроизведения посланного сигнала. Дело в том, что модулированные колебания, если их разложить на синусоидальные составляющие, будут содержать *только высокие частоты*, с которыми мембрана телефона (благодаря своей инерционности) не может колебаться с заметными амплитудами. Если даже изготовить малоинерционную мембрану (что в принципе возможно), то все равно возбуждаемые ею звуковые колебания (с частотами 10^5–10^8 Гц) будут находиться *вне пределов слышимости человеческого уха.* Поэтому принятые модулированные колебания подвергаются в приемнике *демодуляции*, или *детектированию*, превращаясь в колебания низких частот, соответствующих частотам посланного сигнала.

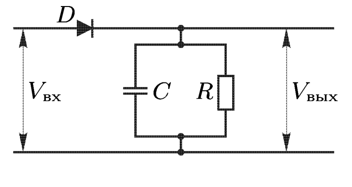


Рис. 363

Демодуляция состоит в том, что высокочастотные колебания выпрямляются (с помощью *кристаллического детектора* или *электронной лампы*), а затем *сглаживаются* цепью, обладающей подходящим временем релаксации (постоянной времени). На рис. 363 изображена одна из возможных схем

детектирования. Выпрямление производится с помощью кристаллического детектора D, сглаживание — с помощью цепи из параллельно соединенных конденсатора C и сопротивления R. Допустим, например, что модулирующий сигнал радиопередатчика состоит из одинаковых равноотстоящих прямоугольных импульсов длительностью t_1 каждый, следующих друг за другом через равные промежутки времени t_2 (рис. 364 *а*). На вход приемника подается модулированный сигнал (рис. 364 *б*). Детектор D «срезает» верхнюю часть этого сигнала. Если бы не было конденсатора C, то на сопротивлении R появилось бы переменное напряжение V_R, представляемое кривой на рис. 364 *в*. В течение времени t_1 оно состояло бы из большого числа равноотстоящих одинаковых микроимпульсов длительностью $T/2$ каждый, где T — период высокочастотных колебаний. В последующий промежуток времени t_2 оно было бы равно нулю. При наличии конденсатора C большая часть тока от первого микроимпульса пойдет на конденсатор, заряжая его до напряжения, малого по сравнению с высотой микроимпульса. Такое же напряжение появится на сопротивлении R. В промежутках между микроимпульсами заряд конденсатора и напряжение на нем убывают экспоненциально по закону $e^{-t/\tau}$, где $\tau = RC$ — время релаксации (постоянная времени) RC-цепи. Если τ велико по сравнению с промежутком времени Δt между последовательными микроимпульсами, то за время Δt заряд и напряжение на конденсаторе при разряде изменятся мало. Второй микроимпульс сигнала немного повысит это напряжение. За ним последует второй разряд и т. д. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока повышение напряжения от микроимпульса при заряде конденсатора не сделается равным последующему понижению того же напряжения при разряде. С этого момента на сопротивлении R установится практически постоянное напряжение. Когда через систему пройдет последний микроимпульс, напряжение на выходе начнет экспоненциально убывать к нулю. Напряжение появится вновь, когда детектор пропустит второй импульс, и т. д. Если время установления напряжения мало по сравнению с t_1 и t_2, то напряжение на выходе будет иметь вид, представленный на рис. 364 *г*. При надлежаще выбранных параметрах системы форма выходного импульса практически не будет отличаться от формы низкочастотного сигнала, посланного передающей радиостанцией. Так же обстоит дело и в случае передачи низкочастотных сигналов непрямоугольной формы.

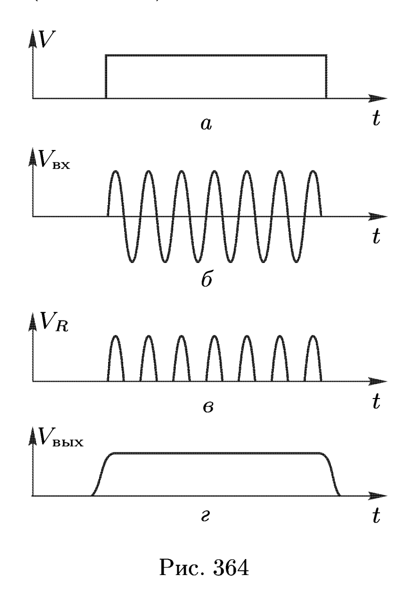


Рис. 364

Для выпрямления колебаний при детектировании по схеме рис. 363 кристаллический детектор можно заменить двухэлектродной электронной лампой — *диодом*. Однако вместо диода обычно применяют *трехэлектродную лампу* (*триод*), которая *не только выпрямляет, но и усиливает колебания*. Соответствующая схема *с сеточной демодуляцией* показана на рис. 365. Ясно, что для получения выпрямляющего действия необходимо, чтобы рабочая точка электронной лампы лежала *в нелинейной части характеристики*, например у ее нижнего загиба.

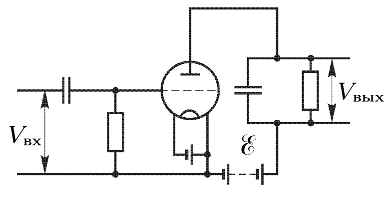


Рис. 365

5. Теперь можно понять действие радиоприемника. Высокочастотные колебания, возбужденные в приемной антенне, попадают сначала в *усилитель высокой частоты*. Входной колебательный контур этого усилителя должен быть *настраиваемым*, чтобы можно было выделять волну определенной радиостанции. Настройка, однако, *не должна быть слишком острой*, чтобы практически одинаково усиливались колебания с несущей частотой и колебания с частотами боковых полос (см. п. 2). Усиленные колебания высокой частоты попадают в *демодулятор* и там преобразуются в *колебания низких частот*, содержащихся в передаваемом сигнале. Эти низкочастотные колебания *опять усиливаются* и попадают в *громкоговоритель* или *другой индикатор*. Приемник, работающий по такому принципу, называется *приемником прямого усиления*. Блок-схема такого приемника приведена на рис. 366. Следует отметить, однако, что в радиовещании обычно применяются так называемые *супергетеродинные приемники*, работающие по несколько измененной схеме (см. п. 7).

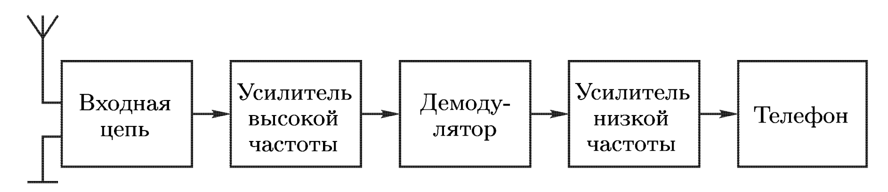


Рис. 366

6. Скажем сначала о *гетеродинном приеме*, применяемом в *радиотелеграфии*. В настоящее время телеграфные сигналы азбуки Морзе принимают почти исключительно с помощью телефона, «на слух». Для этого импульсы высокочастотных колебаний не подвергают демодуляции, а *превращают их в колебания звуковой частоты*. С этой целью на одну из ламп приемника подают два переменных высокочастотных напряжения: напряжение сигнала $V = a \sin \omega t$ и напряжение $V_1 = a_1 \sin \omega_1 t$ от *гетеродина*, т. е. местного маломощного генератора, смонтированного в приемнике. Если лампа работает в нелинейном

режиме, то происходит умножение этих напряжений и образование колебаний с комбинированными частотами $\omega - \omega_1$ и $\omega + \omega_1$ (см. п. 3). Величину ω_1 подбирают так, чтобы частота $\omega - \omega_1$ лежала в области звуковых частот, воспринимаемых ухом. Если радиостанция работает, но не передает сигналов, то в телефоне слышен *непрерывный свист* (музыкальный тон с частотой $\omega - \omega_1$). Если же станция начинает передавать телеграфные сигналы, то непрерывный свист сменяется последовательностью *длинных к коротких* звуков. Натренированное ухо телеграфиста воспринимает длинный звук как тире, а короткий как точку. Среди других преимуществ гетеродинный прием обладает еще одним преимуществом, разъясняемым на следующем примере. Допустим, что на приемник действуют одновременно волны от нескольких радиостанций с практически совпадающими амплитудами и настолько близкими частотами, что их невозможно выделить путем резонанса. Гетеродинный прием в некоторых случаях делает возможным и это. Пусть, например, таких волн три с частотами 99 000, 100 000 и 101 000 Гц, а частота колебаний гетеродина 101 000 Гц. Тогда последнюю волну мы совсем не услышим, так как после гетеродинирования ей соответствует колебание с нулевой частотой. Первым же двум волнам соответствуют частоты в 2000 и 1000 Гц, отличающиеся на целую октаву. Такая разница в высоте звука легко различима, и при некотором навыке можно принимать радиотелеграмму одной волны, не обращая внимания на другую.

7. Недостаток описанного выше приемника прямого усиления состоит в том, что при очень высоких частотах он не позволяет получать большие усиления сигналов. Этому препятствуют неизбежные *паразитные емкости* (емкости электронных ламп, емкости соединительных проводов и пр.), которые при очень высоких частотах оказывают току ничтожные сопротивления и потому *шунтируют лампы.* Имеются и другие причины, связанные с процессами внутри самих электронных ламп. Применять же демодуляцию непосредственно после поступления принимаемого сигнала в антенну, отказавшись вовсе от усиления высокой частоты, нельзя, так как в этом случае при усилении низкой частоты усиливался бы не только сигнал, но и различные *помехи*, которые особенно велики при низких частотах. От указанного недостатка в значительной степени свободен *супергетеродинный приемник*, наиболее распространенный в настоящее время. Основная идея этого приемника состоит *в преобразовании несущей частоты ω в частоту более низкую.* Блок-схема супергетеродинного приемника изображена на рис. 367. Высокочастотное модулированное колебание $V = a[1 + f(t)]\sin\omega t$ подводится к одному, а колебание $V_1 = a_1\sin\omega_1 t$ от местного гетеродина — к другому электроду специальной лампы C. Если лампа C работает в нелинейном режиме, то происходит *умножение напряжений* V и V_1 с образованием колебаний типа

$$[1 + f(t)]\cos(\omega - \omega_1)t, \tag{146.5}$$

$$[1 + f(t)]\cos(\omega + \omega_1)t, \tag{146.6}$$

которые модулированы той же функцией $f(t)$, что и исходное колебание в передающей антенне. Однако несущая частота ω в них заменена на $\omega - \omega_1$ и $\omega + \omega_1$. Этот процесс преобразования частоты в радио-

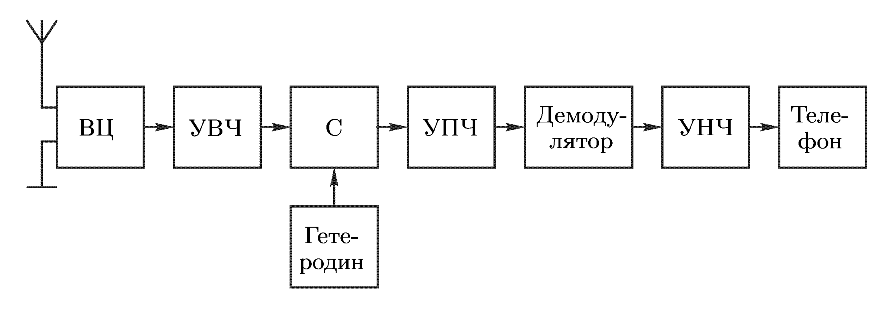


Рис. 367

технике называется *смешением частот*, а лампа, осуществляющая его, — *смесительной лампой* или *смесителем.* В супергетеродинном приемнике представляет интерес колебание (146.5) с частотой $\omega - \omega_1$, называемой *промежуточной частотой.* В отличие от простого гетеродинного приема, промежуточную частоту выбирают *достаточно высокой*, чтобы колебания с этой частотой *не воспринимались ухом.* Колебание (146.5) выделяют резонансным способом и поступают с ним так же, как с исходным колебанием $[1+f(t)]\sin\omega t$ в приемнике прямого усиления, т. е. усиливают в усилителе промежуточной частоты (УПЧ), демодулируют, усиливают в усилителе низкой частоты (УНЧ) и, наконец, направляют в телефон или другой индикатор. Заметим еще, что при настройке на разные станции с изменением емкости конденсатора входного контура приемника изменяется и емкость конденсатора колебательного контура гетеродина таким образом, что промежуточная частота $\omega - \omega_1$ *остается неизменной.* С этой целью подвижные пластины обоих конденсаторов насаживают на общую ось.

§ 147. Распространение электромагнитных волн в волноводах

1. В современной радиотехнике и ее приложениях большое значение имеют *волноводы*, вдоль которых могут распространяться электромагнитные волны. Волновод представляет собой трубу, обычно с металлическими стенками и постоянного поперечного сечения. Труба может быть и криволинейной, но мы ограничимся рассмотрением случая *прямолинейных волноводов.* Внутри волновода обычно находится воздух, который практически можно рассматривать как вакуум. Однако в целях общности мы будем предполагать, что волновод заполнен изотропной однородной средой с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ. Также в целях общности будем считать, что эти

величины зависят от частоты электромагнитного поля ω (дисперсия). Частный случай вакуума получится из общих формул при $\varepsilon = \mu = 1$.

В нашем рассмотрении волновод будет считаться бесконечно длинным. Это допустимо, когда длина волновода велика по сравнению с длиной волны в той среде, которой он заполнен, а также по сравнению с поперечным сечением самого волновода.

При рассмотрении теории волновода нам придется ссылаться на некоторые элементарные понятия и результаты, изложенные в следующих томах курса. Эти ссылки будут указаны в соответствующих местах.

2. Направим координатную ось z вдоль волновода. Если она проходит внутри волновода, то ее условно можно назвать *осью самого волновода.* Для волновода правильной геометрической формы (например, цилиндрической) за ось волновода естественно принять его *геометрическую* ось, т. е. ось симметрии волновода. Координатные оси x и y выберем перпендикулярно к оси z.

Если вдоль волновода может распространяться бегущая электромагнитная волна частоты ω, то ввиду полной эквивалентности всех поперечных сечений волновода фаза волны не должна зависеть от координат x и y, а должна быть лишь функцией координаты z. Это значит, что электромагнитное поле в волноводе должно иметь вид

$$E = E_0(x, y)e^{i(\omega t - k_z z)}, \quad H = H_0(x, y)e^{i(\omega t - k_z z)}, \tag{147.1}$$

где для незатухающей волны k_z — вещественная постоянная. Амплитуды колебаний E_0 и H_0, разумеется, могут меняться от точки к точке в каждом поперечном сечении волновода. Это и отмечено в формулах (147.1).

Фазовая скорость $v_ф$ электромагнитного поля одна и та же вдоль всех прямых, параллельных оси волновода. Она определяется формулой

$$v_ф = \omega / k_z \tag{147.2}$$

(см. т. IV, § 8).

Операция дифференцирования по времени выражения типа (147.1) сводится к умножению уравнений на $i\omega$. Поэтому уравнения Максвелла запишутся в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = i\frac{\omega\varepsilon}{c}\,\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -i\frac{\omega\mu}{c}\,\mathbf{H}.$$

Ввиду независимости ε и μ от координат уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

следуют из этих двух уравнений, а потому они автоматически принимаются во внимание. Пользуясь затем формулами

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 \cdot e^{i(\omega t - k_z z)} - i[\mathbf{k}_z \mathbf{H}], \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = \ldots,$$

запишем уравнения Максвелла в координатной форме:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + ik_z H_y = i\frac{\omega\varepsilon}{c}E_x, \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} + ik_z E_y = -i\frac{\omega\mu}{c}H_x,$$

$$ik_z H_x + \frac{\partial H_z}{\partial x} = -i\frac{\omega\varepsilon}{c}E_y, \quad ik_z E_x + \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\frac{\omega\mu}{c}H_y, \qquad (147.3)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\frac{\omega\varepsilon}{c}E_z, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\frac{\omega\mu}{c}H_z.$$

Для определения электромагнитного поля внутри волновода к этим уравнениям надо прибавить *граничные условия*, которым должны удовлетворять векторы **E** и **H** на внутренних стенках волновода. Мы будем рассматривать простейший и наиболее важный случай, когда эти стенки *идеально проводящие*. Тогда сформулированная задача, как показывает более подробное математическое исследование, при определенных частотах допускает два типа решений.

3. Первый тип. В этом случае $H_z = 0$, $E_z \neq 0$. Такие волны называются волнами *электрического типа*. Для них уравнения (147.3) переходят в

$$k_z H_y = \frac{\omega\varepsilon}{c}E_x, \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} + ik_z E_y = -i\frac{\omega\mu}{c}H_x,$$

$$k_z H_x = -\frac{\omega\varepsilon}{c}E_y, \quad ik_z E_x + \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\frac{\omega\mu}{c}H_y, \qquad (147.4)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\frac{\omega\varepsilon}{c}E_z, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0.$$

Из этих уравнений все компоненты поля можно выразить через E_z. Например, из первого и пятого уравнений (147.4) получим

$$E_x = \frac{ck_z}{\omega\varepsilon}H_y = \frac{ck_z}{\omega\varepsilon}\left(\frac{ck_z}{\omega\mu}E_x - \frac{c}{i\omega\mu}\frac{\partial E_z}{\partial x}\right),$$

откуда и находится выражение для E_x через $\partial E_z/\partial x$. Аналогично получается и для остальных компонент электромагнитного поля. При этом удобно ввести обозначения

$$\alpha^2 = k^2 - k_z^2, \qquad (147.5)$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu. \qquad (147.6)$$

Тогда

$$E_x = -\frac{ik_z}{\alpha^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad H_x = i\frac{\omega\varepsilon}{c\alpha^2}\frac{\partial E_z}{\partial y},$$

$$E_y = -\frac{ik_z}{\alpha^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad H_y = -i\frac{\omega\varepsilon}{c\alpha^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}, \qquad (147.7)$$

$$H_z = 0.$$

Таким образом, задача сводится к нахождению единственной функции $E_z(x, y)$. Для определения этой функции используется уравнение

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = -\alpha^2 E_z. \tag{147.8}$$

Оно является следствием уравнения, которому должно удовлетворять поле E и каждая его компонента. В частности,

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0. \tag{147.9}$$

Кроме того, ввиду (147.1) справедливо уравнение

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k_z^2 E_z = 0, \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (k^2 - k_z^2) E_z = 0,$$

откуда, если использовать обозначение (147.5), и получается уравнение (147.8).

Электрическое поле внутри идеально проводящей стенки равно нулю. Поэтому из равенства тангенциальных компонент электрического поля на границе раздела следует, что на внутренней поверхности стенки волновода $E_z = 0$. Получилась краевая задача для дифференциального уравнения (147.8). Из математики известно, что подобная краевая задача может иметь конечные, однозначные и непрерывные решения не для всех, а только для избранных значений постоянной α^2.

Избранные значения (α^2) *называются собственными значениями оператора* $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, а соответствующие им решения — *собственными функциями* рассматриваемой краевой задачи (см. т. V, § 22). Вид собственных функций зависит от формы и размеров поперечного сечения волновода. Для волновода прямоугольной формы собственные функции находятся элементарно (см. задачу 1 к этому параграфу). Для цилиндрического волновода собственные функции выражаются через функции Бесселя. Однако мы не будем заниматься нахождением собственных функций, а ограничимся рассмотрением только общих свойств волновода, не зависящих от его поперечного сечения.

4. Собственные значения двумерного оператора отрицательны, а поэтому величина α^2 положительна. Докажем эту теорему для более общего случая трехмерного оператора

$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2,$$

частным случаем которого является рассматриваемый двумерный оператор. Запишем уравнение (147.9) в виде

$$\Delta E_z + k^2 E_z = 0$$

и умножим обе части его на E_z^* — величину, комплексно сопряженную по отношению к E_z. Тогда, принимая во внимание тождество

$$\operatorname{div}(E_z^* \operatorname{grad} E_z) = E_z^* \Delta E_z^* + \operatorname{grad} E_z^* \operatorname{grad} E_z,$$

получим

$$\operatorname{div}(E_z^* \operatorname{grad} E_z) - \operatorname{grad} E_z^* \operatorname{grad} E_z + k^2 E_z E_z^*.$$

Мы предполагаем, что область, в которой определена функция E_z, окружена замкнутой металлической оболочкой, на стенках которой $E_z = 0$. Поэтому при интегрировании по объему, ограниченному этой оболочкой, интеграл от дивергенции, в силу теоремы Гаусса, обратится в нуль. В результате получится

$$k^2 = \int \operatorname{grad} E_z^* \operatorname{grad} E_z \, dV \Bigg/ \int E_z^* E_z \, dV,$$

откуда и видно, что величина k^2 существенно положительна.

Доказательство без существенных изменений распространяется и на случай двумерного уравнения (147.8). Только вместо трехмерной замкнутой области надо рассматривать двумерную область, ограниченную замкнутой кривой, получающейся в результате поперечного сечения волновода. Заметим между прочим, что теорема верна и в том случае, когда граничное условие $E_z = 0$ заменено на условие $\partial E_z/\partial n = 0$, где дифференцирование производится по нормали к замкнутой поверхности или замкнутой линии, ограничивающей рассматриваемую область изменения E_z.

5. Изложенное можно получить и из других соображений, которые лучше уясняют физический принцип работы волноводов. Рассмотрим сначала неограниченную однородную среду с диэлектрической и магнитной проницаемостью соответственно $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$. В такой среде могут распространяться плоские незатухающие волны определенной частоты ω:

$$E,\ H \sim e^{i(\omega t - \mathbf{kr})},$$

где волновой вектор $\mathbf{k}$ может иметь любое направление, но его длина определяется соотношением (147.8). Если фиксировать ось z, то волновой вектор каждой плоской волны можно представить в виде $\mathbf{k} = \mathbf{k}_z + \mathbf{k}_\perp$, где $\mathbf{k}_z$ и $\mathbf{k}_\perp$ — компоненты этого вектора вдоль оси z и перпендикулярно к ней соответственно. Таким образом, всякая незатухающая монохроматическая волна частоты ω может быть представлена в виде

$$\sim e^{ik_\perp z_\perp} e^{i(\omega t - k_z z)}.$$

При отсутствии затухания суперпозицией волн такого типа с постоянными коэффициентами можно получить любое решение уравнений Максвелла в среде.

Допустим теперь, что среда заключена внутри волновода. Роль волновода сводится к тому, что из всех волн указанного выше типа он выделяет волны, удовлетворяющие граничному условию $E_z = 0$. Это выделение сводится к тому, что в каждом поперечном сечении волновода могут получиться только такие системы стоячих волн, каждая из которых удовлетворяет указанному условию. Все волны каждой из таких систем характеризуются одним и тем же значением волнового

числа $k_\perp$, которое в силу уравнения (147.8) тождественно с параметром α. В этом причина того, почему параметр α может принимать только дискретный ряд значений. Волновое число k_z также может принимать только допустимые дискретные значения, которые определяются соотношением $k^2 = k_z^2 + \alpha^2$, тождественным с соотношением (147.5). Из изложенного видно, что при отсутствии затухания оба числа k_z^2 и α^2 положительны, причем $k_z^2 < k^2$.

6. Каждая волна в волноводе характеризуется определенным значением параметра α. При этом волны электрического типа не поперечны относительно электрического вектора **E**, так как продольная компонента E_z обращается в нуль только на стенках волновода, а в остальных местах $E_z \neq 0$. Кроме того, из соотношения $k_z^2 < k^2$ следует $1/k_z > 1/k$, или после умножения на ω получим $\omega/k_z > \omega/k$, или $v_ф > v$, где $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ — фазовая скорость электромагнитной волны в *неограниченной среде.* Таким образом, при одной и той же частоте фазовая скорость волны в волноводе $v_ф = c/k_z$, а с ней и длина волны $\lambda_{вол} = 2\pi v/\omega$ больше соответствующих величин в неограниченной среде. В частности, если внутри волновода вакуум, то всегда $v_ф > c$, $\lambda_{вол} > \lambda_{вак}$.

Не все фазовые скорости допустимы, а только такие, которые соответствуют допустимым значениям параметра α. Таким образом, волновод является *фильтром*, пропускающим из непрерывного спектра частот только избранные или собственные частоты. Наконец, при фиксированном значении параметра α невозможно, чтобы $k_z > k$, т. е. $\lambda_{среды} = \lambda_{вол} = 2\pi/\alpha$. Это значит, что при заданном α волновод не пропускает волны, длина которых $\lambda_{среды}$ меньше некоторого верхнего предела $2\pi/\alpha$.

7. Второй тип. В этом случае $E_z = 0$, $H_z \neq 0$, т. е. волны опять не поперечны, но уже относительно вектора **H**. Такие волны называются волнами магнитного типа. Их свойства вполне аналогичны волнам электрического типа, а потому нет необходимости их подробно рассматривать. Укажем только на существенные моменты при исследовании волн магнитного типа. Прежде всего все компоненты поля выражаются через H_z по формулам

$$E_x = -i\frac{\omega\mu}{c\alpha^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad H_x = -i\frac{k_z}{\alpha^2}\frac{\partial H_z}{\partial x},$$
$$E_y = i\frac{\omega\mu}{c\alpha^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad H_y = -i\frac{k_z}{\alpha^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}, \tag{147.10}$$
$$E_z = 0,$$

причем H_z удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = -\alpha^2 H_z, \tag{147.11}$$

отличающемуся от (147.8) только обозначениями. Существенное отличие состоит в изменении *граничных условий*, которому должны удовлетворять решения уравнения (147.11). При идеальной проводимости стенок волновода граничные условия в рассматриваемом случае сводятся к обращению в нуль тангенциальных компонент вектора $\mathbf{E}$, в частности к обращению в нуль E_x и E_y. Иными словами, на стенках волновода должны обращаться в нуль производные $\partial H_z/\partial x$ и $\partial H_z/\partial y$, как это видно из (147.10). Но через эти производные можно выразить производную $\partial H_z/\partial n$ по нормали к поверхности волновода:

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = \frac{\partial H_z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial H_z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}.$$

Поэтому в более компактной форме граничные условия сводятся к обращению в нуль производной по нормали $\partial H_z/\partial n$ на стенках волновода. Но это обстоятельство не меняет общих выводов, которые были сделаны ранее относительно волн электрического типа. Только допустимые числовые значения параметра α в уравнении (147.11) получаются иными, чем в случае уравнения (147.8). Поэтому нет и необходимости подробно исследовать случай электромагнитных волн магнитного типа.

8. Выведем теперь соотношение между фазовой $v_{\text{ф}} = \omega/k_z$ и групповой $v_{\text{г}} = d\omega/dk_z$ скоростями распространения волн в волноводе, одинаково справедливое для волн электрического и магнитного типа. С этой целью возьмем одно из собственных значений α. Если изменять частоту ω, то одновременно у рассматриваемой волны будут меняться k и k_z. Поэтому, дифференцируя соотношение (147.5) при постоянном α и принимая во внимание (147.6), получим

$$\varepsilon\mu\frac{\omega d\omega}{c^2} + \frac{\omega^2}{2c^2}\frac{d(\varepsilon\mu)}{d\omega}\,d\omega = k_z\,dk_z,$$

откуда

$$v_{\text{ф}}v_{\text{г}}\left[1 + \frac{\omega}{2\varepsilon\mu}\frac{d(\varepsilon\mu)}{d\omega}\right] = \frac{c^2}{\varepsilon\mu} = v^2, \tag{147.12}$$

где $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ — фазовая скорость волны в безграничной среде. Если среда, заполняющая волновод, не обладает дисперсией, то

$$v_{\text{ф}}v_{\text{г}} = v^2. \tag{147.13}$$

В частности, если средой в волноводе является вакуум, то $v_{\text{ф}}v_{\text{г}} = c^2$. Фазовая скорость не может быть скоростью сигнала, и на нее требования теории относительности не распространяются. Поэтому всегда $v_{\text{ф}} > c$. Но тогда из последнего соотношения следует, что всегда $v_{\text{г}} < c$, как этого и требует теория относительности, поскольку группа волн, распространяющаяся с групповой скоростью, может служить сигналом.

9. Групповая скорость при определенных ограничениях является также *средней скоростью энергии*, переносимой волной. Докажем эту

теорему в предположении, что среда непоглощающая, но диспергирующая. Зависимость ε и μ от температуры принимать во внимание не будем. Тогда внутренняя энергия среды будет совпадать с ее свободной энергией. Для средней по времени плотности электромагнитной энергии электродинамика дает

$$\overline{W} = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{d(\varepsilon\omega)}{d\omega}\,EE^* + \frac{d(\mu\omega)}{d\omega}\,HH^*\right] + \text{ компл. сопр.} \tag{147.14}$$

(см. т. IV, § 88). Что касается вектора плотности потока электромагнитной энергии, то он во всех случаях определяется вектором Пойнтинга S. Его среднее значение для монохроматического поля дается выражением

$$\mathbf{S} = \frac{c}{16\pi}\,[\mathbf{EH}^*] + \text{ компл. сопр.} \tag{147.15}$$

Средняя скорость распространения электромагнитной энергии определяется формулой

$$v_{\text{эл}} = \frac{\overline{S}}{\overline{W}}. \tag{147.16}$$

Для лучшего уяснения вопроса совпадение скоростей $v_{\text{эл}}$ и v_r докажем сначала не для волновода, а для более простого случая *неограниченной однородной среды.* Если в такой среде распространяется плоская волна в направлении единичного вектора $\mathbf{N}$, то поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ связаны соотношениями

$$\sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{E} = -\sqrt{\mu}\,[\mathbf{NH}]; \quad \sqrt{\mu}\,\mathbf{H} = [\mathbf{NE}].$$

Пользуясь этими выражениями, из (147.14), получим

$$\overline{W} = \frac{1}{16\pi}\left\{\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} + \frac{\varepsilon}{\mu}\,\frac{d(\omega\mu)}{d\omega}\right\}EE^*.$$

Для преобразования выражения в фигурных скобках запишем выражение (147.6) в виде $k^2 = (1/c^2)(\omega\varepsilon)(\varepsilon\mu)$ и продифференцируем его по ω. Тогда

$$2k\frac{dk}{d\omega} = \frac{\omega\mu}{c^2}\,\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} + \frac{\omega\varepsilon}{c^2}\,\frac{d(\omega\mu)}{d\omega},$$

откуда

$$\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} + \frac{\varepsilon}{\mu}\,\frac{d(\omega\mu)}{d\omega} = 2k\frac{c^2}{\omega\mu}\,\frac{dk}{d\omega} = 2\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\frac{c}{\omega\mu}\,\frac{dk}{d\omega} = 2c\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\frac{dk}{d\omega}.$$

Таким образом,

$$\overline{W} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\frac{dk}{d\omega}.$$

Далее, выражение (147.15) переходит в

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,(\mathbf{EE}^*)\mathbf{N}.$$

В результате получается

$$v_{\text{эл}} = \frac{\overline{S}}{\overline{W}} = \frac{d\omega}{dk} = v_r.$$

10. Распространим теперь полученный результат на случай электромагнитной волны в *волноводе.* Не нарушая общности, ограничимся волнами электрического типа. В случае волновода в формуле (147.16) величины $\overline{S}$ и $\overline{W}$ следует заменить на средние значения полного потока энергии через поперечное сечение волновода и энергии, приходящейся на единицу его длины. Средний поток энергии в единицу времени через поперечное сечение волновода определяется выражением

$$\int \overline{S}_z\, df = \frac{c}{16\pi}\int (E_x H_y^* + E_y H_x^*)\, df + \text{компл. сопр.},$$

причем интегрирование ведется по площади поперечного сечения волновода. Подставляя вместо E и H их выражения из (147.7), получим

$$\int \overline{S}_z\, df = \frac{\omega\varepsilon k_z}{8\pi\alpha^4}\int \left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\frac{\partial E_z^*}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial y}\frac{\partial E_z^*}{\partial y}\right) df. \tag{147.17}$$

Средняя энергия, приходящаяся на единицу длины волновода,

$$\int \overline{W}\, df = \\ = \frac{1}{16\pi}\int \frac{1}{\alpha^4}\left[k_z^2 \frac{d\omega\varepsilon}{d\omega} + \frac{\omega^2\varepsilon^2}{c^2}\frac{d(\omega\mu)}{d\omega}\right]\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\frac{\partial E_z^*}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial y}\frac{\partial E_z^*}{\partial y}\right) df + \\ + \frac{1}{16\pi}\int \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} E_z E_z^*\, df.$$

Очевидно,

$$\int \left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\frac{\partial E_z^*}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial y}\frac{\partial E_z^*}{\partial y}\right) df = \\ = \int \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(E_z \frac{\partial E_z^*}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(E_z\frac{\partial E_z^*}{\partial y}\right)\right] df - \int E_z \left(\frac{\partial^2 E_z^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z^*}{\partial y^2}\right) df.$$

К первому интегралу в правой части применим математическую теорему Гаусса. Тогда для этого интеграла получим

$$\oint E_z \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} n_x + \frac{\partial E_z}{\partial y} n_y\right) df = \oint E_z \frac{\partial E_z^*}{\partial n}\, dl,$$

где интегрирование ведется по замкнутому контуру — линии, получающейся при нормальном сечении волновода, а dl означает элемент длины этого контура. Так как на контуре $E_z = 0$, то рассматриваемый интеграл обращается в нуль.

В случае волны магнитного типа вместо E_z надо брать H_z, но соответствующий интеграл также обращается в нуль, так как на контуре

$\partial H_z^*/\partial n = 0$. Только в этом пункте доказательство для волн магнитного типа отличается от доказательства для волн электрического типа. Второй же интеграл в правой части преобразуется при помощи (147.8), в результате чего получим

$$\int \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \frac{\partial E_z^*}{\partial x} + \frac{\partial E_z^*}{\partial y} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) df = -\alpha^2 \int E_z E_z^* \, df.$$

Умножим это выражение на $\dfrac{1}{\alpha^2} \dfrac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}$ и прибавим его к правой части (147.8). Тогда, принимая во внимание (147.6), найдем

$$\int \overline{W} \, df = \frac{\omega^2 \varepsilon}{16\pi\alpha^4 c^2} \left[\mu \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} + \varepsilon \frac{d(\varepsilon\mu)}{d\omega} \right] \int \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \frac{\partial E_z^*}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial y} \frac{\partial E_z^*}{\partial y} \right) df. \tag{147.18}$$

Поделив (147.17) на (147.18), получим выражение для средней скорости распространения энергии вдоль волновода

$$v_{\text{эл}} = \frac{c}{v_{\text{ф}}} \frac{1}{\varepsilon\mu \left(1 + \dfrac{\omega}{2\varepsilon\mu} \dfrac{d(\varepsilon\mu)}{d\omega} \right)}. \tag{147.19}$$

Сравнивая эту формулу с (147.12), убеждаемся, что средняя скорость распространения волны в волноводе совпадает с групповой скоростью.

ЗАДАЧИ

1. Найти собственные значения и функции уравнений (147.8) и (147.11) в волноводе прямоугольного поперечного сечения при соответствующих граничных условиях.

Решение. Ищем решение уравнения (147.8) с разделяющимися переменными, т. е. решение в виде

$$E_z = \varphi(x)\psi(y).$$

После подстановки этого выражения в уравнение (147.8) получим

$$\frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{1}{\psi(y)} \frac{d^2\psi}{dy^2} = -\alpha^2.$$

Первое слагаемое здесь зависит только от x, а второе — только от y. Сумма этих слагаемых есть постоянная. Это возможно тогда и только тогда, когда эти слагаемые сами постоянны. Обозначив их через α_x^2 и α_y^2, получим

$$\frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\alpha_x^2,$$

$$\frac{1}{\psi(y)} \frac{d^2\psi}{dy^2} = -\alpha_y^2,$$

причем $\alpha_x^2 + \alpha_y^2 = \alpha^2$. Решения этих уравнений, удовлетворяющие граничным условиям $\varphi(0) = \varphi(a) = \psi(0) = \psi(b) = 0$, где a и b — поперечные размеры волновода вдоль осей x и y соответственно, имеют вид

$$\varphi(x) = \sin \frac{n_x \pi x}{a}, \quad \psi(y) = \sin \frac{n_y \pi y}{b}, \quad n_x, n_y = 1, 2, 3, \ldots$$

Таким образом, собственными функциями будут

$$E_z = \sin\frac{n_x \pi x}{a}\,\sin\frac{n_y \pi y}{b}, \tag{147.20}$$

а собственными значениями

$$\alpha^2 = \alpha_x^2 + \alpha_y^2 = \pi^2\left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2}\right). \tag{147.21}$$

В случае волн магнитного вида собственные функции

$$H_z = \cos\frac{n_x \pi x}{a}\,\cos\frac{n_y \pi y}{b},$$

а собственные значения такие же, как и в первом случае.

2. Пусть волновод заполнен однородной средой с $\mu(\omega) = 1$. При каком законе дисперсии $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ связь между фазовой скоростью и скоростью движения энергии в волноводе принимает вид

$$v_{\text{эл}} v_{\text{ф}} = c^2. \tag{147.22}$$

Решение. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выражение (147.19) переходило в (147.22), т. е.

$$\varepsilon\left(1 + \frac{\omega}{2\varepsilon}\,\frac{d\varepsilon}{d\omega}\right) = 1$$

или

$$(\varepsilon - 1)\,d\omega + \frac{\omega}{2}\,d\varepsilon = 0.$$

Интегрируя это соотношение, найдем

$$\varepsilon - 1 = \frac{\text{const}}{\omega^2}. \tag{147.23}$$

Таким законом дисперсии обладает ионизированный газ — плазма, причем в этом случае const отрицательна.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Важнейшие формулы электродинамики в системе СИ

Для удобства читателя номер формулы совпадает с номером соответствующей формулы основного текста книги в гауссовой системе СГС.

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \tag{2.2}$$

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}. \tag{3.2}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^3}\,\mathbf{r}. \tag{3.4}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{3.7}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\mathbf{pr})}{r^5}\,\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}\right]. \tag{4.3}$$

$$\mathbf{M} = [\mathbf{pE}]. \tag{4.4}$$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}\nabla)\mathbf{E}. \tag{4.7}$$

$$\varPhi \equiv \oint (\mathbf{E}\,d\mathbf{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\,q. \tag{5.5}$$

$$E = \begin{cases} \rho x/\varepsilon_0 & \text{внутри пластинки,} \\ \rho a/\varepsilon_0 & \text{вне пластинки.} \end{cases} \tag{6.2}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q\mathbf{r}}{a^3} = \frac{1}{3\varepsilon_0}\,\rho\mathbf{r}. \tag{6.5}$$

$$E = \frac{\varkappa}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}. \tag{6.6}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\,\rho\mathbf{r}. \tag{6.7}$$

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{6.9}$$

$$f = \frac{\varepsilon_0}{2}\,(E_2^2 - E_1^2)\mathbf{n}. \tag{6.15}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{6.16}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\boldsymbol{\rho}. \tag{7.3}$$

$$\sigma_{\text{пол}} = (\mathbf{Pn}) = P_n. \tag{12.2}$$

$$q_{\text{пол}} = -\oint P_n\,dS = -\oint (\mathbf{P}\,d\mathbf{S}). \tag{12.3}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}. \tag{13.3}$$

$$\oint D_n\,dS = q. \tag{13.4}$$

$$\rho_{\text{пол}} = -\operatorname{div}\mathbf{P}. \tag{13.6}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{q}{r^3}\,\mathbf{r}. \tag{13.10}$$

$$\mathbf{D} = \sigma\mathbf{n}. \tag{14.3}$$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\alpha\mathbf{E}. \tag{15.1}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}. \tag{15.2}$$

$$\varepsilon = 1 + \alpha. \tag{15.3}$$

$$\mathbf{E}^{(i)} = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\,\mathbf{P}. \tag{16.1}$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\,\mathbf{P}. \tag{16.7}$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\nabla\varphi. \tag{18.5}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\,\frac{q}{r}. \tag{19.1}$$

$$\operatorname{div}\,\operatorname{grad}\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\,\rho. \tag{22.2}$$

$$\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_0 a^3\mathbf{E}. \quad (23.5)$$

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon a. \quad (26.2)$$

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}. \quad (26.5)$$

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}. \quad (26.6)$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln(b/a)}. \quad (26.7)$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln(4h^2/ab)}. \quad (26.8)$$

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}q\varphi = \frac{1}{2}C\varphi^2. \quad (28.3)$$

$$w = \frac{1}{2}\mathbf{ED} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}. \quad (29.7)$$

$$w = \int \mathbf{E}\,d\mathbf{D}. \quad (29.8)$$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}}. \quad (30.1)$$

$$dU = T\,dS + \mathbf{E}\,d\mathbf{D}. \quad (31.6)$$

$$d\Psi = -S\,dT + \mathbf{E}\,d\mathbf{D}. \quad (31.7)$$

$$d\Phi = -S\,dT - \mathbf{D}\,d\mathbf{E}. \quad (31.8)$$

$$dI = T\,dS - \mathbf{D}\,d\mathbf{E}. \quad (31.9)$$

$$\Psi = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} + \Psi_0 = \frac{D^2}{2\varepsilon_0\varepsilon} + \Psi_0. \quad (31.12)$$

$$U = \left(1 + \frac{T}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)\frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} + U_0(T,\tau). \quad (31.14)$$

$$f = -w = -\frac{D^2}{2\varepsilon_0\varepsilon} = -\frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}. \quad (32.8)$$

$$f = (\mathscr{P} - \mathscr{P}_0) - \left(\varepsilon + \tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}. \quad (32.9)$$

$$f = \frac{\varepsilon_0}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)E^2. \quad (33.4)$$

$$f = \frac{D^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right). \quad (33.5)$$

$$\mathscr{T} = -\mathscr{P} + \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\left(\varepsilon + \tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right). \quad (33.8)$$

$$\Pi = \mathscr{P} + \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\left(\varepsilon - \tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right). \quad (33.9)$$

$$\mathbf{f} = -\operatorname{grad}\mathscr{P} + \rho\mathbf{E} - \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\operatorname{grad}\varepsilon + \frac{\varepsilon_0}{2}\operatorname{grad}\left(\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}E^2\right). \quad (34.5)$$

$$\mathbf{p} = \varepsilon_0\beta\mathbf{E}. \quad (35.1)$$

$$\beta = 4\pi a^3. \quad (35.2)$$

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3}n\beta. \quad (35.15)$$

$$\mathbf{P} = \frac{np_0^2}{3kT}\mathbf{E}. \quad (36.5)$$

$$\alpha = \frac{np_0^2}{3kT\varepsilon_0}. \quad (36.6)$$

$$\varepsilon = 1 + \frac{np_0^2}{3kT\varepsilon_0}. \quad (36.7)$$

$$\mathbf{j} = ne\mathbf{u}. \quad (40.1)$$

$$\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}. \quad (41.1)$$

$$\lambda = \frac{ne^2}{m}\overline{\tau}. \quad (42.12)$$

$$Q = (\mathbf{jE}) = \lambda\mathbf{E}^2 = \frac{1}{\lambda}\mathbf{j}^2. \quad (42.22)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E} = IR. \quad (44.5)$$

$$R = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{C\lambda}. \quad (46.1)$$

$$\tau = RC = \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\lambda}. \qquad (48.8)$$

$$\mathbf{E} = q(\mathbf{E} + [\mathbf{vB}]). \qquad (49.3)$$

$$d\mathbf{F} = [\mathbf{jB}]\,dV. \qquad (49.4)$$

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}\,\mathbf{B}]. \qquad (49.6)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{r^3}[\mathbf{vr}]. \qquad (50.2)$$

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 q_1 q_2}{r_{12}^3}[\mathbf{v}_2[\mathbf{v}_1\mathbf{r}_{12}]]. \qquad (50.4)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{[\mathbf{jr}]}{r^3}\,dV. \qquad (50.10)$$

$$\mathbf{B} = \oint\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I[d\mathbf{l}\,\mathbf{r}]}{r^3}. \qquad (50.11)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \qquad (51.1)$$

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi R}I_1 I_2 l. \qquad (51.2)$$

$$B = \frac{\mu_0 a^2 I}{2r^3}. \qquad (51.5)$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\,i\Omega. \qquad (51.7)$$

$$B = \mu_0 i. \qquad (51.8)$$

$$\mathbf{M} = [\mathfrak{M}\mathbf{B}]. \qquad (52.1)$$

$$\mathfrak{M} = I\mathbf{S}. \qquad (52.2)$$

$$\oint\mathbf{B}\,d\mathbf{s} = \mu_0 I. \qquad (55.4)$$

$$B = \frac{NI}{2\pi R}. \qquad (55.10)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}. \qquad (56.1)$$

$$\mathfrak{m} = I\mathbf{n}. \qquad (57.2)$$

$$\mathbf{F} = (\mathfrak{M}\nabla)\mathbf{B}. \qquad (57.3)$$

$$\boldsymbol{\varpi} = -\frac{e}{m}\mathbf{B}. \qquad (57.4)$$

$$r = \frac{v}{|\omega|} = \frac{mv}{|e|B}. \qquad (57.5)$$

$$i_m = I. \qquad (58.6)$$

$$\mathbf{j}_m = \operatorname{rot}\mathbf{I}. \qquad (59.4)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{I}. \qquad (59.5)$$

$$\oint\mathbf{H}\,d\mathbf{l} = I. \qquad (59.6)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}. \qquad (59.7)$$

$$[\mathbf{nH}_2] - [\mathbf{nH}_1] = \mathbf{i}. \qquad (60.3)$$

$$\mathbf{I} = \varkappa\mathbf{H}. \qquad (61.1)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}. \qquad (61.2)$$

$$\mu = 1 + \varkappa. \qquad (61.3)$$

$$A_{12} = I(\Phi_2 - \Phi_1). \qquad (62.2)$$

$$\mathscr{E}^{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (64.1)$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\mathbf{VB}]. \qquad (66.6)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \varepsilon_0\mu_0[\mathbf{VE}]. \qquad (66.7)$$

$$\Phi = LI. \qquad (68.1)$$

$$L = \frac{\mu_0\mu N^2 S}{l}. \qquad (68.2)$$

$$\tau = \frac{L}{R}. \qquad (68.10)$$

$$W_m = \frac{1}{2}\sum I_i\Phi_i. \qquad (69.5)$$

$$w_m = \frac{1}{2}\mu_0\mu H^2 = \frac{1}{2}HB = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}. \qquad (70.3)$$

$$F = \frac{SB^2}{2\mu_0}\left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right) = \frac{\mu_0 S}{2}(\mu_2 H_2^2 - \mu_1 H_1^2). \qquad (72.5)$$

$$F = \frac{\mu_0 S H^2}{2}(\mu_1 - \mu_2) = \frac{S}{2\mu_0}\left(\frac{B_1^2}{\mu_1} - \frac{B_2^2}{\mu_2}\right). \qquad (72.7)$$

$$T = \mathscr{P} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{HB}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}. \quad (72.8)$$

$$\delta Q = dU - \mathbf{H}\,d\mathbf{B}. \quad (73.1)$$

$$dU = T\,dS + \mathbf{H}\,d\mathbf{B}. \quad (73.2)$$

$$d\Psi = -S\,dT + \mathbf{H}\,d\mathbf{B}. \quad (73.3)$$

$$d\Phi = -S\,dT - \mathbf{B}\,d\mathbf{H}. \quad (73.4)$$

$$dI = T\,dS - \mathbf{B}\,d\mathbf{H}. \quad (73.5)$$

$$\Psi = \frac{\mu\mu_0}{2} H^2 + \Psi_0 = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} + \Psi_0. \quad (73.7)$$

$$U = \left(\mu + T\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)\frac{\mu_0 H^2}{2} + U_0(T,\tau). \quad (73.8)$$

$$dT = -\frac{TB}{\mu_0\mu^2 c_B}\,\frac{d\varkappa}{dT}\,dB. \quad (73.10)$$

$$dT = -\frac{\mu_0 TH}{c_H}\,\frac{d\varkappa}{dT}\,dH. \quad (73.11)$$

$$\Gamma = \frac{\mathfrak{M}}{L} = -\frac{e}{2m}. \quad (75.1)$$

$$\mathfrak{M} = -\frac{e\hbar}{2m}\,n. \quad (75.2)$$

$$\mathbf{I} = -\frac{\mu_0 NZe^2}{6m}\,\overline{R^2}\,\mathbf{H}. \quad (76.3)$$

$$\varkappa = -\frac{\mu_0 ZNe^2}{6m}\,\overline{R^2}. \quad (76.4)$$

$$\mu = 1 - \frac{\mu_0 NZe^2}{6m}\,\overline{R^2}. \quad (76.5)$$

$$\varkappa = \frac{\mu_0 n\mathfrak{M}^2}{3kT}. \quad (77.5)$$

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = -\frac{1}{\mu_0\Lambda^2}\,\mathbf{E}. \quad (80.2)$$

$$\Lambda = \left(\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}\right)^{1/2}. \quad (80.3)$$

$$\psi_s + \frac{1}{2\mu_0}\,\mathbf{B}_k^2 = \psi_n. \quad (80.6)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \frac{3\mu_0}{4\pi}\,\frac{(\mathfrak{M}\mathbf{r})}{r^5}\,\mathbf{r} - \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\mathfrak{M}}{r^3}. \quad (80.8)$$

$$\mathfrak{M} = -\frac{2\pi a^3}{\mu_0}\,\mathbf{B}. \quad (80.9)$$

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \dot{\mathbf{D}}. \quad (81.6)$$

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \varepsilon_0\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{P}}. \quad (81.9)$$

$$\oint_L \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right) d\mathbf{S}. \quad (82.1)$$

$$\oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\int \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\,d\mathbf{S}. \quad (82.2)$$

$$\oint (\mathbf{D}\,d\mathbf{S}) = \int \rho\,dV. \quad (82.3)$$

$$\oint (\mathbf{B}\,d\mathbf{S}) = 0. \quad (82.4)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}. \quad (82.1a)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}. \quad (82.2a)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho. \quad (82.3a)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \quad (82.4a)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma. \quad (82.5)$$

$$[\mathbf{n}\mathbf{H}_2] - [\mathbf{n}\mathbf{H}_1] = \mathbf{i}. \quad (82.8)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}. \quad (82.10)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}. \quad (82.11)$$

$$\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}. \quad (82.12)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}}. \quad (83.2)$$

$$\mathbf{E} = -[\mathbf{v}\mathbf{B}], \quad \mathbf{H} = [\mathbf{v}\mathbf{D}]. \quad (83.3)$$

$$\varepsilon_0\varepsilon E^2 = \mu_0\mu H^2. \quad (83.4)$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (84.3)$$

$$w = \int(\mathbf{E}\,d\mathbf{D} + \mathbf{H}\,d\mathbf{B}). \quad (84.7)$$

$$w = \frac{1}{2}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB}). \qquad (84.9)$$

$$m\dot{\mathbf{v}} = e(\mathbf{E} + [\mathbf{vB}]). \qquad (86.2)$$

$$\mathbf{v}_{\text{д}} = \frac{[\mathbf{EB}]}{B^2}. \qquad (86.3)$$

$$\mathbf{v}_{\text{д}} = \frac{1}{B^2 e}[\mathbf{FB}]. \qquad (86.4)$$

$$\mathbf{v}_{\text{д}} = \frac{mv_\perp^2}{2eB^2}\frac{\partial B}{\partial N}\mathbf{b}. \qquad (87.2)$$

$$\mathbf{v}_{\text{д}} = \frac{mv_\perp^2}{2eBR}\mathbf{b}. \qquad (87.3)$$

$$\mathbf{v}_{\text{д}} = \frac{mv_\parallel^2}{eBR}\mathbf{b}. \qquad (87.4)$$

$$\mathbf{V} = v_\parallel \mathbf{h} + \frac{1}{B^2}[\mathbf{EB}] + \frac{m}{eBR}\left(v_\parallel^2 + \frac{1}{2}v_\perp^2\right)\mathbf{b}. \qquad (87.5)$$

$$\mathfrak{M} = -\frac{mv_\perp^2}{2B}\mathbf{h}. \qquad (88.2)$$

$$\varPhi = \frac{m^2 v_\perp^2}{e^2 B}. \qquad (88.3)$$

$$\mathbf{g} = \frac{[\mathbf{EH}]}{c}. \qquad (91.1)$$

$$m_{\text{эл}} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 ac^2}. \qquad (91.4)$$

$$R = \frac{1}{ne}. \qquad (98.4)$$

$$R = \frac{3\pi}{8ne}. \qquad (98.5)$$

$$C = \frac{4\varepsilon_0}{9l^2}\sqrt{\frac{2e}{m}}. \qquad (101.17)$$

$$D = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 kT}{ne^2}}. \qquad (121.1)$$

$$\lambda = \frac{(4\pi\varepsilon_0)^2(3kT)^{3/2}}{\pi Ze^2 L\sqrt{m}}. \qquad (121.3)$$

$$D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 kT}{2ne^2}}. \qquad (121.8)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}. \qquad (123.9)$$

$$v = \frac{B}{\sqrt{\mu_0\rho}}. \qquad (138.6)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{3(\mathbf{pr})}{r^5}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}\right]_{t-r/v} + \frac{1}{4\pi}\left[\frac{3(\dot{\mathbf{p}}\mathbf{r})}{vr^4}\mathbf{r} - \frac{\dot{\mathbf{p}}}{vr^2}\right]_{t-r/v} + \frac{1}{4\pi}\left[\frac{(\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{r})}{v^2r^3}\mathbf{r} - \frac{\ddot{\mathbf{p}}}{v^2 r}\right]_{t-r/v},$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi r^3}[\dot{\mathbf{p}}\mathbf{r}]_{t-r/v} + \frac{1}{4\pi vr^2}[\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{r}]_{t-r/v}. \qquad (141.10)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{(\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{r})}{v^2r^3}\mathbf{r} - \frac{\ddot{\mathbf{p}}}{v^2 r}\right]_{t-r/v} = \frac{1}{4\pi v^2 r^3}[[\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{r}]\mathbf{r}]_{t-r/v},$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi vr^2}[\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{r}]_{t-r/v}. \qquad (141.11)$$

$$\mathbf{S} = \frac{\sin^2\vartheta}{16\pi^2\varepsilon_0\varepsilon v^3 r^2}\ddot{\mathbf{p}}^2_{t-r/v}\mathbf{N}. \qquad (141.13)$$

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0\varepsilon v^3}\ddot{\mathbf{p}}^2_{t-r/v}. \qquad (141.14)$$

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{\omega^4}{12\pi\varepsilon_0\varepsilon v^3}\mathbf{p}_0^2. \qquad (141.16)$$

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0\varepsilon v^3}\dot{v}^2. \qquad (141.17)$$

$$D = \frac{1}{\mu_0\mu\lambda}. \qquad (144.4)$$

$$l \sim \frac{1}{\sqrt{2\mu_0\mu\lambda\nu}}. \qquad (144.5)$$

Фундаментальные физические константы по ГСССД 1–87

Константа	Обозначение	Числовое значение	Размерность и единица физической величины
Скорость света в вакууме	c	299 792 458	м/с
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} =$ $= 12{,}566\,370\,614\ldots$	10^{-7} Н/А^2
Электрическая постоянная	ε_0	$(\mu_0 c^2)^{-1} =$ $= 8{,}854\,187\,817\ldots$	10^{-12} Ф/м
Гравитационная постоянная	G	6,672 59(85)	10^{-11} м^3/(кг·с^2)
Постоянная Планка	h	6,626 075 5(40)	10^{-34} Дж·с
в электрон-вольтах $h/\{e\}$		4,135 669 2(12)	10^{-15} эВ·с
$h/2\pi$	$\hbar$	1,054 572 66(63)	10^{-34} Дж·с
в электрон-вольтах $\hbar\{e\}$		6,582 1220(20)	10^{-16} эВ·с
Планковская масса $(\hbar c/G)^{1/2}$	m_P	2,176 71(14)	10^{-8} кг
Элементарный заряд	e	1,602 177 33(49)	10^{-19} Кл
Магнетон Бора $e\hbar/2m_e$	μ_B	9,274 0154(31)	10^{-24} Дж/Тл
Боровский радиус $\alpha/(4\pi R_\infty)$	a_0	0,529 177 249(24)	10^{-10} м
Масса покоя электрона	m_e	9,109 389 7(54)	10^{-31} кг
Отношение заряда электрона к его массе	$-\frac{e}{m_e}$	−1,758 819 62(53)	10^{11} Кл/кг
Классический радиус электрона $\alpha^2 a_0$	r_e	2,817 940 92(38)	10^{-15} м
Масса покоя протона	m_p	1,672 6231(10)	10^{-27} кг
Отношение массы протона к массе электрона	$\frac{m_p}{m_e}$	1836,152 701(37)	
Масса покоя нейтрона	m_n	1,674 9286(10)	10^{-27} кг
Масса покоя дейтрона	m_d	3,343 5860(20)	10^{-27} кг
Постоянная Авогадро	N_A	6,022 1367(36)	10^{23} моль$^{-1}$
Атомная единица массы 1 а.е.м. $= \frac{1}{12}\,m(^{12}\mathrm{C}) \equiv m_{\text{а.е.м.}}$	а.е.м.	1,660 5420(10)	10^{-27} кг
Постоянная Фарадея	F	96 485,309(29)	Кл/моль
Универсальная газовая постоянная	R	8,314 510(70)	Дж/(моль·К)
Постоянная Больцмана R/N_A	k	1,380 658(12)	10^{-23} Дж/К

Именной указатель

Предметный указатель

Учебное издание

СИВУХИН Дмитрий Васильевич

ОБЩИЙ КУРС ФИЗИКИ

Том III

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

Редактор *О. В. Салецкая*
Оригинал-макет: *В. В. Худяков*
Оформление переплета: *А. Ю. Алехина*

ЛР № 071930 от 06.07.99
Подписано в печать 07.09.04. Формат 60×90/16
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная
Усл. печ. л. 41. Уч.-изд. л. 45,1. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997 Москва, Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, http://www.fml.ru

Издательство МФТИ
141700 Долгопрудный, Московская обл., Институтский пер., 9

При участии издательской и книготорговой фирмы «ФИЗМАТКНИГА»
141700 Долгопрудный, Московская обл., Институтский пер., 9
Тел.: (095) 408-76-81, 409-93-28

Отпечатано с диапозитивов
в РГУП «Чебоксарская типография № 1»
428019 Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

